5.14. Problemak

Eskuz ebazteko problemak:

1. Faktorizatu matrize hauek LU deskonposizioaren bidez eta pibotatze partziala erabiliz:

$$a)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad d)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$e)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad f)\quad \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Zein dira matrize horien bat-norma eta infinitu-norma?

Aurkitu matrize horien baldintzazko zenbakiak bi norma horietarako (hots, κ_1 eta κ_∞).

2. Ebatzi sistema lineal hauek LU deskonposizioaren bidez eta pibotatze partziala erabiliz:

$$a)\quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -4 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad d)\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$e)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 1x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_3 + 6x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad f)\quad \begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4 \end{aligned}$$

3. Faktorizatu matrize simetriko hauek, $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$ eran, Choleskyren metodoa erabiliz:

$$a)\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad d)\quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e)\quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad f)\quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Zein kasutan da matrizea hertsiki diagonal menperatzaile? Hori gertatzen denean, nolakoa da matrizea? Kalkulatu a)-f) sistemetarako baldintzazko zenbakiaren beheborne bat.

4. Sistema hauetarako, aurkitu Jacobiren eta Gauss-Seidelen lehenengo hiru iterazioak, $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ erabiliz:

$$a)\quad \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned} \qquad d)\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$e)\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= -11 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \end{aligned} \qquad f)\quad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Zein da metodo bakoitzeko zehaztasun erlatiboa hirugarren iterazioan? Zein metodok egiten du konbergentzia azkarren (egiten badu)? Soluzio batera jotzen dute metodo iteratibo hauek? Zeinetara? Sistema baterako prozesu iteratibo horiek hasi baino lehen, jakin dezakegu konbergenteak diren? Zergatik?

$$\left(\text{Oharra: } k. \text{ iterazioko zehaztasun erlatiboa} = \frac{\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty}\right)$$

5. Aurkitu lehenengo problemako matrizeen QR faktorizazioa, erabilitako Householderen bektoreak eta matrizeak emanez. Erakutsi, urratsez urrats, egindako eragiketa nagusiak. (Begira ezazu 5.4. adibidea).

6. Ebatzi bigarren problemako sistemak, aurreko probleman aurkitutako QR faktorizazioak erabiliz.

7. (a) Izan bedi $\boldsymbol{U}$ matrize ez-singular goi-triangeluarra. Frogatu $\boldsymbol{U}^{-1}$-en diagonaleko gaiak $\boldsymbol{U}$-ren diagonaleko gaien erreziprokoak direla.

   (b) Aurreko atalaren emaitza erabiliz, frogatu hau betetzen dela:

$$\|\boldsymbol{U}\|_\infty \geq \max_i |u_{ii}| \quad \text{eta} \quad \|\boldsymbol{U}^{-1}\|_\infty \geq \frac{1}{\min_i |u_{ii}|}.$$

   Bi desberdintza horiek norma infiniturako hau inplikatzen dute:

$$\kappa_\infty(\boldsymbol{U}) \geq \frac{\max_i |u_{ii}|}{\min_i |u_{ii}|}.$$

   Desberdintza horren eskuin aldeko kantitatea sarri erabiltzen dugu matrize goi-triangeluar baten baldintzazko zenbakiaren hurbilpena bezala.

8. Izan bitez $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema gaindeterminatu hauek:

$$a) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad b) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad d) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad f) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   Ebatzi sistema horiek ekuazio normalak erabiliz. Zein da beren hondarraren norma euklidearra?

9. Ebatzi aurreko problemaren sistemak, QR faktorizazioaren bitartez. Kalkula ezazu hondarraren norma euklidearra.

10. Izan bedi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema gaindeterminatua, non

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Zein da ekuazio normalei dagokien matrizearen bi-normarako baldintzazko zenbakia?

(b) Zein dira QR faktorizaziorako $\boldsymbol{R}$ matrizea eta $\boldsymbol{R}$-ren bi-normarako baldintzazko zenbakia? Zein da $\boldsymbol{A}$-ren bi-normarako baldintzazko zenbakia?

(c) Konparatu aurreko bi ataletan lortutako baldintzazko zenbakiak. Zer esan dezakegu?

(d) Ebatzi sistema hori bi metodoak lau zifra esangarrirekin erabiliz, eta konparatu emaitzak.

11. Aurkitu $f(x) = ax+b$ funtzio lineal hoberena, minimo karratuen zentzuan, datu multzo hauetarako:

$a)$

x	-1	0	1	2
y	3	2	0	4

$b)$

x	-3	-1	1	3
y	15	5	1	5

Marraztu $a)$ kasurako funtzio lineala eta datuak, koordenatu-sistema kartesiar batean.

12. Aurkitu $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabola hoberena, minimo karratuen zentzuan, datu multzo hauetarako:

$a)$

x	-1	0	1	2
y	3	2	0	4

$b)$

x	-3	-1	1	3
y	15	5	1	5

Marraztu $a)$ kasurako funtzio koadratikoa eta datuak, koordenatu-sistema kartesiar batean. $a)$ eta $b)$ multzo bakoitzari, bi funtzioetako zein egokitzen zaio ondoen? Lineala edo koadratikoa? Zergatik?

13. Izan bedi matrize hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat QR-faktorizazioa erabiliz.

(b) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$-ren azpiespazio nuluaren oinarri ortonormal bat QR-faktorizazioa erabiliz.

(c) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_B$ oinarri-soluzioa, baldin $\boldsymbol{b} = [1 \;\; 3 \;\; 5]^t$ bada.

(d) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_{LM}$ soluzioa; hots, norma euklidear minimoa duen minimo karratuen problemaren soluzioa.

14. Izan bedi matrize hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

(a) Hein urrikoa da? Arrazoitu erantzuna.

(b) Kalkula ezazu bere QR-faktorizazioa, zutabeen permutazioak eginez, beharrezkoa bada.

(c) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat QR-faktorizazioa erabiliz.

(d) Aurkitu $K(\boldsymbol{A})$-ren azpiespazio nuluaren oinarri ortonormal bat QR-faktorizazioa erabiliz.

(e) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_B$ oinarri-soluzioa, baldin $\boldsymbol{b} = [2 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 3]^t$ bada.

(f) Aurkitu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren $\boldsymbol{x}_{LM}$ soluzioa; hots, norma euklidear minimoa duen minimo karratuen problemaren soluzioa.

MATLABez programatzeko problemak:

15. Garatu Jacobiren iteraziorako M-fitxategi bat, `jacobi.m` izenekoa. Programa horrek $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema lineala, non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hertsiki diagonal menperatzailea baita, ebazteko gai izan behar du. Programa horrek goiburu hau izan behar du:

    `function x=jacobi(A,b,x0,ze,imax)`,

    non `x` soluzioaren hurbilpen bat baita, `x0` hasierako hurbilpen bat eta `ze` eta `imax` eskatutako zehaztasun erlatiboa eta iterazioen kopuru maximoa baitira, hurrenez hurren. Programaren exekuzioa bukatuko da k-garren iterazioan lortutako zehaztasun erlatiboak hau betetzen duenean:

    $$\frac{\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty} \leq ze,$$

    edo $k = imax$ denean.

    Aukeratu sistema lineal egoki bat eta egiaztatu programa horrek ebazten duela.

16. Garatu Gauss-Seidelen iteraziorako MATLABeko M-fitxategi bat `gaussseidel.m` izenekoa. Programa horrek $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema lineala, non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hertsiki diagonal menperatzailea baita, ebazteko gai izan behar du. Programa horrek goiburu hau izan behar du:

    `function x=gaussseidel(A,b,x0,ze,imax)`,

    non `x` soluzioaren hurbilpen bat baita, `x0` hasierako hurbilpen bat eta `ze` eta `imax` eskatutako zehaztasun erlatiboa eta iterazioen kopuru maximoa baitira, hurrenez hurren. Programaren exekuzioa bukatuko da k-garren iterazioan lortutako zehaztasun erlatiboak hau betetzen duenean:

    $$\frac{\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty} \leq ze,$$

    edo $k = imax$ denean.

    Aukeratu sistema lineal egoki bat eta egiaztatu programa horrek ondo ebazten duela.

17. Izan bedi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema lineal gaindeterminatua, non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ hein betekoa den. Garatu M-fitxategi bat sistema hori ebazteko, ekuazio normalak erabiliz; programa horrek `eknormalak.m` izena izango du eta goiburu hau:

    `function [x,h]=eknormalak(A,b)`

    non `x` sistemaren soluzio bakarra baita eta `h` hondar bektorearen norma euklidearra.

    Aukeratu sistema lineal egoki bat eta egiaztatu programa horrek ondo ebazten duela.