5. gaia

Ekuazio linealen sistemen ebazpena

Bi (edo hiru) ekuazio eta bi (edo hiru) ezezagun dituen sistema bat ebaztea eskuz egin dezakegu, ordezkapenaz edo beste metodo bat erabiliz (esate baterako, Cramer-en metodoa). Sistema bat horrela ebaztea, praktikan, ezinezko bihurtzen da ekuazioen eta ezezagunen kopurua handiagoa denean.

5.1. Sistema linealen ebazpena

Notazio matrizialarekin, honela idatz daiteke ekuazio linealen sistema bat:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

Askotan, ekuazioen eta ezezagunen kopurua berdina eta handia da, n ordenako $\boldsymbol{A}$ matrize karratua ezaguna da, eta n dimentsioko $\boldsymbol{b}$ zutabe-bektorea ere bai, eta $\boldsymbol{x}$ ezezagun zutabe-bektorea n dimentsiokoa da.

Jakin badakigu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$-ren soluzioa $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ idatz daitekeela, non $\boldsymbol{A}^{-1}$ matrizea $\boldsymbol{A}$-ren alderantzizkoa baita. Hala ere, konputazio praktikako problema gehienetan, ez da beharrezkoa, ezta gomendagarri ere, $\boldsymbol{A}^{-1}$ kalkulatzea. Adibide erakusgarri moduan, ekuazio bateko eta ezezagun bateko ekuazio hau hartuko dugu:

$$7x = 21.$$

Sistema hori ebazteko modu hoberena zatiketa da:

$$x = \frac{21}{7} = 3.$$

Alderantzizko matrizea erabiltzeak honetara eramaten gaitu:

$$x = 7^{-1} \times 21 = 0.142857 \times 21 = 2.99997.$$

Alderantzizkoak aritmetika gehiago behar du (zatiketa bat eta biderketa bat, zatiketa bat bakarrik izan beharrean) eta emaitzaren zehaztasuna txikiagoa da. Antzeko zerbait gertatzen da sistema handiagoetan. Ondorioz, ekuazio-sistemen ebazpen zuzenean zentratuko gara, alderantzizkoaren kalkulua egin beharrean.

MATLABeko atzeranzko barra “\” erabiliko dugu $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ sistema ebazteko, non $\boldsymbol{A}$-ren lerroen kopurua eta $\boldsymbol{B}$-rena berdinak baitira. Orduan, sistema horren soluzioa `X=A\B` da eta horrek $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ ematen du. Alegia, *ezker zatiketa* da.

MATLABeko aurreranzko barra “/” erabiliko dugu $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$ sistema ebazteko, non $\boldsymbol{A}$-ren zutabeen kopurua eta $\boldsymbol{B}$-rena berdinak baitira. Orduan, sistema horren soluzioa `X=B/A` da eta horrek $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}$ ematen du. Alegia, *eskuin zatiketa* da.

Notazio hori erabiltzen da $\boldsymbol{A}$ karratua ez denean ere; hots, ekuazioen kopurua eta ezezagunen kopurua desberdinak izan arren. Oraingoz, matrize karratuko sistemekin arituko gara.

5.2. 3x3 adibide bat

Sistema lineal baten ebazte-algoritmo bat erakutsiko dugu. Izan bedi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ekuazio-sistema hau:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Adierazpen hori ekuazio hauen sistemari dagokio:

$$\begin{aligned} E_1 :& \quad 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ E_2 :& \quad -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4, \\ E_3 :& \quad 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6. \end{aligned}$$

Algoritmoaren lehenengo urratsak lehenengo ekuazioa erabiltzen du beste ekuazioetako x_1 ezabatzeko. Hori lortzeko, $E_2 + 0.3 \cdot E_1$ eta $E_3 - 0.5 \cdot E_1$ egiten da. E_1 ekuazioko x_1-en 10 koefizienteari *pibot* deritzogu, eta *biderkatzaile* deritze beste ekuazioetako x_1-en koefizienteak 10 pibotaz zatituz lortutako -0.3 eta 0.5 kopuruei. Lehenengo urratsak honela aldatzen ditu ekuazioak:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 2.5 \end{bmatrix}.$$

Ohartu hau betetzen dela:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

Bigarren urratsean, bigarren ekuazioa erabil dezakegu hirugarren ekuazioko x_2 ezabatzeko. Baina, bigarren pibota, bigarren ekuazioko x_2-ren koefizientea, -0.1 da, eta hori hurrengo koefizientea baino txikiagoa da. Ondorioz, azken bi ekuazioak trukatzen dira. Horri *pibotatzea* deritzogu. Adibide honetan, egia esan, hori ez da beharrezkoa, ezen ez baitago biribiltze-errorerik; baina, oro har, erabakigarria da. Beraz, pibotatu eta gero, zera dugu:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & -0.1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.1 \end{bmatrix}.$$

Orain, bigarren pibota 2.5 da eta erabil dezakegu hirugarren ekuazioko x_2 ezabatzeko. Hori lortuko dugu hirugarren ekuazioari 0.04 bider bigarrena batuz (hots, -0.04 biderkatzailea da), hau lortuz:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{bmatrix}.$$

Orain, azken ekuazioa hau da:

$$6.2x_3 = 6.2$$

eta, ondorioz, $x_3 = 1$. Balio hori bigarren ekuazioan ordezka dezakegu:

$$2.5x_2 + (5) \cdot (1) = 2.5$$

eta x_2 askatuz, $x_2 = -1$ dugu. Azkenik, lehenengo ekuazioan ordezkatzen ditugu x_2-ren eta x_3-ren balioak:

$$10x_1 + (-7) \cdot (-1) = 7$$

eta x_1 askatuz, $x_1 = 0$ dugu. Emaitza hau da:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Emaitza hau erraz egiazta daiteke jatorrizko ekuazioak erabiliz:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ohartu $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}$ betetzen dela, non

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.04 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestalde, $\boldsymbol{A}$ matrizean bigarren eta hirugarren lerroak trukatu (permutatu) ditugu; hori $\boldsymbol{P}$ *permutazio-matrize* batez aurrebiderkatuz lortzen da, alegia:

$$\boldsymbol{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Algoritmo osoa era trinko batean adieraz daiteke notazio matriziala erabiliz. Adibide honetarako hau dugu:

$$\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{PA},$$

non

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}.$$

Hau da, $\boldsymbol{L}$ matrizeak ezabatze prozesuko biderkatzaileak gordetzen ditu bateko diagonal azpian, $\boldsymbol{U}$ matrizea azken koefiziente-matrizea da, eta $\boldsymbol{P}$ matrizeak pibotatze prozesua deskribatzen du.

5.3. Permutazio- eta triangelu-matrizeak

Permutazio-matrize bat identitate-matrize bat da, lerroak eta zutabeak trukatuta dauzkana. Hain zuzen ere, 1 bakarra dauka lerro eta zutabe bakoitzean, eta zero dira beste gaiak. Adibidez,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ matrizea ezkerretik biderkatzen badugu $\boldsymbol{P}$ permutazio-matrize batez (hots, $\boldsymbol{PA}$), $\boldsymbol{A}$ matrizearen lerroak permutatzen dira. Aldiz, eskuinetik biderkatzen badugu (hots, $\boldsymbol{AP}$), orduan, $\boldsymbol{A}$ matrizearen zutabeak permutatzen ditu.

MATLABek badauka `p` permutazio-bektore bat matrize baten lerroak edo zutabeak berrordenatzeko. Goiko $\boldsymbol{P}$ matrizearen kasuan, `p` hau da:

```
p=[4  1   3  2]
```

Orduan, `P*A` eta `A(p,:)` berdinak dira. Lortutako matrizean 1. lerroa $\boldsymbol{A}$-ren 4.a izango da, 2. lerroa $\boldsymbol{A}$-ren 1.a, 3. lerroa $\boldsymbol{A}$-ren 3.a, eta 4. lerroa $\boldsymbol{A}$-ren 2.a. Halaber, `A*P` eta `A(:,p)` berdinak dira, biek $\boldsymbol{A}$-ren zutabeen permutazio berdina sortzen dute.

$\boldsymbol{Px} = \boldsymbol{b}$ ekuazio-sistemetarako soluzioa kalkulatzeko, hau bakarrik egin behar dugu:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{b},$$

zeren $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^t$ baita; hots, $\boldsymbol{P}$ *ortogonala* da.

Matrize goi-triangeluar batean, zeroak dira diagonal nagusiaren azpiko gai guztiak. *Matrize behe-triangeluar* batean, zeroak dira diagonal nagusiaren goiko gai guztiak. Adibidez, aurreko atalean, $\boldsymbol{L}$ matrizea behe-triangeluarra da eta $\boldsymbol{U}$ matrizea goi-triangeluarra.

Sistema bateko matrizea triangeluarra bada, erraz ebazten da. Izan bedi $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{b}$ sistema goi-triangeluar hau:

$$\begin{array}{rl} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n & = b_1 \\ u_{22}x_2 + \ldots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n & = b_{n-1} \\ u_{nn}x_n & = b_n. \end{array} \tag{5.1}$$

Beraz, soluzioa lortzeko, *atzeranzko ordezkatze-prozesu* honi jarraitu behar diogu (hots, behetik gora):

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Eta, honela, ondoz ondo jardunez, zera dugu:

$$x_i = \frac{b_i - u_{in}x_n - u_{i,n-1}x_{n-1} - \ldots - u_{i,i+1}x_{i+1}}{u_{ii}} = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}} \tag{5.3}$$

non $i = n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$.

Eragiketa horiek, MATLABen bitartez, honela egin ditzakegu:

```
x = zeros(n,1);
for k = n:-1:1
   x(k) = b(k)/U(k,k);
   i = (1:k-1)';
   b(i) = b(i)-x(k)*U(i,k);
end
```

Bestalde, demagun $\boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{b}$ sistema behe-triangeluar hau dugula, eta $\boldsymbol{L}$-ren diagonaleko gaiak batak direla:

$$\begin{array}{ll} x_1 & = b_1 \\ l_{21}x_1 + x_2 & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \ldots + l_{n,n-1}x_{n-1} + x_n & = b_n \end{array} \tag{5.4}$$

Soluzioa lortzeko, *aurreranzko ordezkatze-prozesu* honi jarraitu behar diogu (hots, goitik behera):

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_2 - l_{2,1}x_1. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Eta, honela, ondoz ondo jardunez, zera dugu:

$$x_i = b_i - l_{i1}x_1 - l_{i,2}x_2 - \ldots - l_{i,i-1}x_{i-1} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j \tag{5.6}$$

non $i = 2, 3, \ldots, n-1, n$.

Ariketa moduan, sortu MATLABen kode bat eragiketa horiek egiteko.

5.4. Pibotatzearen beharra

U matrizearen diagonaleko gaiei *pibotak* deritzegu. Goiko adibidean, pibotak dira 10, 2.5 eta 6.2. Biderkatzaileen kalkuluak eta atzeranzko ordezkapenak pibotekin zatitu behar dira. Ondorioz, piboten bat zero bada, ezin dugu burutu algoritmoa. Intuizioz, badakigu ez dela ideia ona kalkulua aurrera eramatea piboten bat ia zero bada. Hori erakusteko, pixka bat aldatuko dugu gure goiko adibidea:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Matrizeko $(2, 2)$ gaia aldatu egin da 2.000 izatetik 2.099 izatera, eta berdintzaren eskuineko aldea aldatu egin dugu emaitza berbera izateko moduan, $(0, -1, 1)^t$. Demagun bost zifra esangarritako koma mugikor hamartarra duen makina batean kalkulatu dugula soluzioa.

Ezabapenaren lehenengo urratsak hau ematen du:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.001 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 2.5 \end{bmatrix}.$$

Orain, $(2, 2)$ gaia nahiko txikia da matrizeko beste gaiekin konparatzen badugu. Hala ere, trukerik gabe beteko dugu ezabapena. Hurrengo urratsean, hirugarren ekuazioari $2.5 \cdot 10^3$ bider bigarrena batuko diogu, honela:

$$(5 + (2.5 \cdot 10^3) \cdot 6)x_3 = 2.5 + (2.5 \cdot 10^3) \cdot 6.001.$$

Berdintzaren eskuin aldeko gaian $6.001 \cdot 2.5 \cdot 10^3 = 1.50025 \cdot 10^4$ dugu. Emaitza $1.50025 \cdot 10^4$ da, eta hori ezin da adierazi zehatz-mehatz gure koma mugikorraren zenbaki-sistema hipotetikoan. Hura $1.5002 \cdot 10^4$ra biribildu beharko dugu. Gero, emaitza hori 2.5 zenbakiari gehituko diogu, eta biribildu berriro. Bestela esanda, honako eragiketa hauetan beltzez idatzitako 5ak galtzen dira biribiltze-erroreetan:

$$(5 + 1.5000 \cdot 10^4)x_3 = 2.\mathbf{5} + 1.5002\mathbf{5} \cdot 10^4.$$

Ondorioz, gure makina hipotetikoan, azken ekuazioa hau bihurtzen da:

$$1.5005 \cdot 10^4 x_3 = 1.5004 \cdot 10^4.$$

Beraz, honekin hasten da atzeranzko ordezkapena:

$$x_3 = \frac{1.5004 \cdot 10^4}{1.5005 \cdot 10^4} = 0.99993.$$

Emaitza zehatza $x_3 = 1$ denez, erroreak ez dirudi serioegia. Zoritxarrez, x_2 ekuazio honetatik aurkitu behar dugu:

$$-0.001x_2 + 6 \cdot (0.99993) = 6.001,$$

eta horrek hau ematen du:

$$x_2 = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{-1.0 \cdot 10^{-3}} = -1.5.$$

Azkenik, x_1 lehenengo ekuazioaz honela zehazten da:

$$10x_1 + (-7) \cdot (-1.5) = 7,$$

hau lortuz:

$$x_1 = -0.35.$$

Alegia, $(0, -1, 1)^t$ lortu beharrean $(-0.35, -1.5, 0.99993)^t$ lortu dugu.

Non dago errorea? Ez dago "biribiltze-errorearen pilaketa" sortuta milaka eragiketa aritmetiko eginez. Matrizea ez da ia singularra. Zailtasuna ezabapeneko bigarren urratsean pibot txiki bat hartzetik dator. Ondorioz, biderkatzailea $2.5 \cdot 10^3$ da, eta azken ekuazioak dauzkan koefizienteak ia 10^3 bider jatorrizko problemaren koefizienteak dira.

Ariketa moduan, aztertu zer gertatuko litzatekeen bigarren urratsean trukatuko bagenitu bigarren eta hirugarren ekuazioak.

Biderkatzaile guztiak balio absolutuan 1 edo txikiagoak badira, kalkulatutako soluzioa zuzena dela froga daiteke. Biderkatzaileen balio absolutuak 1 baino handiagoak ez izateko, *pibotatze partziala* izendatutako prozesua erabil dezakegu.

5.4.1. Pibotatze partziala

Ezabatze-prozesuan i-garren lerroan bagaude, i-garren zutabean geratzen diren gaien artean (hots, a_{ji}, non $j = i, i+1, \ldots, n$ baita) balio absolutu handieneko gaia bilatu behar da. Gai hori p-garrena bada, i-garren eta p-garren lerroak trukatuko ditugu. Alegia, hau badugu:

$$\max_{j \geq i}\{|a_{ji}|\} = |a_{pi}|,$$

i-garren eta p-garren lerroak trukatuko ditugu. Truke berdinak egiten dira berdintzaren eskuineko b bektorean. Hots, b_p eta b_i ere trukatzen dira.

5.5. *LU* faktorizazioa

Oro har, ezabatze gaussiarrak bi etapa ditu: *aurreranzko ebazpena* eta *atzeranzko ebazpena*. Aurreranzko ebazpenak $n-1$ urrats ditu, aurreko atalean ikusi dugun bezala. i-garren urratsean, i-garren ezezaguna ezabatzeko i-garren ekuazioaren multiploak kentzen dizkiegu gainerako ekuazioei. Baldin x_i-ren koefizientea "txikia" bada, gomendagarria da (5.2)-(5.3) prozesua egin baino lehen ekuazioak trukatzea. Ezabapen-urratsak berdintzaren eskuinaldeko gaiei batera aplika diezazkiekegu, edo trukeak eta biderkatzaileak gorde ditzakegu eta geroago aplikatu eskuinaldeko gaiei. Azken hori ikusiko dugu, hain zuzen ere, jarraian. Azkenik, sistemaren atzeranzko ebazpena (5.5)-(5.6) adierazpenak erabiliz lortuko dugu.

Izan bedi $\boldsymbol{P}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, ezabapenaren i-garren urratsean erabilitako permutazio-matrizea. Izan bedi $\boldsymbol{M}_i$ i-garren urratsean biderkatzaileen negatiboak diagonalaren azpian sartuz lortutako matrize behe-triangeluar unitate bat; horrelako matrizeei *ezabapen matrizeak* deritzegu. Izan bedi $\boldsymbol{U}$ ezabapenaren $n-1$ urratsak eman ondoren lortutako azken matrize goi-triangeluarra. Prozesu osoa ekuazio batez deskriba daiteke:

$$\boldsymbol{M}_{n-1}\boldsymbol{P}_{n-1}\ldots\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}. \tag{5.7}$$

Jarraian ikusiko dugu $\boldsymbol{A}$ matrizea ez-singularra bada, beti $\boldsymbol{P}$ permutazio-matrize bat aurki dezakegula $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$ idatzi ahal izateko moduan.

Jo dezagun $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matrizea eta bi permutazio-matrize, $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$, eta bi ezabapen-matrize, $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$, eraiki ditugula hau gertatzeko moduan:

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}.$$

$\boldsymbol{P}_i$ ortogonala denez, badakigu $\boldsymbol{P}_i^t\boldsymbol{P}_i = \mathbb{1}$. Kasu honetan, gainera, $\boldsymbol{P}_i$ hauek simetrikoak direnez, $\boldsymbol{P}_i^t = \boldsymbol{P}_i$ dugu. Beraz, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2 = \mathbb{1}$ dugu. Orduan, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2$ adierazpena $\boldsymbol{M}_1$ eta $\boldsymbol{P}_1$ artean sar dezakegu:

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_2\widetilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U},$$

non $\widetilde{\boldsymbol{M}}_1$ berrordenatutako ezabapen-matrize bat baita; alegia, $\boldsymbol{M}_1$, baina simetrikoki trukatutako lerroekin eta zutabeekin:

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_1 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2.$$

Adibidez, hau badugu:

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zera lortuko dugu:

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_1 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 1 & 0 \\ -m_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Horrela ere aplika diezaiokegu kasu orokorrean (5.7) adierazpenari, hots:

$$\boldsymbol{M}_{n-1}\widetilde{\boldsymbol{M}}_{n-2}\dots\widetilde{\boldsymbol{M}}_{1}\boldsymbol{P}_{n-1}\dots\boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{A}=U, \tag{5.8}$$

non

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{k}=\boldsymbol{P}_{n-1}\dots\boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{M}_{k}\boldsymbol{P}_{k+1}\dots\boldsymbol{P}_{n-1},\quad k=1,\dots,n-2. \tag{5.9}$$

Orain, (5.8) adierazpenetik hau ondoriozta dezakegu:

$$\boldsymbol{L}_{1}\boldsymbol{L}_{2}\dots\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}_{n-1}\dots\boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{A}.$$

non $\boldsymbol{L}_k=\widetilde{\boldsymbol{M}}_k^{-1}$ baita, eta hori kalkulatzen da $\boldsymbol{M}_k$-tik diagonalaren azpiko biderkatzaileen zeinuak aldatuz, eta gero permutazioak aplikatuz (5.9) berdintzak adierazten duen bezala. Beraz, hau badugu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\boldsymbol{L}_{1}\boldsymbol{L}_{2}\dots\boldsymbol{L}_{n-1}\\ \boldsymbol{P}&=\boldsymbol{P}_{n-1}\dots\boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{P}_{1},\end{aligned}$$

orduan

$$\boldsymbol{LU}=\boldsymbol{PA}.$$

Ondorioz, $\boldsymbol{L}$ ezabapenean erabilitako biderkatzaile guztiak gordetzen ditu, eta $\boldsymbol{P}$ permutazio-matrizeak lerro-truke guztiak gordetzen ditu.

Aurreko atalaren adibiderako hau dugu:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10&-7&0\\-3&2&6\\5&-1&5\end{bmatrix},$$

Hauek dira ezabapenean definitutako matrizeak:

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.3&1&0\\-0.5&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0.04&1\end{bmatrix}$$

Beraz,

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&0\\0.3&0&1\end{bmatrix}$$

Hauek dira horiei dagozkien $\boldsymbol{L}$ matrizeak:

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.5&1&0\\-0.3&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-0.04&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.5&1&0\\-0.3&-0.04&1\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{PA}$ erlazioari $\boldsymbol{A}$-ren *LU faktorizazioa* (edo *deskonposizio triangeluarra*) deritzo. Egia esan, LU faktorizazioa ezabatze gaussiarra da, notazio matrizialarekin adierazita.

Faktorizazio horrekin, ekuazio-sistema orokor baterako hau dugu:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{PAx} = \boldsymbol{Pb}$$

eta sistema triangeluarren bikote hau bihurtzen da:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{Ly} & = & \boldsymbol{Pb} \\ \boldsymbol{Ux} & = & \boldsymbol{y} \end{array} \right.$$

5.5.1. Pibotatze baztergarria

Matrize batzuetarako, ez da beharrezkoa pibotatzea.

5.1. Definizioa. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrizea* ***hertsiki diagonal menperatzailea*** *dela esango dugu, hau betetzen bada:*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.10}$$

[13] liburuan honako teorema hau frogatzen da:

5.1. teorema. $\boldsymbol{A}^t$ *diagonal menperatzailea bada,* $\boldsymbol{A}$ *matrizeak LU faktorizazio bat du eta* $|l_{ij}| \leq 1$.

Alegia, $\boldsymbol{A}^t$ diagonal menperatzailea bada, aurretiko $\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{PA}$ faktorizazioa eginez gero, $\boldsymbol{P} = \mathbb{1}$ izango da.

5.6. Matematikako problema baten baldintza

Hitz gutxitan, problema baten *baldintza* neurri bat da problemako datuen aldaketekiko soluzio zehatzaren sentikortasuna adierazteko. Ideia hori kuantifikatzeko, demagun problema hori datuen d multzo batek definitua dela. Izan bedi $s(d)$ problemaren *soluzio zehatza* d datu horietarako. d datuetan aldaketa txikiek $s(d)$-ko aldaketa txikietara eramaten badute, d datuetarako problema *ondo baldintzatua* dela esango dugu. Aldiz, d-ren aldaketa txikiek $s(d)$-ko aldaketa handietara eramaten badute, d datuetarako problema *txarto baldintzatua* dela esango dugu. Demagun d_1 eta d_2 gerta litezkeen bi datu multzo direla. Problemaren *baldintza* (edo *baldintzazko zenbakia*) honelako ratioen maximoa da, $\|d_1 - d_2\|$ txikia denean:

$$\frac{\|s(d_1) - s(d_2)\|}{\|d_1 - d_2\|}. \tag{5.11}$$

Argi izan behar dugu problema baten baldintza *propietate matematikoa* dela, eta askea dela kalkulu- eta biribiltze-errorearekiko.

Jarraian, problema baten baldintzaren erakusketa erraz bat ikusiko dugu. Izan bedi polinomio honen erroak kalkulatzeko problema:

$$(x-1)^4 = 0, \tag{5.12}$$

haren lau erroak 1 dira, hain zuzen. Demagun aldaketa txiki bat (esate baterako, 10^{-8}) egina dela (5.12) berdintzaren eskuinaldean; orain, hau da ebatzi behar dugun ekuazioa:

$$(x-1)^4 = 10^{-8}, \tag{5.13}$$

Erro zehatza $1 + 10^{-2}$ da. Beraz, zera dugu kasu honetan:

$$\frac{\|s(d_1) - s(d_2)\|}{\|d_1 - d_2\|} = \frac{|(1+10^{-2}) - 1|}{|0 - 10^{-8}|} = \frac{10^{-2}}{10^{-8}} = 10^6$$

Ikusi dugun bezala, datuen aldaketa txiki batek, 10^{-8}, soluzioaren aldaketa handi bat sortzen du, 10^{-2}, zeren hori 10^6 bider handiagoa baita datuen aldaketa baino. Alegia, ratio hori askoz handiagoa da 1 baino. Beraz, problema hori *txarto baldintzatua* da. Ohartu propietate horrek ez duela zerikusirik erabilitako kalkulu-metodoarekin.

5.7. Matrizeen normak

Matrize-norma bat, bektoreena bezala, $\|\cdot\|$ notazioaz adierazten da, eta, bektore-normak bezala, hiru propietate hauek betetzen ditu:

(i) $\|\boldsymbol{A}\| > 0, \quad \forall \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$;

(ii) $\|c\boldsymbol{A}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{A}\|, \quad c$ eskalar guztietarako;

(iii) $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$.

Matrize-norma baterako, erabilgarria da laugarren propietate hau ere, *trinkotasun* izendatua:

(iv) $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|$.

Jarraian, edozein bektore-normari elkarturiko matrize-norma definituko dugu. Intuitiboki, $\boldsymbol{A}$ matrizeak norma "handia" izan beharko luke, $\boldsymbol{Ax}$ bektorearen norma handia balitz $\boldsymbol{x}$ bektorearen normarekiko.

5.2. Definizioa. *Izan bitez* $\boldsymbol{A}$ *matrize bat eta* $\|\cdot\|$ *bektore-norma bat.* $\|\boldsymbol{A}\|$ ***eragindako matrize-norma*** *honela definitzen da:*

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{5.14}$$

$\boldsymbol{x}$-ren tamainaren menpe ez izateko, hau da $\|\boldsymbol{A}\|$-ren beste definizio baliokide bat:

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{u}\|=1} \|\boldsymbol{Au}\|.$$

$\|\boldsymbol{A}\|$-ren behe-borne bat lor dezakegu $\boldsymbol{x}$ bektore ezagun baterako $\|\boldsymbol{Ax}\|$-ren zatidura $\|\boldsymbol{x}\|$-rekin kalkulatuz, hots:

$$\|\boldsymbol{A}\| \geq \frac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{5.15}$$

Hauek dira bektoreen bat-, bi- eta infinitu-normek eragindako matrize-normak:

- $\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\limits_j \|\boldsymbol{A}_{:,j}\|_1$ (zutabe guztien 1-normetako maximoa)
- $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sigma_1(A)$ (balio singular handiena).
- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrikoa bada, $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$ (λ_i, $1 \leq i \leq n$, $\boldsymbol{A}$-ren autobalioak dira).
- $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_i \|\boldsymbol{A}_{i,:}\|_1$ (lerro guztien 1-normetako maximoa)

5.3. Definizioa. $\|\cdot\|_b$ *bektore-norma bat eta* $\|\cdot\|_m$ *matrize-norma bat* ***bateragarriak*** *direla esaten da,* $\boldsymbol{A}$ *eta* $\boldsymbol{x}$ *guztietarako hau betetzen bada:*

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_b \leq \|\boldsymbol{A}\|_m \|\boldsymbol{x}\|_b.$$

Bektore-norma bat eta berak eragindako matrize-norma beti dira bateragarriak; ikus (5.15).

Bektore-norma batek ez eragindako matrize-norma garrantzitsu bat *Frobenius*-en norma da; hori honela definitzen da $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrize baterako:

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2},$$

eta froga daiteke hau egiaztatzen duela:

$$\|\boldsymbol{A}\|_F^2 = \text{aztarna}(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}).$$

Frobeniusen norma bateragarria da bektore-norma euklidearrarekin; hots, $\boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{x}$ guztietarako,

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{x}\|_2.$$

Bektore edo matrize baterako norma desberdinen balioak oro har desberdinak izan arren, haiek zentzu batean "baliokidetzat" har daitezke. Edozein bi bektore normetarako, esate baterako $\|\cdot\|$ eta $\|\cdot\|'$, badaude c_b eta c_g konstanteak, bektorearen tamainaren menpekoak bakarrik, non $\boldsymbol{x}$ guztietarako hau betetzen baita:

$$c_b\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|' \leq c_g\|\boldsymbol{x}\|. \tag{5.16}$$

Antzeko emaitza bat egiaztatzen da bi matrize-norma batzuetarako.

Matrize-normen propietate batzuk

Edozein $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizetarako propietate hauek betetzen dira:

- $\|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \|\boldsymbol{A}\|_F \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_2$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{m}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{m}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$.

Propietate horien arabera, bat-, bi-, infinitu- eta Frobeniusen normak baliokideak dira. Beraz, matrize-norma baten balioa ezagutzen badugu, beste norma batena borna dezakegu propietate horiek erabiliz. Ondorioz, matrize baten norma estimatzeko orduan, bat- edo infinitu-norma aukera ditzakegu, zeren haietarako kalkuluak merkeagoak baitira.

$\|\boldsymbol{X}\|_p$ norma kalkulatzeko MATLABeko `norm(X,p)` funtzioa erabil daiteke, $\boldsymbol{X}$ bektore bat edo matrize bat izanik.

5.8. Sistema lineal baten baldintzazko zenbakia

Izan bedi $\boldsymbol{A}$ matrize ez-singular bat; hots, $\boldsymbol{A}^{-1}$ existitzen da eta bakarra da. Demagun sistema lineal hau:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

bere soluzio *zehatza* (eta bakarra) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ da. Demagun berdintzaren eskuinaldeko gaia $\boldsymbol{b}$ izatetik $\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$ izatera aldatzen dela (hots, $\boldsymbol{b}$ perturbatzen dugula), $\boldsymbol{A}$ berdina izanik. Izan bedi $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_b$ aldatutako problemaren soluzio zehatza, alegia:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_b) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}. \tag{5.17}$$

Atal honetan, bektore edo matrize baten aurrean "δ" izateak beren dimentsio bereko aldaketa txiki (perturbazio) bat esan nahi du; esate baterako, $\delta\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$-ren aldaketa bat da. Bestalde, $\delta\boldsymbol{x}_b$-ren b azpiindizeak esan nahi du $\boldsymbol{x}$-ren aldaketa hau $\boldsymbol{b}$-ren aldaketak eragindakoa dela.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dugunez, (5.17) erlazioak $\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}_b = \delta\boldsymbol{b}$ inplikatzen du, eta ondorioz:

$$\delta\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{b}.$$

Edozein eragindako norma erabiliz, $\|\delta\boldsymbol{x}_b\|$-ren borne bat lortuko dugu, zeren (5.15) desberdintzaz hau baitugu:

$$\|\delta\boldsymbol{x}_b\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\boldsymbol{b}\|. \tag{5.18}$$

Perturbazio erlatiboa bornatzeko, ohartu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ berdintzatik eta (5.15) -tik hau ondorioztatzen dela:

$$\|\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

eta adierazpen hori atalez atal biderkatuz (5.18) desberdintzarekin, emaitza garrantzitsu hau lortzen dugu:

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}_b\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\| \cdot \frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}. \tag{5.19}$$

Ohartu deberdintzaren eskuinaldeko kantitatea soluzio zehatzeko perturbazio erlatiboaren balio maximo posiblea dela. Kasu batzuetan, nahiz eta goi-bornea oso handia izan, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ eta $\delta\boldsymbol{b}$ berezi batzuetarako bakarrik betetzen da (5.19) adierazpeneko berdintza.

Jarraian, $\boldsymbol{A}$ matrizea aldatuko dugu pixka bat (hots, perturbatuko dugu) eta $\boldsymbol{b}$ finko eutsiko dugu; orduan, hau dugu:

$$(\boldsymbol{A} + \delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_A) = \boldsymbol{b}, \tag{5.20}$$

non $\delta\boldsymbol{x}_A$-ren A azpiindizeak esan nahi baitu $\boldsymbol{x}$-ren aldaketa $\boldsymbol{A}$-ren aldaketak eragindakoa dela. Demagun $\|\delta\boldsymbol{A}\|$ nahiko txikia dela $\boldsymbol{A} + \delta\boldsymbol{A}$ ez-singularra gordetzeko moduan. Orduan, (5.20) -en eragiketak eginez,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{x}_A) + \delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_A) = b \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\delta\boldsymbol{x}_A) = -\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_A)$$

eta hortik, $\boldsymbol{A}$ ez-singularra denez, zera ondorioztatzen da:

$$\delta\boldsymbol{x}_A = -\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_A).$$

Orain, (5.15) erabiliz, honako hau ateratzen da:

$$\|\delta \boldsymbol{x}_A\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}_A)\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\delta \boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}_A\|$$

eta hortik:

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{x}_A\|}{\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}_A\|} \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\delta \boldsymbol{A}\|,$$

eta, azkenik, aldaketa erlatiboaren bornapen hau lortzen da soluzio zehatzean:

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{x}_A\|}{\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}_A\|} \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\| \cdot \frac{\|\delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}, \tag{5.21}$$

eta berdintza gertatzen da $\delta\boldsymbol{A}$-ren eta $\boldsymbol{b}$-ren balio berezi batzuetarako.

Ikus dezakegunez, $\|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ kantitatea agertzen da (5.19) eta (5.21) bornapenetan, eta horrek erakusten du sistema lineal bateko datuen aldaketa batek eragindako aldaketa maximo posiblea soluzio zehatzaren gainean. Gogoan (5.11) izanik, $\boldsymbol{A}$ matrize ez-singular baten *baldintzazko zenbakia* (edo *baldintza* bakarrik) honela definitzen dugu ($\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren ebazpenarekiko):

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|. \tag{5.22}$$

Edozein eragindako normatarako, identitate-matrizearen norma 1 da. Izan ere, $\mathbb{1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$ eta $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$, orduan $\kappa(\boldsymbol{A}) \geq 1$. Beraz, matrize *ondo baldintzatu* baten baldintzazko zenbakia unitatearen ordenakoa da, eta matrize *txarto baldintzatu* baten baldintzazko zenbakia unitatea baino askoz handiagoa da. Nahiz eta $\kappa(\boldsymbol{A})$ balioa aldatu bere kalkuluan erabilitako normaren arabera, balio horiek konparagarriak dira normen baliokidetasunagatik.

Bestalde, sistema linealaren datuen perturbazio baterako soluzio zehatzaren aldaketa erlatiboa ezagutzen badugu, baldintzazko zenbakiaren *behe-borne* bat lor dezakegu. Berrordenatuz (5.19) eta (5.21) desberdintzak eta (5.22) kontuan hartuz, hau lortzen da:

$$\kappa(\boldsymbol{A}) \geq \frac{\|\delta \boldsymbol{x}_b\|/\|\boldsymbol{x}\|}{\|\delta \boldsymbol{b}\|/\|\boldsymbol{b}\|} \quad \text{eta} \quad \kappa(\boldsymbol{A}) \geq \frac{\|\delta \boldsymbol{x}_A\|/(\|\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}_A\|)}{\|\delta \boldsymbol{A}\|/\|\boldsymbol{A}\|} \tag{5.23}$$

5.1. adibidea. *Izan bedi sistema lineal hau:*

$$\begin{aligned} 0.550x_1 + 0.423x_2 &= 0.127 \\ 0.484x_1 + 0.372x_2 &= 0.112. \end{aligned}$$

Sistema horretarako, hau dugu:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad \textit{non} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.423 \\ 0.484 & 0.372 \end{bmatrix} \quad \textit{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.127 \\ 0.112 \end{bmatrix}.$$

Ikusiko dugu sistema horren $\boldsymbol{A}$ *matrizea txarto baldintzatua dela.*

Ebazpena. Jo dezagun $\boldsymbol{b}$ bektorea honela perturbatzen dugula:

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.127 \\ 0.112 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00007 \\ 0.00028 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12707 \\ 0.11228 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistemaren soluzio zehatza $\boldsymbol{x} = (1, -1)^t$ da, baina $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$ sistemaren soluzio zehatza $\boldsymbol{x} = (1.7, -1.91)^t$ da, hots $\delta \boldsymbol{x}_b = (0.7, -0.91)^t$. Infinitu-norma erabiltzen badugu, $\boldsymbol{b}$-ren eta $\boldsymbol{x}$-ren perturbazio erlatiboak kalkulatzeko, zera dugu:

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{0.00028}{0.127} \approx 2.2 \cdot 10^{-3} \quad \text{eta} \quad \frac{\|\delta \boldsymbol{x}_b\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0.91.$$

Beraz, $\delta \boldsymbol{b}$ horretarako, soluzioan egon den aldaketa erlatiboa 400 bider baino gehiago izan da; horrek erakusten du $\boldsymbol{A}$-ren baldintzazko zenbakia gutxienez 400 dela; hots, $\kappa(\boldsymbol{A}) \geq 400$, ikus (5.23) .

$\boldsymbol{A}$-ren baldintzapen txarra ikus dezakegu a_{21} gaia pixka bat aldatuz ere (0.001 kantitatean), hau izanik:

$$\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.423 \\ 0.483 & 0.372 \end{bmatrix}.$$

Orain, $(\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$ sistemaren soluzio zehatza $\widehat{\boldsymbol{x}} = (-0.4536, 0.8900)^t$, zeinak $\|\delta \boldsymbol{x}_A\| = \|\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| = 1.89$ ematen baitu. Kasu honetan, soluzio zehatzaren aldaketa erlatiboa 1890 bider $\boldsymbol{A}$-ren aldaketa erlatiboa da; hots, $\kappa(\boldsymbol{A}) \geq 1890$, ikus (5.23) .

Benetan, $\boldsymbol{A}$-ren alderantzizko zehatza (5 digitutara biribildua) hau da:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2818.2 & 3204.5 \\ 3666.7 & -4166.7 \end{bmatrix},$$

eta (infinitu-norma erabiliz) $\|\boldsymbol{A}\| = 0.973$ eta $\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = 7833.4$ dugunez, hau da baldintzazko zenbakia:

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = 7833.4 \cdot 0.973 \approx 7622.$$

Beraz, benetako baldintzazko zenbakia askoz handiagoa da $\delta \boldsymbol{b}$-ren eta $\delta \boldsymbol{A}$-ren bitartez aurkitutako 400 eta 1890, hurrenez hurren, $\kappa(\boldsymbol{A})$-ren behe-borneak baino.

$\boldsymbol{A}$ matrize bat txarto baldintzatua da tamaina bereko bektore desberdinei aplikatuz gero, biderkadura-bektoreen tamainak oso desberdinak direnean. Alegia, $\boldsymbol{x}$ bektore unitario baterako $\|\boldsymbol{Ax}\|$ handia bada eta beste bektore unitario baterako txikia bada, orduan, $\boldsymbol{A}$ txarto baldintzatua da. Baina, $\|\boldsymbol{Ax}\|/\|\boldsymbol{x}\|$ handia bada $\boldsymbol{x}$ guztietarako (esate baterako, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(10^8, 10^8)$ kasuan), orduan, $\boldsymbol{A}$ ez da txarto baldintzatua. Aldiz, jo ditzagun matrize eta bektore hauek:

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 10^4 & \\ & 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

non $\|\boldsymbol{x}\| = \|\widehat{\boldsymbol{x}}\| = 1$. Orduan, hau dugu:

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-4} \end{bmatrix},$$

zera gertatuz: $\|\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}\| = 10^4$ (handia) eta $\|\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}}\| = 10^{-4}$ (txikia). Alegia, $\widehat{\boldsymbol{A}}$ matrizeak txarto baldintzatua izan behar du. Egia esan, erraza da ikustea aldaketa handienak $\boldsymbol{x}$ eta $\widehat{\boldsymbol{x}}$ bektore horietarako lortzen dituela, eta $\kappa(\boldsymbol{A}) = 10^8$ dela.

$\boldsymbol{A}$-ren baldintza eta bere singulartasuna oso kontzeptu erlazionatuak dira. Informalki, txarto baldintzatutako matrize bat "ia singularra" da. Baina, nahiz eta matrize singular baten determinantea zero izan, determinantea ia zero duen matrize baten baldintza ez da nahitaez txarra izan behar. Adibidez, $n \times n$ dimentsioko $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(10^{-10})$ matrizearen determinantea 10^{-10n} da, baina bere baldintza perfektua da, $\kappa(\boldsymbol{A}) = 1$ da.

Bestalde, matrize singular batek, gutxienez, autobalio nulu bat dauka. Gainera, $\boldsymbol{A}$ simetrikoa denean, bere baldintzazko zenbakia da autobalio handienak txikienarekiko duen zatidura; alegia:

$$\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \frac{\max_{1\le i\le n} |\lambda_i|}{\min_{1\le i\le n} |\lambda_i|}.$$

Ondorioz, matrize simetriko txarto baldintzatu batek tamaina txikiko autobalio bat izan behar du bere normarekiko (izan ere, $\|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$). Oro har, irizpide hori ez da zuzena matrizea simetrikoa ez denean.

$\boldsymbol{P}$ permutazio-matrizea bada, $\boldsymbol{Px}$-ren osagaiak $\boldsymbol{x}$-ren osagaien berrantolaketa direnez, $\|\boldsymbol{Px}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ betetzen da $\boldsymbol{x}$ guztietarako, eta beraz:

$$\kappa(\boldsymbol{P}) = 1.$$

$\boldsymbol{A}$ matrizea $c \neq 0$ eskalar batez biderkatzen badugu, $\|c\boldsymbol{A}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$ eta $\|(c\boldsymbol{A})^{-1}\| = |1/c| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ dira eta, ondorioz:

$$\kappa(c\boldsymbol{A}) = \|(c\boldsymbol{A})^{-1}\| \cdot \|c\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\| = \kappa(\boldsymbol{A}).$$

$\boldsymbol{D}$ matrize diagonala bada, orduan:

$$\kappa(\boldsymbol{D}) = \frac{\max |d_{ii}|}{\min |d_{ii}|}.$$

MATLABek badauzka funtzio batzuk baldintzazko zenbakia kalkulatzeko:

- $\kappa_2(\boldsymbol{A})$ (bi-norma erabiliz) kalkulatzen du `cond(A)` edo `cond(A,2)` funtzioez. Balio singularren kalkuluan erabiltzen du `svd(A)` funtzioa.
- $\kappa_1(\boldsymbol{A})$ (bat-norma erabiliz) kalkulatzen du `cond(A,1)` funtzioaz. Horrek `inv(A)` funtzioa erabiltzen du. Kalkuluak eragiketa gutxiago behar ditu `cond(A,2)` baino.
- $\kappa_\infty(\boldsymbol{A})$ (infinitu-norma erabiliz) kalkulatzen du `cond(A,inf)` funtzioaz. Horrek `inv(A)` funtzioa erabiltzen du eta `cond(A,1)`-en lan berdina behar du.

5.9. Cholesky-ren faktorizazioa

5.2. teorema. *Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize simetriko bat. Orduan, $\boldsymbol{A}$-k n autobalio errealak ditu, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, eta horiei elkartutako $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ autobektore unitarioek $\mathbb{R}^n$-rako oinarri ortonormal bat osatzen dute (hots, $\boldsymbol{v}_i^t \boldsymbol{v}_j = 1$, $i = j$ bada, eta $\boldsymbol{v}_i^t \boldsymbol{v}_j = 0$, $i \neq j$ bada).*

5.3. teorema. *Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize simetriko bat. Orduan, $\boldsymbol{A}$ definitu positiboa ($\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0 \;\; \forall\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) da, baldin eta soilik baldin autobalio guztiak positiboak badira.*

Frogantza. Izan bitez $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autobalioak eta horiei dagozkien $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ autobektore ortonormalak. Demagun j baterako $\lambda_j \leq 0$. Orduan:

$$\boldsymbol{v}_j^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j^t(\lambda_j \boldsymbol{v}_j) = \lambda_j \boldsymbol{v}_j^t \boldsymbol{v}_j = \lambda_j \leq 0,$$

horrek erakusten du $\boldsymbol{A}$ ez dela definitu positiboa. Beraz, $\boldsymbol{A}$ definitu positiboa bada, autobalio guztiak positiboak dira.

Orain, demagun $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Orduan, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ $\mathbb{R}^n$-rako oinarri bat osatzen dutenez, hau betetzen da edozein $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ bektore ez-nulu baterako:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

eta α_j bat gutxienez ez da zero. Orduan, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ oinarria ortonormala izateagatik, hau dugu:

$$\boldsymbol{v}^t A\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\alpha_i \boldsymbol{v}_i)^t (\lambda_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j) == \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_i \alpha_j \boldsymbol{v}_i^t \boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^2 > 0.$$

Beraz, $\boldsymbol{A}$ definitu positiboa da. $\square$

5.4. teorema (Gerschgorin).

Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize simetriko bat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autobalioekin. Orduan, hau dugu:

$$\min_{1\leq i\leq n} \lambda_i \;\; \geq \min_{1\leq i\leq n} \left\{ a_{ii} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

$$\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i \;\; \leq \max_{1\leq i\leq n} \left\{ a_{ii} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

5.1. korolarioa. *$\boldsymbol{A}$ matrizea definitu positiboa da, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako hau betetzen bada:*

$$a_{ii} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0.$$

Frogantza. (Ohartu $\boldsymbol{A}$ hertsiki diagonal menperatzailea dela). Gerschgorin-en teoremaren lehenengo desberdintzagatik, autobalio txikiena zero baino handiagoa denez, $\boldsymbol{A}$ definitu positiboa da. □

$\boldsymbol{A}$ simetrikoa bada, bere autobalio txikienaren hurbilpen gisa balio hau hartu ohi da:

$$d = \min_{1\le i\le n}\left\{a_{ii} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right\}.$$

$\boldsymbol{A}$ matrizea simetrikoa eta definitu positiboa bada, diagonaleko gai guztiak positiboak dira, eta matrizearen tamaina handieneko gaia diagonalean dago.

5.5. teorema (Choleskyren faktorizazioa). *$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizea simetrikoa eta definitu positiboa bada, $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize goi-triangeluar bakar bat existitzen da diagonaleko gai positiboekin eta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$ betetzen duena.*

Frogantza. $\boldsymbol{L}$ unitate matrize behe-triangeluar bakar bat eta $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ matrize diagonal bakar bat daude $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDL}^t$ betetzen dutenak (ikus [13]). d_k gaiak positiboak direnez, $\boldsymbol{R}^t = \boldsymbol{L}\operatorname{diag}(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})$ matrizea erreala eta behe-triangeluarra da gai diagonal positiboekin. Gainera, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$ betetzen du. Bakartasuna $\boldsymbol{LDL}^t$ faktorizazioaren bakartasunak inplikatzen du. □

$\boldsymbol{A}$ simetrikoa ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^t$) eta definitu positiboa denean, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$ faktorizazioa (edo deskonposizioa) kalkula dezakegu, non $\boldsymbol{R}$ matrize goi-triangeluar bat baita, hots:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & & \\ r_{12} & r_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{1n} & r_{2n} & \ldots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Hori dela eta, zera dugu:

- $\boldsymbol{A}$-ren a_{11} gaitik 1. lerroari jarraituz, ekuazio hauek ditugu:

$$\begin{aligned} r_{11}^2 &= a_{11} \\ r_{11}r_{12} &= a_{12} \\ &\vdots \\ r_{11}r_{1n} &= a_{1n} \end{aligned}$$

- $\boldsymbol{A}$-ren a_{22} gaitik 2. lerroari jarraituz, ekuazio hauek ditugu:

$$\begin{aligned} r_{12}^2 + r_{22}^2 &= a_{22} \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} &= a_{23} \\ &\vdots \\ r_{12}r_{1n} + r_{22}r_{2n} &= a_{2n} \end{aligned}$$

- Horrela jarraituz, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, $\boldsymbol{A}$-ren a_{ii} gaitik i. lerrorako ekuazio hauek ditugu:

$$\begin{aligned} r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + \ldots + r_{ii}^2 &= a_{ii} \\ r_{1i}r_{1,i+1} + r_{2i}r_{2,i+1} + \ldots + r_{ii}r_{i,i+1} &= a_{i,i+1} \\ &\vdots \\ r_{1i}r_{1n} + r_{2i}r_{2n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + r_{ii}r_{in} &= a_{in} \end{aligned}$$

- Ondorioz, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, $\boldsymbol{R}$-ren koefizienteak honela kalkula ditzakegu:

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.24}$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}r_{kj}}{r_{ii}}, \qquad j = i+1, \ldots, n, \tag{5.25}$$

5.2. adibidea. *Kalkula ezazu matrize simetriko eta definitu positibo honen Choleskyren faktorizazioa:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}.$$

Ebazpena. Lehenengo lerrorako $(i = 1)$ (5.24) erabiliz, zera dugu:

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.44949.$$

Orduan, (5.25) erabiliz koefiziente hauek lortzeko:

$$r_{12} = \frac{a_{12}}{r_{11}} = \frac{15}{2.44949} = 6.123724$$

$$r_{13} = \frac{a_{13}}{r_{11}} = \frac{55}{2.44949} = 22.45366$$

Hurrengo lerrorako $(i = 2)$, zera dugu:

$$r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{55 - (6.123724)^2} = 4.1833$$

$$r_{23} = \frac{a_{23} - r_{12}r_{13}}{r_{22}} = \frac{225 - 6.123724 \cdot 22.45366}{4.1833} = 20.9165$$

Hirugarren lerrorako $(i = 3)$, hau lortuko dugu:

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{979 - (22.45366)^2 - (20.9165)^2} = 6.110101.$$

Ondorioz, Choleskyren faktorizazioak zera ematen du:

$$\begin{bmatrix} 2.44949 & 6.123724 & 22.45366 \\ & 4.1833 & 20.9165 \\ & & 6.110101 \end{bmatrix}.$$

Faktorizazio horren baliotasuna ontzat emango dugu, $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$ berdintza betetzen dela egiaztatuz. □

$\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$ faktorizazio hori lortu ondoren, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema ebatz dezakegu LU faktorizazioarekin egiten den bezala; alegia, sistema triangeluar hauek ebatziz:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Rx} &= \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ matrize simetriko bat definitu positiboa bada, ez da beharrezkoa lerroen trukaketa; aldiz, LU metodoak pibotaze partziala behar du zenbakizko egonkorra izateko. Choleskyren metodoan nahiz eta $\boldsymbol{A}$ txarto baldintzatua izan, ez dugu pibotaziorik egin behar, zeren $i = 1, \ldots, n$ guztietarako hau betetzen baita:

$$r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + \ldots + r_{ii}^2 = a_{ii} \tag{5.26}$$

eta, ondorioz, $\boldsymbol{R}$-ko gai guztiak honela bornatuta daude:

$$|r_{ji}| \leq \sqrt{a_{ii}}, \quad j = 1, \ldots, i$$

Metodo hau oso erabilia da optimizazioan, bere zenbakizko egonkortasunagatik. MATLABen `chol(A)` funtzioak $\boldsymbol{A}$ matrizearen Choleskyren faktorea ematen digu.

5.6. teorema. *Izan bedi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize simetrikoa eta definitu positiboa eta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$ bere Choleskyren deskonposizioa. Orduan:*

$$\kappa_2(\boldsymbol{A}) \geq \frac{\max\limits_i r_{ii}^2}{\min\limits_i r_{ii}^2}$$

Gainera, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDL}^t$ Choleskyren deskonposizioa erabiltzen badugu, $\boldsymbol{L}$ unitate matrize behe-triangeluarra eta $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_i)$ matrize diagonala izanik, hau betetzen da:

$$\kappa_2(\boldsymbol{A}) \geq \frac{\max\limits_i d_i}{\min\limits_i d_i}$$

Alegia, $\boldsymbol{D}$-ren gai diagonal maximoaren eta minimoaren zatidurak $\boldsymbol{A}$ matrizearen baldintzaren behe-borne bat ematen digu eta, bide batez, hurbilpen bat.

Frogantza:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{u}\|_2=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_2 \geq \max_i \|A\boldsymbol{e}_i\|_2 = \max_i \sqrt{a_{1i}^2 + \ldots + a_{ni}^2} \geq \max_i a_{ii} \geq \max_i r_{ii}^2$$

azken desberdintza (5.26) desberdintzaren ondorioa da.

Izan bedi $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, orduan $B = (\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R})^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{R}^t)^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{R}^{-1})^t$. Beraz,

$$\|\boldsymbol{B}\|_2 \geq \max_i b_{ii} \geq \max_i \frac{1}{r_{ii}^2} = \frac{1}{\min_i r_{ii}^2}$$

Ondorioz,

$$\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{B}\|_2 \geq \frac{\max_i r_{ii}^2}{\min_i r_{ii}^2}.$$

Bestalde, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^t = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$ denez, $d_i = r_{ii}^2$ eta horrek frogantza hau bukatzen du. $\square$

5.10. Metodo iteratiboak

LU eta Choleskyren faktorizazioa *metodo zuzenak* dira; izan ere, ez balira egongo biribiltze-erroreak, ikusi dugun bezala, urratsen kopuru finitu batean soluzio zehatzera helduko lirateke. Baina, sistemaren matrizea eskasa bada (hots, gaien portzentaje handi bat zeroak direnean), Gaussen metodoak zeroak hondatzen ditu (hots, ez-zero bihurtzen ditu). Edonola ere, matrizearen egitura hau eskasa denean badaude estrategia egokiak esplotatzeko; ikus [8, 11]. MATLABeko `nnz(A)` funtzioak $\boldsymbol{A}$ matrizean zero ez direnen gaien kopurua zenbatzen du.

Metodo iteratiboak egokiak dira matrizearen egitura aprobetxatuz eragiketa gutxiago egiteko eta ordenagailuaren memoria gutxiago erabiltzeko, eta hori oso interesgarria da sistema oso handia denean, deribatu partzialetako ekuazioen sistemetan bezala.

5.10.1. Jacobi-ren iterazioa

5.3. adibidea. *Ebatzi sistema hau:*

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15. \end{aligned}$$

Ebazpena. Ekuazio horiek honela idatz ditzakegu:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7+y-z}{4} \\ y &= \frac{21+4x+z}{8} \\ z &= \frac{15+2x-y}{5} \end{aligned}$$

eta, hortik, prozesu iteratibo hau ateratzen dugu:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{7+y^{(k)}-z^{(k)}}{4} \\ y^{(k+1)} &= \frac{21+4x^{(k)}+z^{(k)}}{8} \\ z^{(k+1)} &= \frac{15+2x^{(k)}-y^{(k)}}{5}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.0
2	1.84375	3.875	3.025
3	1.9625	3.925	2.9625
4	1.99062500	3.97656250	3.00000000
5	1.99414063	3.99531250	3.00093750
...	...	...	...
15	1.99999993	3.99999985	2.99999993
...	...	...	...
19	2.00000000	4.00000000	3.00000000

5.1. taula. Jacobiren iterazioaren konbergentzia 5.3. adibidean.

Hasierako puntua $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})^t = (1, 2, 2)^t$ bada, ikusiko dugu iterazio horrek $(2, 4, 3)^t$ soluziora jotzen duela.

$x^{(0)} = 1$, $y^{(0)} = 2$ eta $z^{(0)} = 2$ ordezkatuz (5.27) eskuineko ataletan, hau lortzen dugu:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{7+2-2}{4} = 1.75 \\ y^{(1)} &= \frac{21+4\cdot 1+2}{8} = 3.375 \\ z^{(1)} &= \frac{15+2\cdot 1-2}{5} = 3.00. \end{aligned}$$

Prozesu hori jarraituz, 5.1. taula lortzen da. Taula horrek adierazten du (5.27) iterazioak $(2,4,3)^t$ soluziora jotzen duela. $\square$

Prozesu horri *Jacobiren iterazioaren metodoa* deritzogu.

Izan bedi $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ sistema eta $\boldsymbol{A}$ matrizearen deskonposizio hau:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U},$$

non

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{D} &= \operatorname{diag}(a_{11},\dots,a_{nn}) \qquad (5.28) \\
\boldsymbol{U} &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & a_{n-2,n} \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Orduan:

$$\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

eta ondorioz,

$$\boldsymbol{Dx}=\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}.$$

Hortaz, honela idatz dezakegu Jacobiren k-garren iterazioa:

$$\boldsymbol{Dx}^{(k+1)}=\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)}. \qquad (5.29)$$

Beraz, matrizeak ez dira aldatzen eta, eskasak badira, eragiketa gutxi egin behar ditugu. Orain, (5.29) iterazioa garatuz x_i bakoitzeko, $i=1,\dots,n$ guztietarako, zera dugu:

$$a_{ii}x_i^{(k+1)}=\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Azkenik, $i=1,\dots,n$ guztietarako, hau egingo da Jacobiren iterazioan:

$$x_i^{(k+1)}=\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/a_{ii} \qquad (5.30)$$

5.11. Gauss-Seidel-en iterazioa

Jacobiren metodoaren konbergentzia azeleratzeko asmoz, beste metodo hau dugu. Aurreko 5.3. adibideko $\{x^{(k)}\}$, $\{y^{(k)}\}$, $\{z^{(k)}\}$ segidek 2-ra, 4-ra eta 3-ra jotzen dute, hurrenez hurren. Izan ere, $x^{(k+1)}$ seguraski $x^{(k)}$ baino bere limitearen hurbilpen hobea denez, arrazoizkoa izango litzateke $y^{(k+1)}$ kalkulatzeko $x^{(k)}$-ren ordez $x^{(k+1)}$ erabiltzea. Hortaz, hobe izango litzateke $z^{(k+1)}$ kalkuluan $y^{(k)}$-ren ordez $y^{(k+1)}$ erabiltzea ere. Hori kontuan hartuz, honela geratzen da iterazioa:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{7+y^{(k)}-z^{(k)}}{4} \\ y^{(k+1)} &= \frac{21+4x^{(k+1)}+z^{(k)}}{8} \\ z^{(k+1)} &= \frac{15+2x^{(k+1)}-y^{(k+1)}}{5}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Metodo horri *Gauss-Seidelen iterazioaren metodoa* deritzogu. Eta aldaketa horiek (5.30) ekuazioari eramanez, hau lortzen dugu $i = 1, \ldots, n$ guztietarako:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii} \tag{5.32}$$

Era matrizialean adierazita, honela da:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} \tag{5.33}$$

edo $(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}$.

Orain 5.3. adibidearen sistema ebatziko dugu Gauss-Seidelen metodoa erabiliz (hots, (5.31)); orduan, $y^{(0)} = 2$ eta $z^{(0)} = 2$ ordezkatuz, hau dugu:

$$x^{(1)} = \frac{7+2-2}{4} = 1.75$$

eta $x^{(1)} = 1.75$ eta $z^{(0)} = 2$ ordezkatuz, zera lortzen da:

$$y^{(1)} = \frac{21+4\cdot 1.75+2}{8} = 3.75.$$

Azkenik, $x^{(1)} = 1.75$ eta $y^{(1)} = 3.75$ ordezkatuz, hau lortzen dugu:

$$z^{(1)} = \frac{15+2\cdot 1.75-3.75}{5} = 2.95.$$

Emaitza hau aurrekoa baino hurbilago dago benetako soluziotik, $(x, y, z)^t = (2, 4, 3)^t$.

Prozesu horri jarraituz, 5.2. taula lortzen da.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.75	2.95
2	1.95	3.96875	2.98625
3	1.995625	3.999609375	2.99903125
...	...	...	...
8	1.99999983	3.99999988	2.99999996
9	1.99999998	3.99999999	3.00000000
10	2.00000000	4.00000000	3.00000000

5.2. taula. Gauss-Seidelen iterazioaren konbergentzia 5.3. adibidean.

Konbergentziarako baldintza

Izan bedi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema. Aurreko metodo iteratiboak konbergenteak izateko, nahikoa da (5.10) baldintza (hertsiki diagonal menperatzailea) betetzea (ikus [13]). Baina, metodo iteratiboak erabiltzen direnean, baldintza hori ez da beharrezkoa konbergentziarako. Hots, (5.10) bete ez izan arren, konbergenteak izan daitezke.

5.12. QR faktorizazioa

5.12.1. Householder-en islapenak

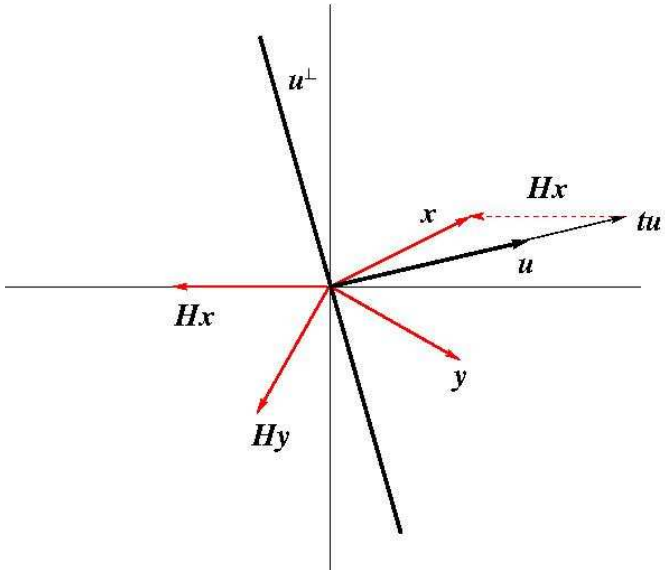
Householderen islapenak matrize-transformazioak dira, eta zenbakizko algoritmo moldagarri eta eraginkorrenetariko batzuen oinarria dira. Oso teknika ezaguna da matrize ortogonalen segida bat eraikitzeko, $\boldsymbol{A}$ matrize baten diagonalaren pean dauden gaiak zero bihurtzeko moduan. Beraz, $\boldsymbol{A}$ karratua bada, Householderen transformazioen bidez, matrize triangeluar bat ere lor dezakegu.

5.4. Definizioa. *Edozein $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ bektore bati dagokion **Householder-en islapena** (edo **Householder-en transformazioa** edo **Householder-en matrizea**) itxura honetako matrizea da:*

$$\boldsymbol{H} = \mathbb{1} - \rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^t, \quad non \quad \rho = \frac{2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}, \tag{5.34}$$

*non $\boldsymbol{u}$ bektoreari **Householder-en bektorea** baiteritzogu.*

$\boldsymbol{H}$ matrizeak simetrikoak ($\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^t$) eta ortogonalak ($\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{H}^t$) dira (egiaztatu). Ohartu $\boldsymbol{H}$ matrizea $\boldsymbol{u}$ bektorearen menpe bakarrik dagoela.



5.1. irudia. Householderen islapena.

Praktikan, $\boldsymbol{H}$ ez da inoiz eratzen. Izan ere, $\boldsymbol{H}$-ren aplikazioa $\boldsymbol{x}$ bektore baten gainean egiten dugunean, hau dugu:

$$\boldsymbol{Hx} = (\mathbb{1} - \rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^t)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \rho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x})$$

eta, ondorioz, honela kalkulatzen da $\boldsymbol{Hx}$:

$$\begin{aligned} t &= \rho \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Hx} &= \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Geometrikoki, $\boldsymbol{x}$ bektorea $\boldsymbol{u}$ gainean proiektatzen da eta, gero, $\boldsymbol{x}$-tik bi bider proiekzio hori kentzen da, zeren:

$$t\boldsymbol{u} = \rho(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = 2\left(\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{u}\|_2}\right)\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2}.$$

5.1. irudiak erakusten ditu $\boldsymbol{u}$ bektore bat eta bere azpiespazio ortogonala (irudian, lerrozuzen bat): $\boldsymbol{u}^{\perp}$. Hark $\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$ eta beren irudiak, $\boldsymbol{Hx}$ eta $\boldsymbol{Hy}$, erakusten ditu. $\boldsymbol{H}$ matrizeak edozein bektore bere islapen bihurtzen du $\boldsymbol{u}^{\perp}$ lerroarekiko. Edozein $\boldsymbol{x}$ bektoretarako, bektore honek ematen digu $\boldsymbol{x}$-ren eta $\boldsymbol{Hx}$-ren arteko erdigunea:

$$\boldsymbol{x} - (t/2)\boldsymbol{u}$$

eta $\boldsymbol{u}^{\perp}$ lerroan (azpiespazioan) dago. Espazioak bi dimentsio baino gehiago dituenean, azpiespazio hori $\boldsymbol{u}$ bektorearekiko plano perpendikularra (edo hiperplano ortogonala) izango da.

Irudiak erakusten du, baita ere, zer gertatzen den $\boldsymbol{u}$ bektoreak $\boldsymbol{x}$-k eta ardatz batek osatutako angelua erdibitzen duenean. Orduan, $\boldsymbol{Hx}$ ardatz horren gainean dago. Alegia, $\boldsymbol{Hx}$-ren osagai guztiak zero dira, bat izan ezik. Gainera, $\boldsymbol{H}$ ortogonala denez, bektorearen luzera gordetzen du, zeren:

$$\|\boldsymbol{Hx}\|_2^2 = (\boldsymbol{Hx})^t(\boldsymbol{Hx}) = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{H}^t\boldsymbol{Hx} = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{Hx}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2. \tag{5.36}$$

Ondorioz, $\boldsymbol{Hx}$ bektorearen zero ez den osagai bakarraren balioa $\pm\|\boldsymbol{x}\|_2$ da.

Orduan, $\boldsymbol{x}$ bektore baterako $\boldsymbol{Hx}$-ren k-garren osagaia izan ezik beste guztiak zero bihurtzeko, $\boldsymbol{x}$ bektorearen luzera gordez, honelako $\boldsymbol{H}$ Householderen matrizea eraiki behar dugu:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \pm\|\boldsymbol{x}\|_2, && (5.37)\\
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{x} + \sigma\boldsymbol{e}_k, && (5.38)\\
\rho &= 2/\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = 1/(\sigma u_k), && (5.39)\\
\boldsymbol{H} &= \mathbb{1} - \rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^t. && (5.40)
\end{aligned}$$

non $\boldsymbol{e}_k$ oinarri kanonikoaren k-garren bektorea baita. Biribiltze-errorearen aurrean eta (5.38) berdintza kontuan hartuz, hobe da σ-ren zeinua x_k-renaren berdina hartzea; hau da, $\sigma = \text{zeinu}(\boldsymbol{x}_k)\|\boldsymbol{x}\|_2$.

(5.39) berdintzan, ohartu hau betetzen dela:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}\|_2^2 &= \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{e}_k)^t(\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{e}_k)\\
&= \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} + \sigma^2\boldsymbol{e}_k^t\boldsymbol{e}_k + \sigma\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{e}_k + \sigma\boldsymbol{e}_k^t\boldsymbol{x}\\
&= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + \sigma^2 + 2\sigma x_k\\
&= 2\sigma^2 + 2\sigma x_k \qquad \text{dugu (5.37) bidez}\\
&= 2\sigma(x_k + \sigma)\\
&= 2\sigma u_k \qquad \text{dugu (5.38) erabiliz,}
\end{aligned}$$

non u_k zenbakia $\boldsymbol{u}$ bektorearen k-garren osagaia baita.

Azkenik, (5.35) eta (5.38) berdintzak kontuan hartuz, hau lortzen da:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Hx} &= \boldsymbol{x} - \rho(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\\
&= \boldsymbol{x} - 2\frac{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} + \sigma\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{e}_k}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}\boldsymbol{u}\\
&= \boldsymbol{x} - 2\frac{\sigma^2 + \sigma x_k}{2\sigma u_k}\boldsymbol{u}\\
&= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\\
&= -\sigma\boldsymbol{e}_k
\end{aligned} \tag{5.41}$$

5.12.2. QR faktorizazioa

$\boldsymbol{A}$ matrize karratu ez-singularra

Demagun $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizea ez dela singularra; orduan, aurreko atalaren arabera, $n-1$ Householderen matrizeak eraiki ditzakegu hau bete dadin:

$$\boldsymbol{H}_{n-1}\ldots\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}, \tag{5.42}$$

non $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizea goi-triangeluarra baita.

Prozesu honen lehenengo urratsa $\boldsymbol{H}_1$ matrizea eraikitzea da, $\boldsymbol{A}$-ren lehenengo zutabea, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{e}_1$-en multiplo bihurtzeko ($\boldsymbol{e}_1$ oinarri kanonikoaren lehenengo bektorea da), zutabearen norma euklidearra gordez. Alegia, 2. gaitik n. gaira dauden gaiak zero bihurtuz. Orduan, (5.41) kontuan hartuz, zera lortzen da:

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_1 = (\mathbb{1} - \rho_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^t)\boldsymbol{a}_1 = -\sigma_1\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.43}$$

non $r_{11} = -\sigma_1$ eta $\sigma_1 = \text{zeinu}(a_{11})\|\boldsymbol{a}_1\|_2$ (biribiltze-erroreak saihesteko). Aurreko atalagatik, badakigu $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \sigma_1\boldsymbol{e}_1$ hartu behar dugula. Beraz, Householderen lehenengo bektorea hau izango da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11}+\sigma_1 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

Bektore horrekin, $\boldsymbol{A}$ matrizean $\boldsymbol{H}_1$ aplikatuz, zera dugu:

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} r_{11} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

non $\boldsymbol{A}$ matrizearen gai guztiak aldatu baitira. Hori ez da gertatzen ezabatze gaussiarrean; metodo horretan, lehenengo lerroa ez da aldatzen. Gainerako matrizea, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_2$, lehenengo lerroa eta lehenengo zutabea kenduz geratzen den $(n-1)\times(n-1)$ matrizea da.

5.4. adibidea. *Egin dezagun Householderen ezabatzearen lehenengo urratsa matrize honetarako:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ebazpena. (5.37) eta (5.43) aplikatuz, hau dugu:

$$\|\boldsymbol{a}_1\|_2 = \sqrt{14} = 3.742, \quad \sigma_1 = \text{zeinu}(+1)3.742 = +3.742, \quad r_{11} = -3.742$$

eta (5.44) -ren bitartez

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1+3.742 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.742 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{H}_1$ eta $\boldsymbol{A}^{(2)}$ kalkulatzeko, (5.39) - (5.40) eta (5.45) erabiliz, hurrenez hurren, emaitza hauek ditugu:

$$\rho_1 = 1/(3.742 \cdot 4.742) = 0.05637$$

eta

$$\boldsymbol{H}_1 = \mathbb{1} - \rho_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^t = \begin{bmatrix} -0.2673 & -0.5345 & -0.8018 \\ -0.5345 & 0.7745 & -0.3382 \\ -0.8018 & -0.3382 & 0.4927 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3.742 & -1.069 & -0.2673 \\ 0 & 2.127 & 0.04368 \\ 0 & -2.309 & -2.434 \end{bmatrix},$$

non zenbaki guztiak lau zifra esangarrietara biribildu baititugu. □

Bigarren Householderen transformazioaren eraikuntzan, helburua da $\widetilde{\boldsymbol{A}}_2$-ren lehenengo zutabea egokiro eraldatzea, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_2$-ren lehenengo lerroa eta lehenengo zutabea aldatu barik. Hori lortzeko, nahikoa da $\boldsymbol{u}_2$-ren lehenengo gaia zero hartzea, ikus (5.35) -ren bigarren berdintza. Aukera horrekin, $\boldsymbol{H}_2$-ren aplikazioak bektore orokor bati ez dio aldatzen lehenengo osagaia, eta $\boldsymbol{H}_2$-ren aplikazioak berdin uzten dio $\boldsymbol{e}_1$-en edozein multiplori.

Aurreko adibidera itzuliz,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{bmatrix} 2.127 & 0.04368 \\ -2.309 & -2.434 \end{bmatrix}.$$

Orain, $\widetilde{\boldsymbol{a}}_2$ lehenengo zutabea da eta

$$\|\widetilde{\boldsymbol{a}}_2\| = 3.139, \quad \sigma_2 = \text{zeinu}(+2.127)3.139 = +3.139, \quad r_{22} = -3.139,$$

gainera, (5.38) erabiliz:

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.127 + 3.139 \\ -2.309 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.266 \\ -2.309 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{H}_2$ eta $\boldsymbol{A}^{(3)}$ kalkulatzeko, (5.39) - (5.40) eta (5.45) erabiliz, hurrenez hurren, emaitza hauek ditugu:

$$\rho_2 = 1/(3.139 \cdot 5.266) = 0.06050$$

eta

$$\boldsymbol{H}_2 = \mathbb{1} - \rho_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.678 & 0.7357 \\ 0 & 0.7357 & 0.6775 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{(3)} = \boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3.742 & -1.069 & -0.2673 \\ 0 & -3.139 & -1.820 \\ 0 & 0 & -1.617 \end{bmatrix}.$$

Ondorioz, hau lortu dugu:

$$\boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$$

non $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}^{(3)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matrize goi-triangeluarra baita. □

Baldin $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ez bada singularra, Householderen ezabapenaren $n-1$ urrats egin ditzakegu, eta $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ gainerako matrizearen $\widetilde{\boldsymbol{a}}_i$ lehenengo zutabea ez da zero izango i-garren urrats bakoitzean, $i = 1, \ldots, n-1$ ($\widetilde{\boldsymbol{A}}_1 = \boldsymbol{A}$ da); eta azken zutabean ez ditugu zeroak egin behar. Orduan, hau dugu:

$$\boldsymbol{H}_{n-1} \ldots \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{R},$$

non $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize goi-triangeluarra baita. Izan bedi $\boldsymbol{Q}^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize ortogonal hau:

$$\boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{H}_{n-1} \ldots \boldsymbol{H}_1. \tag{5.46}$$

Beraz,

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}_1 \ldots \boldsymbol{H}_{n-1}. \tag{5.47}$$

Ondorengo adierazpen bakoitzari $\boldsymbol{A}$-ren QR *faktorizazio* deritzo:

$$\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \quad \text{edo} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}. \tag{5.48}$$

Praktikan, ez dugu $\boldsymbol{Q}$ kalkulatu behar sistema bat ebazteko, zeren $\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{v}$ matrize-bektore biderketetan bakarrik agertzen baita. Bektore hori kalkula daiteke (5.46) adierazpeneko $\boldsymbol{H}_{n-1}, \ldots, \boldsymbol{H}_1$ Householderen banako transformazioak aplikatuz; matrize horiek ere ez dira esplizituki kalkulatu behar.

k-garren Householderen matrizea adierazteko, $\boldsymbol{u}_k$ Householderen bektorearen $n-(k-1)$ osagai gorde behar ditugu eta ρ_k balioa. Nahiz eta ρ_k kalkula dezakegun $\boldsymbol{u}_k$ erabiliz, bere kalkulurako eragiketak ez errepikatzeko, gordetzen dugu.

Faktorizazioa	Biderketak/Zatiketak	Batuketak/Kenketak
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PLU}$	$n^3/3$	$n^3/3$
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$	$2n^3/3$	$2n^3/3$
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$	$n^3/6$	$n^3/6$

5.3. taula. Matrize-faktorizazioen kostu aritmetikoa

5.3. taularen arabera, QR faktorizazioak LU faktorizazioaren eragiketen bikoitza erabiltzen du, hau da, lan bikoitza egin behar du matrize bat faktorizatzeko. Hala ere, askotan, QR faktorizazioa aukeratzen da bere zenbakizko egonkortasunagatik. $\boldsymbol{Q}$ ortogonala denez $\kappa_2(\boldsymbol{R}) = \kappa_2(\boldsymbol{A})$; hau da, QR faktorizazioak ez du okerragotzen $\boldsymbol{A}$-ren baldintza. Frogatu hori ariketa gisa.

5.12.3. Sistema lineal karratu determinatu baten ebazpena

Behin $\boldsymbol{A}$-ren QR faktorizazioa ezagutu eta gero, $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ kalkula daiteke, hau kontuan hartuz:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{QRx} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} \tag{5.49}$$

Beraz, lehenengo $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$ kalkulatzen da, eta, gero, (5.49) sistema ebazten dugu.

Aurreko 5.4. adibideari jarraituz, sistema hau dugu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

orduan:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -3.742 & -1.069 & -0.2673 \\ 0 & -3.139 & -1.820 \\ 0 & 0 & -1.617 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -6.682 \\ 1.320 \\ -1.617 \end{bmatrix}$$

(lau zifra esangarritara biribildua). Atzeranzko ebazpena eginez, (5.49) sisteman, $\boldsymbol{x} = (2, -1, 1)^t$ emaitza lortzen da ($\boldsymbol{R}$ eta $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$-ren bertsio zehatzekin!). $\square$

5.13. Minimo karratu linealak: sistema gaindeterminatuak

Demagun m datu-puntu dauzkagula, (t_i, y_i), $f(\boldsymbol{x}, t)$ funtzio batekin, lineala dena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parametro askeekiko. Adibidez, demagun $(1,2)$, $(2,3)$ eta $(3,5)$ hiru bikoteei $f(\boldsymbol{x}, t) = x_1 t + x_2 e^t$ funtzioa egokitu nahi diegula (5.2. irudia).

Doikuntza zehatz bat lortzeko, hots:

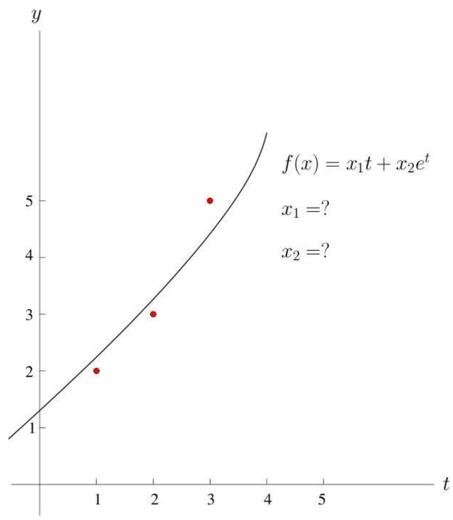
$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, t_1) &= y_1 \\ f(\boldsymbol{x}, t_2) &= y_2 \\ f(\boldsymbol{x}, t_3) &= y_3, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema bete behar du, non:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 2 & e^2 \\ 3 & e^3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Sistema lineal hau *gaindeterminatua* denez ($m > n$ zentzuan), ezin dugu ebatzi ezagutzen ditugun metodoez. Izan ere, guk aukeratuko dugu $\boldsymbol{x}$ bektorea $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}$ hondar-bektorearen neurriren bat minimizatzeko. Izan bedi bi-norma aukeratutako neurria. Beraz, problema hau ebatzi behar dugu:

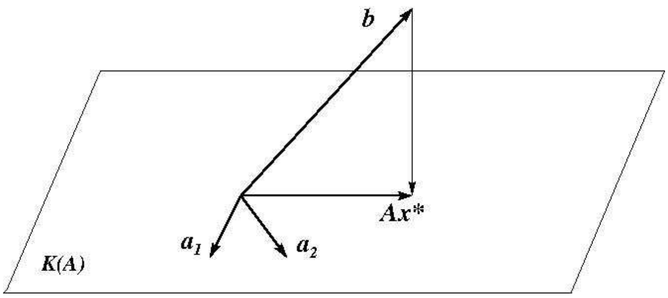
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2, \tag{5.50}$$



5.2. irudia. Minimo karratu linealen adibidea.

non $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, gure adibidean $m = 3$ eta $n = 2$.

Adibidearen soluzioa kalkulatzea eta "$(2,3,5)^t$ bektoretik $(1,2,3)^t$ eta $(e,e^2,e^3)^t$ bektoreen konbinazio lineal hurbilena aurkitzea (bi-norman)", problema baliokideak dira. Orokorrean, (5.50) problema ebaztea honela uler daiteke: "Aurkitu $\boldsymbol{b}$-tik $\boldsymbol{A}$ zutabeen konbinazio lineal hurbilena bi-norman". Geometrikoki, horrek esan nahi du $\boldsymbol{b}$ bektoretik $\boldsymbol{A}$-ren zutabeek sortutako $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioko n dimentsioko bektore hurbilena (norma euklidearrean) aurkitzea, ikus 5.3. irudia. Izan bitez $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ bektoreak $\boldsymbol{A}$ matrizeko m zutabeak.



5.3. irudia. Minimo karratu linealen soluzioa.

Badakigu $\boldsymbol{b}$-tik $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioko bektore hurbilena $\boldsymbol{Ax}^* \in K(\boldsymbol{A})$ izango dela; izan ere, $\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}$ perpendikualarra da $K(\boldsymbol{A})$ azpiespazioarekin. Beraz, x^*-k hau bete behar du:

$$\boldsymbol{a}_i^t(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

edo baliokideki,

$$\boldsymbol{A}^t(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$$

Bistan dago $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*$ bakarra dela, eta $\boldsymbol{A}$-ren zutabeak linealki askeak badira, $\boldsymbol{x}^*$ bektorea ere bakarra dela. Ondorioz, $\boldsymbol{x}^*$ ekuazio sistema honen soluzioa da:

$$(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b},$$

singularra ez dela.

Informazio hori hurrengo teoreman laburtzen da.

5.7. teorema. *Izan bitez $m \geq n > 0$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Orduan, (5.50) minimo karratuen problemaren soluzioa $\{\boldsymbol{x}^* \mid \boldsymbol{A}^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}\}$ puntuen multzoa da.*

Baldin $\boldsymbol{A}$-ren zutabeak linealki askeak badira, x^* soluzio bakarra da, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ ez da singularra eta $x^* = (\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$.

Frogantza. Defini dezagun $f(\boldsymbol{x})$ funtzio hau:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

Orduan, $\min \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \min f(\boldsymbol{x})$ eta soluzioak $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ bete behar du, alegia:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 2\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - 2\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

ondorioz, $\boldsymbol{x}^*$ soluzioak berdintza hau bete behar du:

$$\boldsymbol{A}^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}. \tag{5.51}$$

eta $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ erdidefinitu positiboa denez, $f(\boldsymbol{x})$ funtzio konbexua da eta, ondorioz, $\boldsymbol{x}^*$ minimizatzaile bat da. Beraz, teoremaren lehenengo atala frogatuta dago. Bigarrenean, $\boldsymbol{A}$-ren zutabeak linealki askeak direnez, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ ez da singularra eta orduan $\boldsymbol{x}^*$ minimizatzaile bakarra da. $\square$

Berrordenatuz (5.51), ekuazio hauek lortzen dira:

$$(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}, \tag{5.52}$$

ekuazio normalak deritzenak. Ekuazio normalen matrizea, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$, edozein $\boldsymbol{A}$-tarako matrize simetrikoa eta erdidefinitu positiboa da, eta definitu positiboa da baldin eta soilik baldin $\boldsymbol{A}$ matrizearen zutabeak linealki askeak badira, hots, $\boldsymbol{A}$ matrizea *zutabe hein betekoa* bada. Bestalde, ekuazio normalak beti dira bateragarriak, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ singularra izan arren.

Ekuazio normalek garrantzi praktiko handia dute, haiek bide zuzen bat ematen baitute minimo karratuen soluzioa kalkulatzeko. $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ definitu positiboa denean ($\boldsymbol{A}$ hein betekoa denean), ekuazio normalek soluzio bakar bat dute. Kasu horretan, minimo karratuen problema ebatz dezakegu honako algoritmo honekin.

5.1. algoritmoa. Hein beteko minimo karratu linealen problemaren ebazpena, ekuazio normalen bitartez.

0 urratsa. SARRERA. Sartu: $\boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{b}$.

1 urratsa. Eratu ekuazio normalen matrizea: $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$ bektorea.

2 urratsa. Kalkula ezazu Choleskyren faktorizazioa: $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$, non $\boldsymbol{R}$ goi-triangeluarra baita.

3 urratsa. Ebatzi $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$ aurreranzko ordezkapenaz; gero, ebatzi $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ atzeranzko ordezkapenaz.

4 urratsa. IRTEERA. Emaitzak: $\boldsymbol{x}$.

5.5. adibidea. *Ebatzi* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *sistema gaindeterminatua, hau badugu:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ebazpena. $\boldsymbol{A}$ matrizearen zutabeak bektore askeak direnez, $\boldsymbol{A}$ hein betekoa da.

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ eta } (\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} \text{ sistemaren soluzioa } \boldsymbol{x}^* = (2,-3)^t \text{ da.}$$

Hau da soluzio horri dagokion *hondar-bektorea*:

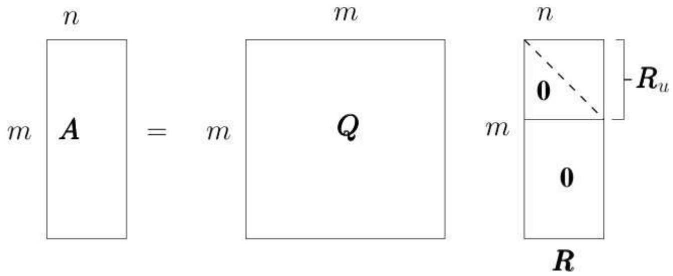
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Beraz, hau da sistema horren hondar-bektorearen norma euklidearra: $\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.464$ (ikus 5.3. irudia). □

Ariketa moduan, ebatzi ekuazio normalen bidez atal honen hasierako $f(\boldsymbol{x}, t) = x_1 t + x_2 e^t$ funtzioaren parametroen kalkulua, funtzioa $(1,2)$, $(2,3)$ eta $(3,5)$ bikoteei egokitzeko.

Nahiz eta $\boldsymbol{A}$ hein betekoa izan eta, beraz, ekuazio normalek $\boldsymbol{x}^*$ soluzio bakar bat izan, metodo hori erabiltzea ez da beti egokiena minimo karratuen problema ebazteko. Hori da $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ matrizearen baldintza $\kappa_2(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}) = (\kappa_2(\boldsymbol{A}))^2$ betetzeagatik (egiaztatu ariketa gisa). Adibidez, $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = 10^3$ baldintza ez da oso txarra, baina $\kappa_2(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}) = 10^6$ askoz txarragoa da eta zenbakizko egonkortasunaren arazo larriak sor ditzake. Beraz, metodo horren baldintza

A matrizearena baino okerragoa da. Aldiz, guk ***A***-ren QR faktorizazioa erabil dezakegu, honela:



(5.53)

($\boldsymbol{Q} \in \mathrm{I\!R}^{m\times m}$ ortogonala, $\boldsymbol{R} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ goi-triangeluarra) QR faktorizazioa erabiliz, ***A*** matrizea karratua den kasuan bezala, Householderen islapenak erabiliz, baita ere. Deskonposizio horrek ere ***A***-ren zutabeen ortonormalizazio zenbaki egonkorra ematen du. Ondorengo teoremak erakusten du nola erabili (5.53) faktorizazioa (5.50) problema ebazteko.

5.8. teorema. *Izan bitez* $m \geq n > 0$, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{I\!R}^m$ *bektorea eta* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ *zutabe hein beteko matrizea. Orduan, (5.53) erako* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$ *deskonposizio bat existitzen da, non* $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ *matrize ortogonala baita,* $\boldsymbol{R} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ *goi-triangeluarra eta* $\boldsymbol{R}_u$ *(hots,* $\boldsymbol{R}$*-ren lehenengo* n *lerroak) matrize goi-triangeluarra eta ez-singularra.*

Gainera, hau da (5.50) minimo karratuen problemaren soluzio bakarra:

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{R}_u^{-1}(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u, \qquad \textit{non} \quad (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u^t = ((\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_1, \ldots, (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_n),$$

eta hondarraren luzeraren karratua hau da:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{m} (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_i^2.$$

Frogantza. Householderen transformazioetatik ondorioztatzen da ***A***-ren QR deskonposizioaren existentzia, eta ***A***-ren zutabe hein betekoa izatetik $\boldsymbol{R}_u$-ren ez-singularitatea ($\boldsymbol{Q}$ ez baita singularra). Orain, $\boldsymbol{Q}^t$ ortogonala denez, bektore batez biderkatzean ez dio aldatzen bere norma euklidearra ($\|\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$) eta, orduan, zera dugu:

$$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{QRx} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{Q}^t(\boldsymbol{QRx} - \boldsymbol{b})\|_2 = \|\boldsymbol{Rx} - \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}\|_2,$$

hori dela eta, honela berridatz dezakegu (5.50) problema:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathrm{I\!R}^n} \|\boldsymbol{Rx} - \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}\|_2.$$

Orduan, $(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_l^t = ((\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_{n+1}, \ldots, (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_m)$ bada, hau dugu:

$$\|\boldsymbol{Rx} - \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}\|_2^2 = \|\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u\|_2^2 + \|(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_l\|_2^2$$

eta hori minimizatzen da $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}_u^{-1}(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u$ denean (lehenengo batugaia zero egiten baita), gainera $\|(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_l\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{m}(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_i^2$ dugu. □

5.2. algoritmoa. Hein beteko minimo karratu linealen problemaren ebazpena, QR faktorizazioaren bitartez.

0 urratsa. SARRERA. Sartu: $\boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{b}$.

1 urratsa. Kalkula ezazu $\boldsymbol{A}$-ren QR faktorizazioa Householderen transformazioak erabiliz, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$, non $\boldsymbol{Q}$ ortogonala baita eta $\boldsymbol{R}$ goi-triangeluarra.

2 urratsa. Eratu $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$ eta $\widetilde{\boldsymbol{b}}_u$ (hots, $\widetilde{\boldsymbol{b}}$-ren lenenengo n osagaiak).

3 urratsa. Ebatzi $\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{b}}_u$ atzeranzko ordezkapenaz, non $\boldsymbol{R}_u$ $\boldsymbol{R}$-ren lehenengo n lerroek osatutako azpimatrize karratu goi-triangeluarra baita.

4 urratsa. IRTEERA. Emaitza: $\boldsymbol{x}$.

Alegia, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizea zutabe hein betekoa ($m > n$) eta $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ badira, eta $\boldsymbol{H}_n \ldots \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$ bada, $\boldsymbol{H}_n \ldots \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b}$ kalkulatu behar dugu. Orduan, $\boldsymbol{Q}^t[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}]$ guztia batera kalkulatuko dugu, $\boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{H}_n \ldots \boldsymbol{H}_1$ izanik. Gainera, gogoratu $\boldsymbol{Hx}$ kalkulatzeko ez dugula $\boldsymbol{H}$ aurkitu behar.

5.6. adibidea. *Adibide honetan, QR metodoaren bitartez ebatziko da aurreko 5.5. adibidearen $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema gaindeterminatua.*

Ebazpena. Gogora dezagun honako hau:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Izan bitez $\boldsymbol{a}_1 = [1 \quad 1 \quad 0]^t$ eta $\boldsymbol{a}_2 = [1 \quad 0 \quad 1]^t$ $\boldsymbol{A}$ matrizearen zutabe-bektoreak. Orduan, lau digitu esangarritara biribilduz, hau dugu:

$$\sigma_1 = \text{zeinu}(a_{11})\|\boldsymbol{a}_1\|_2 = +\sqrt{2} = 1.414, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 + 1.414 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.414 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{eta} \qquad \rho_1 = \frac{1}{\sigma_1 \cdot [\boldsymbol{u}_1]_1} = \frac{1}{1.414 \cdot 2.414} = 0.2929$$

Beraz, (5.35) adierazpenak erabiliz, hau lortzen dugu:

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.2929 \left([2.414 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2.414 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.414 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

espero genuen bezala, ikus (5.43) eta (5.44) adierazpenak (hots, praktikan kalkulu horiek ez ditugu egin behar). Orain $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_2$ kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.2929\left([2.414 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2.414 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hori dela eta, hau dugu:

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.414 & -0.7071 \\ 0 & -0.7071 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

($\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}$ baita).

Ikusi den bezala, ez dugu $\boldsymbol{H}_1$ kalkulatzeko beharrik. Hala ere, kalkulatu egingo dugu:

$$\boldsymbol{H}_1 = \mathbb{1} - \rho_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^t = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(ariketa gisa, egiaztatu $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(2)}$ betetzen dela).

Gainera, $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$ kalkulatzen hasteko, $\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{b}$ baita) honela aurkituko dugu:

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{b})\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} - 0.2929\left([2.414 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2.414 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Orain, $\boldsymbol{A}^{(2)}$ matrizeari lehenengo zutabea eta lehenengo lerroa ezabatuz, azpimatrize hau geratzen da:

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jarraian, $\widetilde{\boldsymbol{a}}_2$ bektoreko lehenengo gaiaren azpiko gaia zero bihurtzeko, hau egingo dugu:

$$\sigma_2 = \text{zeinu}(-0.7071)\|\widetilde{\boldsymbol{a}}_2\|_2 = -1.225,$$

eta, beraz, hau da $\boldsymbol{A}^{(2)}$-ren bigarren zutaberako erabili behar dugun $\boldsymbol{u}_2$ Householderen bektorea :

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7071 - 1.225 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.932 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\sigma_2 \cdot [\boldsymbol{u}_2]_2} = \frac{1}{(-1.225)(-1.932)} = 0.4226,$$

ohartu $\boldsymbol{u}_2$-ren lehenengo gaia zero dela, $\boldsymbol{A}^{(2)}$-ren lehenengo zutabea eta lehenengo lerroa ez aldatzeko.

Beraz, (5.35) adierazpenak erabiliz, hau lortzen dugu:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{a}_2^{(2)} &= \boldsymbol{a}_2^{(2)} - \rho_2(\boldsymbol{u}_2^t\boldsymbol{a}_2^{(2)})\boldsymbol{u}_2 \\
&= \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.4226 \left(\begin{bmatrix} 0 & -1.932 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -1.932 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 1.225 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

espero genuen bezala (hots, praktikan kalkulu horiek ez ditugu egin behar).

Hori dela eta, hau dugu:

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1.414 & -0.7071 \\ 0 & 1.225 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ikusi den bezala, ez dugu $\boldsymbol{H}_2$ kalkulatzeko beharrik. Hala ere, kalkulatu egingo dugu:

$$\boldsymbol{H}_2 = \mathbb{1} - \rho_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5780 & 0.8165 \\ 0 & 0.8165 & 0.5774 \end{bmatrix},$$

(ariketa gisa, egiaztatu $\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{A}^{(3)}$ betetzen dela).

Gainera, $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$-ren kalkulua bukatzeko, $\boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{b}^{(2)}$ (hots, $\boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b}$) honela aurkituko dugu:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{b}^{(2)} &= \boldsymbol{b}^{(2)} - \rho_2(\boldsymbol{u}_2^t\boldsymbol{b}^{(2)})\boldsymbol{u}_2 \\
&= \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ -5 \end{bmatrix} - 0.4226 \left(\begin{bmatrix} 0 & -1.932 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -1.932 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -3.674 \\ -3.464 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Azkenik, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}^{(3)}$ eta $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(3)}$ direnez, $\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u$ sistema ebatziko dugu, alegia:

$$\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1.414 & -0.7071 \\ 0 & 1.225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -3.674 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_u.$$

Sistema horren soluzio bakarra $x_1 = 2$ eta $x_2 = -3$ da (biribilduz).

Bestalde, $|(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b})_l| = 3.464$ da hondar-bektorearen norma euklidearra (kasu honetan, eskalar bat denez, balio absolutua da). Konparatu emaitza horiek 5.5. adibidean lortutako emaitzekin. □

5.13.1. QR faktorizazioaren propietateak

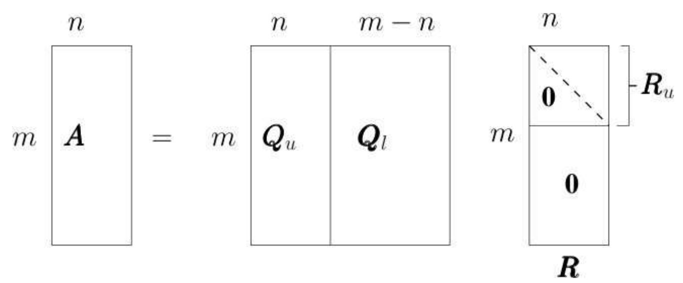
Aurreko algoritmoak frogatzen du QR faktorizazioa existitzen dela. Izan bedi $K(\boldsymbol{A})$ $\boldsymbol{A}$ matrizeko zutabeen konbinazio linealen multzoa; hots, zutabe horiek sortzen duten azpiespazio bektoriala. Jarraian ikusiko dugu zer erlazio dagoen $\boldsymbol{Q}$-ren zutabeen eta $K(\boldsymbol{A})$ eta $K(\boldsymbol{A})^{\perp}$ azpiespazioen artean.

5.9. teorema. *$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$ deskonposizioa $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$-ren zutabe hein beteko QR faktorizazioa bada eta $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$, $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{Q}_u, \boldsymbol{Q}_l]$ eta $\boldsymbol{Q}_u = [\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n]$, $\boldsymbol{Q}_l = [\boldsymbol{q}_{n+1}, \dots, \boldsymbol{q}_m]$ zutabekako partiketak badira, orduan, hau betetzen da:*

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{A}) &= K(\boldsymbol{Q}_u) \\ K(\boldsymbol{A})^{\perp} &= K(\boldsymbol{Q}_l) \end{aligned}$$

eta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u$, non $\boldsymbol{R}_u \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\boldsymbol{R}$ matrizearen lehenengo n lerroetako azpimatrize goi-triangeluarra baita.

Frogantza. 5.53 adierazpenean $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{Q}_u, \boldsymbol{Q}_l]$ partiketa sartuta, hau dugu:



(5.54)

Beraz, hau betetzen da:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u + \boldsymbol{Q}_l\boldsymbol{0} = \boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u.$$

Alegia, $k = 1, \dots, n$ guztietarako, hau betetzen da:

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik}\boldsymbol{q}_i \subset K(\boldsymbol{Q}_u),$$

$(r_{1k}, \dots, r_{kk}, 0 \dots, 0)^t$ bektorea $\boldsymbol{R}_u$-ren k-garren zutabea izanik. Ondorioz, $K(\boldsymbol{A}) \subset K(\boldsymbol{Q}_u)$. Azkenik, $\boldsymbol{A}$-ren eta $\boldsymbol{Q}$-ren heinak berdinak direnez, $K(\boldsymbol{A}) = K(\boldsymbol{Q}_u)$.

Bestalde,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_u^t \\ \boldsymbol{Q}_l^t \end{bmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_u \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q}_l^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}.$$

Beraz, $K(\boldsymbol{Q}_l) \subset K(\boldsymbol{A})^{\perp}$. Gainera, $K(\boldsymbol{A})^{\perp}$-ren dimentsioa eta $\boldsymbol{Q}_l$-ren heina berdinak dira $(m - n)$. Ondorioz, $K(\boldsymbol{Q}_l) = K(\boldsymbol{A})^{\perp}$. $\square$

5.10. teorema. *Demagun $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizea zutabe hein betekoa dela. QR faktorizazio "garbia" $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u$ bakarra da, non $\boldsymbol{Q}_u \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizeak zutabe ortogonalak baititu eta $\boldsymbol{R}_u$ goi-triangeluarra eta diagonaleko gai positiboduna baita. Gainera, $\boldsymbol{R}_u$ matrizea $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ matrizearen Choleskyren faktorea da.*

Frogantza. $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u)^t(\boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u) = \boldsymbol{R}_u^t\boldsymbol{Q}_u^t\boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u = \boldsymbol{R}_u^t\boldsymbol{R}_u$ denez gero, $\boldsymbol{R}_u$ matrizea $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ matrizearen Choleskyren faktorea da. Faktore hori bakarra da 5.5. teoremagatik eta, $\boldsymbol{Q}_u = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_u^{-1}$ denez, $\boldsymbol{Q}_u$ ere bakarra da. □

Aurreko 5.6. adibidean, $\boldsymbol{H}_1$ eta $\boldsymbol{H}_2$ kalkulatu ditugu. Orduan, hau dugu (lau digitu esangarritara biribilduz):

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5780 & 0.8165 \\ 0 & 0.8165 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.4087 & -0.5773 \\ -0.7071 & -0.4087 & 0.5773 \\ 0 & 0.8165 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

Beraz, zera dugu:

$$\boldsymbol{Q}_u = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.4087 \\ -0.7071 & -0.4087 \\ 0 & 0.8165 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{Q}_l = \begin{bmatrix} -0.5773 \\ 0.5773 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

Egiaztatu adibide horretarako $\boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{R}_u = \boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{Q}_l^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ betetzen direla, 5.9. teoremak dioen bezala.

5.13.2. Hein urriko QR faktorizazioa

Baldin $\boldsymbol{A}$-ren heina urria bada, QR faktorizazioak ez du ematen oinarri bat $K(\boldsymbol{A})$ azpiespaziorako. Problema hori zuzendu dezakegu $\boldsymbol{A}$-ren bertsio permutatu baten QR faktorizazioa kalkulatuz; hots, $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{QR}$, non $\boldsymbol{P}$ permutazio-matrize bat baita.

Orokorki, $\boldsymbol{A}$-ren heina ezagutzen ez dugunez, zutabeen trukeak egin beharko ditugu. Matrize horren heina urria bada, trukerik gabe bat-batean bukatuko litzateke Householderen ezabapena. Baina, kasu horretan, bi gauza gerta daitezke: bata da beste zutabeak zero izatea, orduan, bukatu da; bestea da beste zutabeen artean baten bat zero ez izatea eta, kasu horregatik, orokorrean egiten dugu zutabeen permutazioa. Adibidez, $\boldsymbol{A}$ matrize honek hiru zutabe ditu eta hau da bere QR faktorizazioa:

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3] = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \boldsymbol{q}_3]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

orduan, $\text{hein}(\boldsymbol{A}) = 2$ da, baina $K(\boldsymbol{A})$ ez da $K([\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2])$, ezta $K([\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_3])$ edo $K([\boldsymbol{q}_2 \quad \boldsymbol{q}_3])$ ere.

Zorionez, Householderen QR faktorizazioa erraz alda dezakegu $K(\boldsymbol{A})$-rako oinarri ortonormal bat lortzeko. Pibotatzearen estrategia norma handiena duen zutabea pibot gisa hartzekoa izaten da.

Demagun hau dugula k-garren urratsean:

$$(\boldsymbol{H}_{k-1}\dots\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\dots\boldsymbol{P}_{k-1}) = \boldsymbol{R}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11}^{(k-1)} & \boldsymbol{R}_{12}^{(k-1)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_{22}^{(k-1)} \end{bmatrix},$$

non $\boldsymbol{R}_{11}^{(k-1)}$ ez-singularra eta goi-triangeluarra baita. Demagun $\boldsymbol{R}_{22}^{(k-1)}$-ren zutabekako partiketa hau:

$$\boldsymbol{R}_{22}^{(k-1)} = \left[\boldsymbol{z}_k^{(k-1)}, \dots, \boldsymbol{z}_n^{(k-1)}\right]$$

eta p azpiindizea ($k \le p \le n$) hau betetzen duen txikiena dela:

$$\|\boldsymbol{z}_p^{(k-1)}\|_2 = \max\left\{\|\boldsymbol{z}_k^{(k-1)}\|_2, \dots, \|\boldsymbol{z}_n^{(k-1)}\|_2\right\}.$$

Ohartu, $\text{hein}(\boldsymbol{A}) = k-1$ bada, norma handiena zero izango dela eta faktorizazioa bukatu dugula. Bestela, izan bedi $\boldsymbol{P}_k$ permutazioa, p eta k zutabeak trukatzen dituena, eta aurkitzen dugula $\boldsymbol{H}_k$ Householder transformazio egokia, $\boldsymbol{R}^{(k)} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{R}^{(k-1)}\boldsymbol{P}_k$, non $\boldsymbol{R}^{(k)} = \boldsymbol{R}^{(k)}(k+1 : m, k) = \boldsymbol{0}$ (hots, (k,k) gaiaren azpiko gaiak zero dira).

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$-ren heina r bada, r zutabe-permutazio beharko ditugu. Beraz, r urrats horiek eman ondoren, hau izango dugu:

$$(\boldsymbol{H}_r\dots\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\dots\boldsymbol{P}_r) = \widetilde{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

non $\boldsymbol{R}_{11}$ ez-singularra eta goi-triangeluarra baita, $\boldsymbol{R}_{11}$-en zutabe kopuruak $\boldsymbol{A}$-ren heina ematen digu. Orain, $\boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{H}_{r-1}\dots\boldsymbol{H}_1$ eta $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1\dots\boldsymbol{P}_r$ definitzen baditugu, honela geratuko da aurreko adierazpena:

$$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \widetilde{\boldsymbol{R}} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \end{array} \tag{5.55}$$

edo, baliokideki, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{R}}$. Ondorioz, minimo karratuen problema ebazteko, hau dugu ($\boldsymbol{P}$ eta $\boldsymbol{Q}^t$ ortogonalak direla kontuan hartuz):

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \|\boldsymbol{Q}^t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})\|_2^2 = \|(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}\|_2^2. \tag{5.56}$$

Izan bitez

$$\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array},$$

orduan, (5.55) eta (5.56) ekuazioen bidez hau lortzen da:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2^2 &= \left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\right\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c}\\ -\boldsymbol{d}\end{bmatrix}\right\|_2^2\\ &= \|\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{z})\|_2^2+\|\boldsymbol{d}\|_2^2.\end{aligned} \tag{5.57}$$

Hori dela eta, minimo karratuen soluzioak $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{z})$ bete behar du. Hots, edozein $\boldsymbol{z}$-rako $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{R}_{11}^{-1}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{z})$ soluzio minimizatzaile bat izango dugu, eta, ondorioz:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}^{-1}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{z})\\ \boldsymbol{z}\end{bmatrix}$$

Baldin $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ hartzen badugu, $\boldsymbol{x}_B$ *oinarri-soluzio* hau lortuko dugu:

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

Izen hori $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ hartzetik eta, praktikan, $\boldsymbol{A}$-ren hein beteko azpimatrize baterako soluzioa izatetik dator.

5.3. algoritmoa. Hein urriko minimo karratu linealen problemaren ebazpena, QR faktorizazioaren bitartez.

0 urratsa. SARRERA. Sartu: $\boldsymbol{A}$ eta $\boldsymbol{b}$.

1 urratsa. Kalkula ezazu $\boldsymbol{A}$-ren QR faktorizazioa Householderen transformazioak erabiliz, $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{R}}$, non $\boldsymbol{Q}$ ortogonala baita eta $\widetilde{\boldsymbol{R}}=[\boldsymbol{R}_{11}\quad \boldsymbol{R}_{12}]$, non $\boldsymbol{R}_{11}$ goi-triangeluarra baita eta $r=\text{hein}(\widetilde{\boldsymbol{R}})$.

2 urratsa. Kalkulatu $\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$, non $\boldsymbol{c}$ bektorea $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$-ren lehenengo r osagaiek osatzen baitute.

3 urratsa. Ebatzi $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{z})$. (Baldin $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ hartzen badugu, $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}_B=\boldsymbol{c}$ ebazten dugu.)

4 urratsa. Aurkitu $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{bmatrix}$. ($\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ eta $\boldsymbol{y}_B$ baditugu, $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_B\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$).

5 urratsa. IRTEERA. Emaitza: $\boldsymbol{x}$. (Baldin $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ hartu badugu, $\boldsymbol{x}_B$ *oinarri-soluzioa* izango dugu).

Normalean, norma euklidear minimoa (luzera minimoa) duen $\boldsymbol{x}_{LM}$ soluzioarekin geratzen gara. Alegia,

$$\|\boldsymbol{x}_{LM}\|_2=\min_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{n-r}}\left\|\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{R}_{12}\\ -\mathbb{1}_{n-r}\end{bmatrix}\boldsymbol{z}\right\|_2. \tag{5.58}$$

Froga daiteke hau betetzen dela:

$$1 \leq \frac{\|\boldsymbol{x}_B\|_2}{\|\boldsymbol{x}_{LM}\|_2} \leq \sqrt{1 + \|\boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{R}_{12}\|_2^2}\ .$$

5.7. adibidea. *Izan bitez*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Aurkitu $\min \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$ *problemaren oinarri-soluzioa. Aurkitu* $\boldsymbol{x}_{LM}$ *soluzioa ere (hots, luzera minimoa duena).*

Ebazpena. Hirugarren zutabearen norma euklidearra handiena denez, 1. eta 3. zutabeak trukatuko ditugu permutazio-matrize honen bitartez:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hots,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 10 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Householderen transformazioak erabiliz, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{R}}$ deskonposizio hau kalkulatzen da:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -0.1684 & 0.7241 & -0.4453 & 0.4991 \\ -0.8422 & -0.2322 & -0.3881 & -0.2936 \\ -0.5053 & 0.2459 & 0.8049 & 0.1908 \\ -0.0842 & -0.6011 & -0.0571 & 0.7927 \end{bmatrix} \quad \widetilde{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} -11.87 & -7.411 & -8.169 \\ 0 & 1.038 & -0.5191 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alegia, $\boldsymbol{A}$-ren heina $r = 2$ da, eta

$$\boldsymbol{R}_{11} = \begin{bmatrix} -11.87 & -7.411 \\ 0 & 1.038 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_{12} = \begin{bmatrix} -8.169 \\ -0.5191 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -10.36 \\ 3.115 \\ 1.267 \\ 5.138 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$ bektorearen lehenengo $r = 2$ osagaiek $\boldsymbol{c} = [-10.36 \quad 3.115]^t$ bektorea osatzen dute eta azken $m - r = 4 - 2 = 2$ osagaiek $\boldsymbol{d} = [1.267 \quad 5.138]^t$ bektorea. Orain $z = 0$ hartuz, $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{y}_B = \boldsymbol{c}$ dugu, eta sistema hori ebatziz hau lortzen dugu:

$$\boldsymbol{y}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Beraz, $\min \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{Ax}_B-\boldsymbol{b}\|_2 = \|d\|_2 = \sqrt{1.267^2+5.138^2} = 5.291$ hondar optimoa (minimoa) da.

Orain, $\boldsymbol{x}_{LM}$ kalkulatuko dugu, (5.58) erabiliz. Lehenik, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{R}_{12}$ aurkituko dugu; hots, $\boldsymbol{R}_{11}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{R}_{12}$ ebatzi behar dugu:

$$\begin{bmatrix} -11.87 & -7.411 \\ 0 & 1.038 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.169 \\ -0.5191 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Gero, bektore hau kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11}^{-1}\boldsymbol{R}_{12} \\ -\mathbb{1}_{n-r} \end{bmatrix}\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} z \\ 3+0.5z \\ -1-z \end{bmatrix}.$$

Azkenik (5.58) kontuan hartuz, hauxe dugu:

$$\|\boldsymbol{x}_{LM}\|_2 = \min_z \|\boldsymbol{v}\|_2 \;\Rightarrow\; \min\{z^2+(3+0.5z)^2+(-1-z)^2\} = \min\{2.25z^2+5z+10\} \;\Rightarrow\; z = -1.111$$

Beraz,

$$\boldsymbol{x}_{LM} = \begin{bmatrix} -1.111 \\ 3+0.5\cdot(-1.111) \\ -1-(-1.111) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.111 \\ 2.444 \\ 0.111 \end{bmatrix}$$

non $\|\boldsymbol{x}_{LM}\|_2 = 2.687$ baita $(\|\boldsymbol{x}_B\|_2 = 3.162$ da$)$. □

5.13.3. Deskonposizio ortogonal osoa

Hein urriko QR faktorizazioan $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ matrize hau lortu dugu (ikus (5.55)):

$$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{AP} = \widetilde{\boldsymbol{R}} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \end{array}$$

Bereziki, QR faktorizazioa erabil dezakegu hau kalkulatzeko:

$$\boldsymbol{Z}_1\ldots\boldsymbol{Z}_r\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11}^t \\ \boldsymbol{R}_{12}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11}^t \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array}$$

non $\boldsymbol{Z}_i$ Householderen matrizeak baitira eta T_{11}^t goi-triangeluarra. Ondorioz:

$$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{AZ} = \boldsymbol{T} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \end{array} \tag{5.59}$$

non $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{PZ}_r\ldots\boldsymbol{Z}_1$. Deskonposizio horri *deskonposizio ortogonal osoa* deritzogu.

Ondorioz, minimo karratuen probleman hau betetzen da:

$$\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2^2 = \|(\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{AZ})\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}\|_2^2 = \|\boldsymbol{T}_{11}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{c}\|_2^2 + \|\boldsymbol{d}\|_2^2$$

non

$$\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array}.$$

Bistan denez, baldin $\boldsymbol{x}$-k minimo karratuak minimizatu behar baditu, orduan $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{T}_{11}^{-1}\boldsymbol{c}$ bete behar du. Gainera, $\boldsymbol{x}$-ren norma euklidearra minimoa izateko $\boldsymbol{y}$ zero izan behar eta, horrela bada, hau dugu:

$$\boldsymbol{x}_{LM} = \boldsymbol{Z} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11}^{-1}\boldsymbol{c} \\ 0 \end{bmatrix}.$$