4.5. Problemak

Eskuz ebazteko problemak:

1. $e^x - 3x = 0$ ekuazioak erro bat dauka $p \approx 0.61906129$ puntuan. Erabili bisekzio metodoaren sei iterazio, erro hori aurkitzeko, $[0, 1]$ tartetik hasiz. Zenbat iterazio behar dira erroaren hurbilpena balioztatzeko lau zifra esangarrirekin (hots, 0.6190 lortzeko)?

2. Bistakoa da $(x-0.4)(x-0.6) = x^2-x+0.24 = 0$ ekuazioak $x = 0.4$ eta $x = 0.6$ erroak dituela. Ohartu $[0, 1]$ tarteko muturrak ez direla onak bisekzioaren metodoa hasteko; zergatik? Funtzioaren marrazketa erabiliz, aurkitu erroen tarte egokiak bisekzio metodoak erro bakoitzera jotzeko. Bestalde, $[0.5, 1]$ tartetik bisekzio metodoaz bilaketa hasten badugu, zein da $|p - p_5|$ zehaztasunaren bornea bost iterazio igaro ondoren? Zein da benetako zehaztasuna, bost iterazio igaro ondoren?

3. Erabili bisekzioaren metodoa ekuazio hauen erro positibo txikiena aurkitzeko:

   (a) $e^x - x - 2 = 0$,

   (b) $x^2 - e^x = 0$,

   (c) $\sin(x) - 2\cos(x) = 0$,

   (d) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$,

   (e) $2e^{-x} - \sin x = 0$,

   (f) $3x^3 + 4x^2 - 8x - 1 = 0$.

   Kasu bakoitzean, aurkitu tarte egoki bat eta, gero, kalkulatu erroaren hurbilpena %0.5 zehaztasun erlatiboarekin. Lehen erabilitako tartearekin, kalkula ezazu *regula falsi* metodoaz erroaren hurbilpena %0.5 zehaztasun erlatiboarekin. Zein metodok du konbergentzia azkarrena?

4. Izan bedi $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$ funtzioa.

   (a) Aurkitu gutxi gorabehera zenbat iterazio behar ditugun $f(x) = 0$ ebazteko, bisekzio metodoaz, $\tau = 10^{-3}$ zehaztasunarekin, eta $a = 0$, $b = 1$ hartuz.

   (b) Bisekzio metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [0, 1]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-2}$ edo $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-2}$ betetzen baita.

   (c) Regula falsi metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [0, 1]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-2}$ edo $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-2}$ betetzen baita.

   (d) Zein metodok du konbergentzia azkarrena?

5. Izan bedi $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ funtzioa.

   (a) Aurkitu gutxi gorabehera zenbat iterazio behar ditugun $f(x) = 0$ ebazteko, bisekzio metodoaz, $\tau = 10^{-4}$ zehaztasunarekin, eta $a = 1$, $b = 2$ hartuz.

   (b) Bisekzio metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [1, 2]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-3}$ edo $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-3}$ betetzen baita.

   (c) Regula falsi metodoa erabiliz, aurkitu $f(x) = 0$ ekuazioaren $p \in [1, 2]$ erroaren lehenengo hurbilpena, non $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-3}$ edo $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-3}$ betetzen baita.

   (d) Zein metodok du konbergentzia azkarrena?

6. Zer gertatutako da bisekzio metodoa erabiltzen badugu $f(x) = 1/(x - 2)$ funtzioarekin tarte hauetan: (a) $[3, 7]$ eta (b) $[1, 7]$.

7. Emandako tarteetan, aztertu funtzio hauek puntu finko bakar bat duten ala ez:

   (a) $F(x) = 1 - x^2/4, \quad [0, 1]$.

   (b) $F(x) = 2^{-x}, \quad [0, 1]$.

   (c) $F(x) = 1/x, \quad [0.5, 5.2]$.

   Aintzat hartu 4.5. adibidea.

8. Aztertu puntu finkoko iterazioaren konbergentzia $F(x) = -4 + 4x - \dfrac{1}{2}x^2$ denean.

   (a) Ebatzi analitikoki $F(x) = x$ eta frogatu $p = 2$ eta $p = 4$ puntu finkoak direla.

   (b) Hartu $p_0 = 1.9$ eta kalkula itzazu p_1, p_2, p_3, eta balio horiei dagozkien zehaztasun absolutuak eta erlatiboak.

   (c) Hartu $p_0 = 3.8$ eta kalkula itzazu p_1, p_2, p_3, eta balio horiei dagozkien zehaztasun absolutuak eta erlatiboak.

   (d) 4.3. teorema erabiliz, zer ondoriozta daiteke?

9. Izan bedi $F(x) = x^2 + x - 4$. Orduan, $x = F(x)$ ekuazioaren erroak kalkulatzeko puntu finkoko iterazioa erabil dezakegu? Zergatik?

10. Puntu finkoaren metodoan, zergatik da abantaila $F'(p) \approx 0$ izatea?

11. Izan bedi $e^x - 3x^2 = 0$ ekuazioa; aurkitu $x = -0.5$ eta $x = 4$ puntuetatik gertuko erroak Newton-Raphson metodoaz, sei digituko zehaztasun erlatiboarekin (hots, $ze = 10^{-6}$ izanik).

12. Izan bedi $x^2 - x + 2 = 0$ ekuazioa.

(a) Zehaztu Newton-Raphsonen $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio funtzioa.

(b) Hasi $p_0 = -1.5$ puntutik eta aurkitu $p_1,\ p_2$ eta p_3.

(c) Zein da $|f(p_3)|$ errorea p_3 puntuan?

13. Izan bedi $x^2 - x - 3 = 0$ ekuazioa.

(a) Zehaztu Newton-Raphsonen $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio funtzioa.

(b) Hasi $p_0 = 1.6$ puntutik eta aurkitu $p_1,\ p_2$ eta p_3.

(c) Zein da $|f(p_3)|$ errorea p_3 puntuan?

(d) Hasi $p_0 = 0.0$ puntutik eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta p_4. Zer ondoriozta dezakegu segida horri buruz?

14. Izan bedi $(x-2)^4 = 0$ ekuazioa.

(a) Zehaztu Newton-Raphsonen formulako $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio funtzioa.

(b) Hasi $p_0 = 2.1$ puntutik eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta p_4.

(c) Zein da $|f(p_4)|$ errorea p_4 puntuan?

(d) Segida honen konbergentzia lineala da? ala koadratikoa?

15. Izan bedi $x^3 - 3x - 2 = 0$ ekuazioa.

(a) Zehaztu Newton-Raphsonen formulako $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio funtzioa.

(b) Hasi $p_0 = 2.1$ puntutik eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta p_4.

(c) Zein da $|f(p_4)|$ errorea p_4 puntuan?

(d) Segida honen konbergentzia lineala da? ala koadratikoa?

16. Izan bedi $xe^{-x} = 0$ ekuazioa.

(a) Zehaztu Newton-Raphsonen formulako $p_n = F(p_{n-1})$ iterazio funtzioa.

(b) Hasi $p_0 = 0.2$ puntutik eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta p_4. Zein da $|f(p_4)|$ errorea p_4 puntuan? Zein da $\lim_{n\to\infty} p_n$? Zein da zehaztasun absolutua p_4 puntuan?

(c) Hasi $p_0 = 20$ puntutik eta aurkitu $p_1,\ p_2,\ p_3$ eta p_4. Zein da $|f(p_4)|$ errorea p_4 puntuan? Zein da $\lim_{n\to\infty} p_n$? Zein da zehaztasun absolutua p_4 puntuan?

(d) Azaldu zer gertatzen den (b) eta (c) kasuetan.

17. Ebakitzailearen metodoa erabiliz, aurki itzazu ekuazio hauen p_2 eta p_3 hurbilpenak, emandako hastapen-puntuetatik hasiz:

(a) $x^2 - 2x - 1 = 0$, non $p_0 = 2.6$ eta $p_1 = 2.5$.

(b) $x^2 - x - 3 = 0$, non $p_0 = 1.7$ eta $p_1 = 1.67$.

(c) $x^2 - 2x - 1 = 0$, non $p_0 = -1.5$ eta $p_1 = -1.52$.

18. Erabil dezakegu Newton-Raphsonen metodoa $x^2 - 14x + 50 = 0$ ebazteko? Zergatik?

19. Erabil dezakegu Newton-Raphsonen metodoa $x^{1/3} = 0$ ebazteko? Zergatik?

20. Erabil dezakegu Newton-Raphsonen metodoa $(x-3)^{1/2} = 0$ ebazteko, $p_0 = 4$ hartuz? Zergatik?

21. Erabili Mulleren metodoa $x^3 - x - 2 = 0$ ekuazioaren erro bat hurbiltzeko. Hasi $p_0 = 1.0$, $p_1 = 1.2$ eta $p_2 = 1.4$ puntuetatik, eta kalkula itzazu p_3 eta p_4. Zein da $|f(p_4)|$ errorea p_4 puntuan?

22. Erabili Mulleren metodoa $4x^2 - e^x = 0$ ekuazioaren erro bat hurbiltzeko. Hasi $p_0 = 4.0$, $p_1 = 4.1$ eta $p_2 = 4.2$ puntuetatik, eta kalkula itzazu p_3 eta p_4. Zein da $|f(p_4)|$ errorea p_4 puntuan?

23. Izan bedi $xe^{0.5x} + 1.2x - 5 = 0$ ekuazioa. $f(x) = xe^{0.5x} + 1.2x - 5$ funtzioa marrazten badugu, $x = 1$ eta $x = 2$ artean erro bat dagoela ikusten dugu. Ekuazio hori $x = F(x)$ era desberdinetan berridatz dezakegu. Honako hiru aukera hauetatik, zein da zure aburuz egokiena? eman arrazoia funtzioak aztertuz:

    (a) $x = \dfrac{5 - xe^{0.5x}}{1.2}$;

    (b) $x = \dfrac{5}{e^{0.5x} + 1.2}$;

    (c) $x = \dfrac{5 - 1.2x}{e^{0.5x}}$.

MATLABez programatzeko problemak:

Izan bedi Newtonen algoritmoari dagokion inplementazio hau:

```
function [p,err,ze,i]=fnewton(f,df,p0,emax,zemax,imax)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Programa honek f(x)=0 ekuazio ez-lineala ebazten du.
%  Datuak:
%          f='f(x)', hots karaktereen kate bat bezala sartzen da
%          df='f'(x)', hots f-ren deribatua, karaktere kate bat bezala
%              sartuta
%          p0=erroaren hasierako hurbilpena
%          emax=errorearen tolerantzia
%          zemax=zehaztasun erlatiboaran tolerantzia
%          imax=iterazioen kopuru maximoa
%  Emaitzak:
%          p=lortutako erro hurbildua, Newton-Raphson metodoaz
%          err=p-rako errorea, hots |f(p)|
%          ze=zehaztasun erlatiboa, hots |p-p0|/|p0|
%          i=egindako iterazio kopurua
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps = makina-errorea = 2.2204e-016, begira apunteetako 3.3.5 atala.
```

```
fun=inline(f,'x');
dfun=inline(df,'x');
i=0;
fp0=fun(p0);
dfp0=dfun(p0);
err=abs(fp0);
if(abs(dfp0)<eps)
    disp('Deribatua p puntuan zero da');
    break;
end
ze=zemax+1;
while (i<=imax && ze>zemax && err>emax)
    p=p0-fp0/dfp0
    pzaharra=p0;
    p0=p;
    fp0=fun(p0);
    dfp0=dfun(p0);
    i=i+1;
    ze=abs((p0-pzaharra)/p0)
    err=abs(fp0);
end
```

24. Aurreko `fnewton.m` fitxategian zati batzuk aldatuz, egin ebakitzailearen metodoa inplementatzen duen `febakitzaile.m` fitxategi berri bat. Gidoi gisa, ikus ezazu 4.2. algoritmoaren sasikodea. Ebatzi:

    (a) $f(x) = 2^{-x} - x = 0,\ p_0 = 1.$

    (b) $f(x) = x^2 - 4x - 3.5 - \log(x) = 0,\ p_0 = 1.$

    (c) $f(x) = (x - 2.1)^2 - 7x\cos(x) = 0,\ p_0 = 1.5.$

    Konparatu emaitza horiek MATLAB-eko `fzero.m` funtzioaz lortutakoekin.

25. 4.1. algoritmoaren sasikodea adibide moduan hartuz,

    (a) Garatu beste sasikode bat puntu finkoaren metodorako, $x = F(x)$ ekuazioa ebazteko gai dena.

    (b) Inplementatu sasikode hori MATLAB-eko `fpuntufinko.m` fitxategi berri bat bezala. Laguntza gisa, `fnewton.m` fitxategia erabil daiteke.

    (c) Ebatzi $x = F(x) = 2^{-x}$ ekuazioa, $p_0 = 1$ puntutik hasiz. Zer gertatzen da? Zergatik? Konparatu emaitza hori MATLAB-eko `fzero.m` funtzioaz lortutakoarekin.

26. Garatu 4.3.5. ataleko Mulleren metodoaren sasikode bat, eta, gero, inplementatu MATLABeko M-fitxategi batean, non sartutako balioak `f,p0,p1,p2,emax,zemax,imax` baitira, eta ateratzen diren balioak `p,err,ze,i` (ikus ezazu Newtonen metodoaren inplementazioa letra horien esanahia ulertzeko). Kontuan hartu $\sqrt{b^2 - 4ac}$ zenbaki konplexua izan daitekeela, eta zein erro gorde behar dugun.

27. Erabili Mulleren metodoa $p_0 = 1.5$, $p_1 = 1.4$ eta $p_2 = 1.3$ hasierako balioak $f(x) = 1 + 2x - \tan(x)$ funtzioaren erro baten hurbilpena lortzeko, `emax`$=10^{-8}$ errorearen tolerantziarekin, `zemax`$=10^{-12}$ zehaztasun erlatiboarekin eta `imax`$=50$ iterazio kopuru maximoarekin.

28. Konparatu Newtonen, ebakitzailearen eta Mulleren metodoen konbergentzia aurreko problemaren funtziorako, Newtonen metodorako $p_0 = 1.5$ hartuz eta ebakitzailearen metodorako $p_0 = 1.5$ eta $p_1 = 1.4$. Hartu aurreko problemako balio berdinak `emax`, `zemax` eta `imax` parametroetarako.