

4. gaia

Ekuazio ez-linealen ebazpena

Medikuntza-ikasketek baieztatu dute puenting-jauzilari batek bizkarrezurreko kalte garrantzitsu bat jasateko duen probabilitatea handitu egiten dela baldin erorketa libreko abiadura 36 m/s baino handiagoa bada, erorketa librean 4 s egon ondoren. Orduan, zure nagusiak nahi du puenting-enpresan zuk zehaztea zein masatarako gainditzen den irizpide hori, airearen erresistentzia-koefizientea 0.25 kg/m bada.

Zuk badakizu, aurreko ikasketen bidez, adierazpen hau erabil dezakegula denboraren menpeko erorketaren abiadura jakiteko:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} t\right).$$

Ezin da bakandu m . Aukera bat da m aurkitzeko funtzio berri honen *erroa* kalkulatzeko:

$$f(m) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} t\right) - v(t) \quad (4.1)$$

Kapitulu honetan ikusiko dugu nola erabil dezakegun ordenagailua horrelako soluzioak kalkulatzeko.

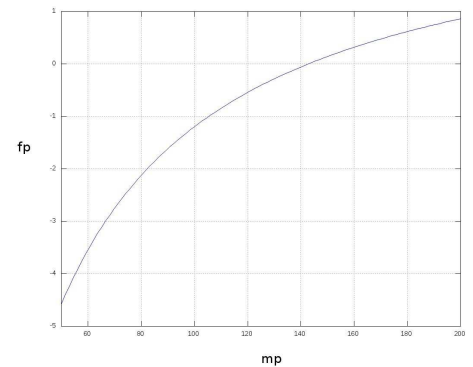
4.1. Metodo grafikoak

Metodo erraz bat da $f(x) = 0$ ekuazioko erroaren hurbilpen bat lortzeko funtzioaren marrazketa egitea, eta aztertzea non zeharkatzen duen x ardatza. Puntu horrek erroaren sasi-hurbilpen bat ematen digu.

4.1. adibidea. *Hurbilpen grafikoa erabiliz, aurkitu puenting-jauzilariaren masa, $c_d = 0.25$ kg/m bada, erorketa libreko 4 s igaro ondoren abiadura 36 m/s-koa izateko ($g = 9.81$ m/s²).*

Ebazpena: m -rekiko (4.1) funtzioa marrazteko, MATLAB erabiliz, hau egingo dugu:

```
>> cd=0.25; g=9.81; v=36; t=4;
>> mp=linspace(50,200);
>> fp=sqrt(g*mp/cd).*tanh(sqrt(g*cd./mp)*t)-v;
>> plot(mp,fp), grid
```



Funtzio horrek 140 eta 150 kg artean zeharkatzen du m ardatza. Marrazketaren azterketak erroaren 145 kg-ko sasihurbilpen bat ematen digu. Hurbilpen grafiko horren baliotasuna probatzeko, (4.1) adierazpenean ordezkatu dugu:

```
>> sqrt(g*145/cd).*tanh(sqrt(g*cd./145)*t)-v
ans =
    0.0456
```

zeina zerotik hurbil baitago. \square

Teknika grafikoek erabilera praktiko mugatua dute, oso zehatzak ez direlako. Hala ere, metodo grafikoak erabil daitezke erroen sasihurbilpenak aurkitzeko, eta horiek zenbakizko metodoetan erabil daitezke, hasierako hurbiltze-puntuak bezala.

4.2. Bakartze-metodoak eta hasierako hurbiltze-puntuak

Bi metodo mota nagusi ditugu erroari buruz dugun informazioaren arabera, hauek dira:

- *Bakartze-metodoak.* Metodo hauetan, hasierako bi hurbiltze-puntu erro bakoitza bakartzen du tarte batean.
- *Metodo irekiak.* Metodo hauetan, hasierako hurbiltze-puntu bat (edo gehiago) erabiltzen da, baina ez da beharrezkoa erroa tarte batean bakartzea.

Bakartze-metodoen konbergentzia motela da. Aldiz, metodo irekien konbergentzia, oro har, azkarragoa da; baina haiek dibergenteak izan daitezke.

Bi kasuetan, beharrezkoak dira hasierako hurbiltze-puntuak. Aztertzen ari garen testuinguru fisikotik atera ditzakegu horiek. Hala ere, batzuetan ez da erraza horrelako hastapen-datu onak iragartzea.

Ekuazio batek erro anitz baldin badauzka tarte batean, erroak bakartzeko tarte txikiagoak definituko ditugu. Hori funtzioa marraztuz egin dezakegu, edo funtzioa balioztatuz segidako puntuen multzo bat hartuz, eta aztertuz funtzioaren zeinua zein tartetan aldatzen den.

Ondorengo atalean kasu berezi bat ikusiko dugu, non erroak analitikoki bakartu baititza-kegun.

4.2.1. Erroak bakartzea

Izan bitez $[a, b]$ tarte eta $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio ondo definitua eta jarraitua tarte horretan. Funtzioaren erroak bilatzea eta $f(x) = 0$ ekuazioaren soluzioak asmatzea problema bera da. Berdintza hori betetzen duen p soluzioari *funtzioaren erro* esango diogu.

Batzuetan, $f'(x)$ funtzioaren existentzia funtsezkoa izango da helburua lortzeko eta, zenbaitetan, $f''(x)$ -rena ere bai. Jo dezagun $f(x) = 0$ ekuazioaren erro guztiak desberdinak direla. Hortaz, erro bakoitzaren ingurune nahiko txiki baterako ez dago beste errorik. Orduan, bi urrats hauek beteko ditugu:

1. Erroen bereizketa: erro bakoitzaren $[\alpha, \beta]$ ingurune ahalik eta txikiena aurkitzea; non tartearen barnean ez baita ekuazioaren beste errorik egon behar.
2. Erro hurbilduen balioak doitzea: emaitza gero eta hobeak hurbiltzea.

Jarraian, kontuan hartu beharko ditugu bi propietate hauek:

- (i) *Izan bedi f jarraitua $[a, b]$ tartean eta $[a, b]$ -ko muturretan zeinu desberdinekin (hots, $f(a) \cdot f(b) < 0$); orduan, f funtzioak gutxienez c erro bat izango du (a, b) tartean; hots, $\exists c \in (a, b)$, non $f(c) = 0$ baita (Bolzano-ren teorema).*
- (ii) *Baldin f deribagarria bada (a, b) tartean, eta f' -k tarte horretan zeinua aldatzen ez bada (hau da, f monotonoa bada), orduan, f funtzioak ez du $[a, b]$ tartean erro bat baino gehiago izango.*

Ondorioz, $f(x) = 0$ ekuazioaren erroak kalkulatzeko urrats hauei jarraituko diegu:

1. Funtzioen erroak tarte desberdinetan bakartuko ditugu (ii) aplikatuz, ahal bada. Lehendabizi, emandako tartearen partizio bat egiten da: $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < b$

(adibidez, f deribagarria bada, deribatuaren zeinu-aldaketak erabiliz lor dezakegu partizioa; hau da, $f'(x)$ funtzioaren erroak kalkulatu).

- Ondoz ondoko puntu-bikoteak bilatuko ditugu, (i) aplikatuz: hala, f funtzioak zeinu desberdinak hartuko ditu. Hau da, α_k, α_{k+1} izango ditugu, non $f(\alpha_k) \cdot f(\alpha_{k+1}) < 0$ baita. Horrek adierazten digu ezen tarte horretan $f(x)$ -ren erro bat existitzen dela.

4.2. adibidea. Ebatzi $x^4 - 4x - 1 = 0$ ekuazioa.

Ebazpena. Izan bedi $f(x) = x^4 - 4x - 1$. Funtzio horrek, 4. mailako polinomio bat denez, gehienez lau erro izango ditu. Funtzio horren zeinu-aldaketak finkatzeko, aski dira emandako tartearen muturrak eta funtzioaren maximo eta minimo lokalak. Kasu horretan, $f'(x) = 4(x^3 - 1)$ aztertzen da, eta, ondorioz, $x = 1$ da $f'(x)$ -ren zeinu-aldaketa bakarra. Hain zuzen ere:

$$\begin{aligned}x \in (-\infty, 1) &\Rightarrow f'(x) < 0 \\x \in (1, \infty) &\Rightarrow f'(x) > 0\end{aligned}$$

Hortaz, $(-\infty, 1)$ tartean, $f(x)$ beherakorra da, eta, $(1, \infty)$ tartean, $f(x)$ gorakorra da. Gainera, tarte horien muturretan, zera gertatzen da:

$$f(-\infty) \cdot f(1) < 0 \quad \text{eta} \quad f(1) \cdot f(\infty) < 0,$$

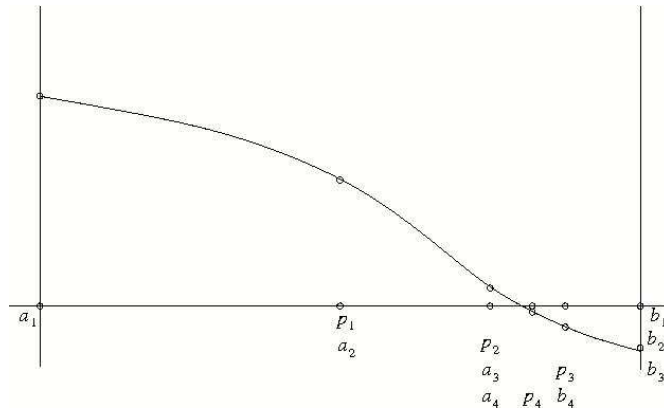
Ondorioz, bi tarte horietan $f(x)$ -k 0 balioa hartzen du (i) aplikatuz. Hau da, tarte bakoitzean erro bat dago. \square

Oharra. Erroak tarte desberdinetan bakartzeko dugun beste metodo bat da funtzioaren grafikoa aztertzea (esate baterako, MATLAB erabiliz). Geroago, erro bat duen tarte bakoitza txikitzen da, adibidez, bisekzio metodoaren bitartez.

4.2.2. Bisekzio metodoa

Demagun f funtzioa jarraitua dela $[a, b]$ tartean eta $f(a) \cdot f(b) < 0$ betetzen dela; orduan, (i) propietatearen arabera p balio bat existitzen da (a, b) tartean, non $f(p) = 0$ baita. Suposa dezagun, orobat, tarte horretan erro hori baino ez dagoela.

Lehendabizi, $a = a_1$ eta $b = b_1$ izendatuko dira, eta emandako tartea bi zati berdinetan bereiziko da; $[a, b] = [a_1, p_1] \cup [p_1, b_1]$, non $p_1 = (a_1 + b_1)/2$ erdiguneko balioa baita. Orain, hasierako tartearen luzera-erdiko azpitarte batean egongo da p erroa, eta zein den jakiteko, $f(a_1) \cdot f(p_1)$ balioztatzen da. Baldin azken balio hori negatiboa bada, orduan lehenengo azpitartean egongo da eta, ondorioz, prozesua $[a_2, b_2]$ tartean errepikatu behar da, tarte horretarako $a_2 = a_1$ eta $b_2 = p_1$ hartuz; bestela, $a_2 = p_1$ eta $b_2 = b_1$ izendatu beharko dira. Iterazio bakoitzean dagoen tartearen luzera erdibitu egiten da, eta, n iterazio burutu ondoren, $[a_n, b_n]$ -ren luzera $(b - a)/2^{n-1}$ izango da. Noski, $p \in [a_n, b_n]$ dagoenez, erroa $|p_n - p| \leq (b - a)/2^n$ izango da. Beraz, n handituz, erroa gero eta txikiagoa egiten da. Hori formaliza daiteke teorema honetan:



4.1. irudia. Bisekzio metodoa.

4.1. teorema. Demagun $f \in C[a, b]$ eta $f(a)f(b) < 0$ dela. Izan bedi $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ segida, non $p_n = (a_n + b_n)/2$ baita. Orduan, badago $p \in (a, b)$ puntu bat, non $f(p) = 0$, hau betetzen duena:

$$\varepsilon_n = |p - p_n| \leq \frac{b - a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

eta, bereziki, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$.

Frogapena. Metodoaren deskriptiotik (4.2) lortzen da. Bestalde, hau betetzen da:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p - p_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0,$$

eta horrek $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ inplikutzen du. \square

Aurreko teoremaren arabera, hasierako $\tau > 0$ tolerantzia bat (errorearen goi-borne bat) jar dezakegu, eta $\varepsilon_n < \tau$ denean bukatutzat eman prozesua. Bestalde, prozesua mozteko beti jar dezakegu iterazioen n_{max} kopuru maximo bat; hots, $n = n_{max}$ denean, prozesua bukatzen da eta p_n -rekin geratzen gara.

4.3. adibidea. Bisekzio algoritmoa erabiliz, kalkulatu $e^x = \sin x$ ekuazioaren soluzioa $x \in [-4, -3]$ tartean, errorearen tolerantzia 0.01 izanik.

Ebazpena. Izan bedi $f(x) = e^x - \sin x$; orain, ekuazioaren soluzio bat f funtzioaren erro bat izango da. Hasteko, $[a_1, b_1] = [-4, -3]$, $f(a_1) = f(-4) < 0$ eta $f(b_1) = f(-3) > 0$ direnez, $[-4, -3]$ tartean gutxienez erro bat dago.

Jarraian, $[-4, -3]$ tartea erdibituko dugu. Erdigunea $p_1 = -3.5$ da; $[-4, -3] = [-4, -3.5] \cup [-3.5, -3]$, $f(p_1) = f(-3.5) < 0$ denez, $[a_2, b_2] = [-3.5, -3]$ tartean egongo da erroa.

4.1. taula. Bisekzio metodoa.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	-4	-3	-3.5	-0.3206
2	-3.5	-3	-3.25	-0.0694
3	-3.25	-3	-3.125	0.0605
4	-3.25	-3.125	-3.1875	-0.0046

Orain, tartearen erdigunea $p_2 = -3.25$ da; $[-3.5, -3] = [-3.5, -3.25] \cup [-3.25, -3]$, $f(p_2) = f(-3.25) < 0$ denez, $[a_3, b_3] = [-3.25, -3]$ tartean egongo da erroa.

Eta horrela jarraituz, nahi dugun bezainbeste hurbilduko gara errorantz.

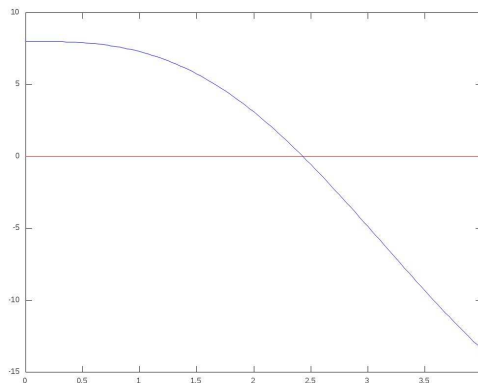
Beraz, lau iterazio egin ondoren lorturiko soluzio hurbildua $x = -3.1875$ da, eta $|-0.0046| = 0.0046 < 0.01$ sortzen den erroa. \square

Bisekzio metodoari buruzko oharra

Alde batetik, bisekzio metodoak bi eragozpen nabari ditu, eta hauexek dira: bata, metodoa astiro hurbiltzen dela soluziorantz, eta bestea, hurbildu bitartean alde batean utz ditzakeela hurbilketa onak. Beste aldetik, metodo honek soluziorantz jotzen du, eta, horregatik, erabilgarria da hasierako estimazio bat asmatzeko, eta, jarraian, beste metodo eraginkorrago bat aplikatu ahal izateko. Metodo horrek huts egin dezake p puntuan, baldin abszisa $y = f(x)$ kurbaren zuzen ukitzaila bada eta kurbak abszisa ez badu zeharkatzen.

4.4. adibidea. *Idatzi MATLAB programa bat, instrukzioen M-fitxategi bat, $8 - 4.5(x - \sin(x)) = 0$ ekuazioaren soluzioa aurkitzeko, bisekzio metodoa erabiliz. Soluzioaren errore-tolerantziak 0.001 rad izan behar du (hots, errorea < 0.001). Sortu taula bat, non bisekzio prozesuko iterazio bakoitzean a , b , p_n , $f(p_n)$ eta errorea agertzen baitira.*

Ebazpena. Soluzioaren hasierako hurbiltze bat egiteko, $f(x) = 8 - 4.5(x - \sin(x))$ marrazten dugu, MATLABen `fplot` instrukzioa erabiliz. Horrek $x = 2$ ren eta $x = 3$ ren artean soluzioa dagoela erakusten digu. Beraz, $a = 2$ eta $b = 3$ muturrekin aukeratuko da hasierako tartea.



4.2.3. *Regula falsi* metodoa

Metodo honen beste izen batzuk dira posizio faltsuaren eta interpolazio linealaren metodoak. Bisekzio metodoan bezala, $[a, b]$ tartean f jarraitua da, $f(a) \cdot f(b) < 0$ eta, beraz, $f(x) = 0$ -k erro bat dauka tarte horretan. Bisekzio metodoan, hurrengo urratsa emateko, $[a, b]$ tartearen erdigunea erabiltzen da. Izan bedi $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ puntuetatik igarotzen den $y = f(x)$ -ren L zuzen ebakitzailea. Oraingo metodoan hurbilpena hobetzen da, E zuzen horretako $(\bar{p}, 0)$ puntua erabiliz; hots, E -ren ebakitze-puntua abszisarekin. Orain \bar{p} aurkituko dugu. E -ren m malda kalkulatzeko, bi adierazpen hauek ditugu:

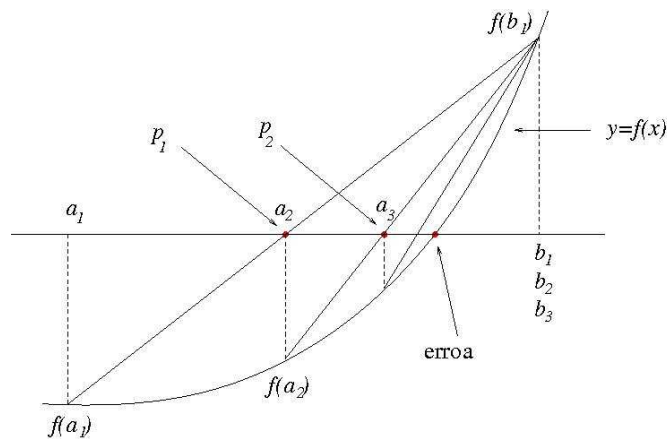
$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{eta} \quad m = \frac{0 - f(b)}{\bar{p} - b},$$

biak berdinduz,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - f(b)}{\bar{p} - b}$$

eta \bar{p} bakanduz formula hau ateratzen dugu:

$$\bar{p} = b - \frac{(b - a)}{f(b) - f(a)} f(b). \quad (4.3)$$



4.2. irudia. *Regula falsi* metodoa.

Hurrengo iteraziorako, metodo honen aukerak bisekzioaren berdinak dira, alegia:

- $f(a) \cdot f(\bar{p}) < 0$ bada, $[a, \bar{p}]$ tartean erro bat dago.
- $f(\bar{p}) \cdot f(b) < 0$ bada, $[\bar{p}, b]$ tartean erro bat dago.
- $f(\bar{p}) = 0$ bada, \bar{p} da $f(x)$ -ren erro bat.

Aurreko (4.3) formula erabil dezakegu, aukera horiekin batera $\{[a_n, b_n]\}$ tarteen segida sortzeko, horietako bakoitzak erro bat edukiz.

Regula falsi metodoari buruzko oharra

- Iterazio bakoitzean, hau izango da erroaren hurbilpena:

$$p_n = b_n - \frac{(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} f(b_n)$$

eta egiazta daiteke, goiko baldintzetan, $\{p_n\}$ -k jotzen duela funtzioaren p erro batera.

- Iterazioak geldituko dira $\varepsilon_n = |f(p_n)|$ erroa erabiltzaileak finkaturiko tolerantzia bat baino txikiago denean, edo iterazio kopurua ezarritako maximora heltzen denean.
- Sarritan, funtzioa gorako edo beherako ahurra da $[a, b]$ tartean; orduan, tartearen mutur bat finko geratzen da iterazio guztietan, beste muturrak errorantz jotzen duen bitartean. Hots, zenbakizko soluzioa errorantz doa, alde batetik bakarrik.

4.3. Metodo irekiak

4.3.1. Puntu finkoaren metodoa

Metodo irekiek formula bat erabiltzen dute erro bat iragartzeko. Horrelako formula garatu dezakegu *puntu finkoaren iterazioa* erabiliz, $f(x) = 0$ ekuazioa berrordenatuz ekuazioaren ezker aldean x izateko, alegia:

$$x = F(x) \tag{4.4}$$

Transformazio hori lor dezakegu manipulazio algebraikoaren bidez, edo x batuz jatorrizko ekuazioaren bi aldeetan. Orduan, (4.4) adierazpenaren bidez iragar daiteke x -rentzat balio berri bat, x -ren balio zahar batetik. Hots,

$$p_n = F(p_{n-1}) \tag{4.5}$$

Konbergentziaren analisisa

4.2. teorema. *Demagun $F \in C[a, b]$ dela.*

- (i) *$y = F(x)$ funtzioaren irudiak $y \in [a, b]$ betetzen badu, $x \in [a, b]$ puntu bakoitzeko, orduan, F -k puntu finko bat dauka $[a, b]$ tartean.*
- (ii) *Demagun, gainera, $F'(x)$ definituta dagoela (a, b) tartean eta $|F'(x)| < 1$ dugula, $x \in (a, b)$ denean; orduan, F -k puntu finko bakar bat dauka $[a, b]$ tartean.*

(i)-ren frogapena. $F(a) = a$ edo $F(b) = b$ bada, ondorioa egia da. Demagun, orduan, $F(a) \in (a, b]$ eta $F(b) \in [a, b)$ egiaztatzen direla. $f(x) = x - F(x)$ funtzioak propietate hau dauka:

$$f(a) = a - F(a) < 0 \text{ eta } f(b) = b - F(b) > 0.$$

Bolzanoren teorema aplikatuz, badago $p \in (a, b)$ puntu bat non $f(p) = 0$ baita. Beraz, $p = F(p)$ eta p puntua $F(x)$ -ren puntu finkoa da.

(ii)-ren frogapena. Puntu finko bakar bat dagoela frogatu behar dugu. Aldiz, demagun bi puntu finko daudela, p_1 eta p_2 ($p_1 \neq p_2$); orduan, batez besteko balioaren teorema (Lagran-geren teorema) erabiliz, badago $d \in (a, b)$ puntu bat hau betetzen duena:

$$F'(d) = \frac{F(p_2) - F(p_1)}{p_2 - p_1}.$$

Baina bi puntu horiek puntu finkoak direnez, hau bete behar:

$$F'(d) = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = 1,$$

eta hori $|F'(x)| < 1$ teoremako baldintzaren kontraesana da. Beraz, ezin dira egon bi puntu finko desberdin. \square

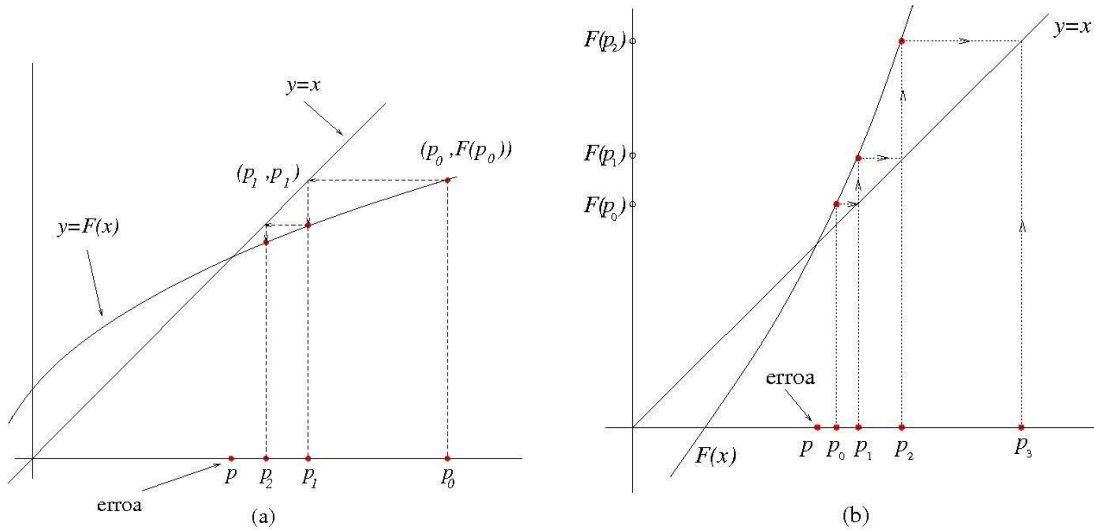
4.5. adibidea. *Frogatu $F(x) = \cos(x)$ funtzioak puntu finko bakar bat daukala $[0, 1]$ tartean.*

Ebazpena. Bistakoa da $F \in C[0, 1]$ dela. Gainera, $F(x) = \cos(x)$ funtzioa tarte horretan beherakorra denez, haren irudiak $F([0, 1]) = [\cos(1), 1] \subset [0, 1]$ betetzen du. Orduan aurreko teoremaren (i) atala betetzen du. Alegia, F -k puntu finko bat du $[0, 1]$ tartean. Azkenik, $x \in (0, 1)$ bada, $|F'(x)| = |-\sin(x)| = \sin(x) \leq \sin(1) \approx 0.8415 < 1$. Beraz, aurreko teoremaren (ii) baldintza betetzen da eta, ondorioz, bakarra da F -ren puntu finkoa $[0, 1]$ tartean. \square

4.3. teorema. (Puntu finkoaren teorema). *Demagun (a) $F, F' \in C[a, b]$, (b) $K > 0$, (c) $p_0 \in (a, b)$ eta (d) $F(x) \in [a, b]$, $x \in [a, b]$ guztietarako. Orduan, badago F -ren $p \in [a, b]$ puntu finko bat.*

(i) *Baldin $|F'(x)| \leq K < 1$, $x \in [a, b]$ guztietarako, orduan, p da F -ren puntu finko bakarra $[a, b]$ tartean eta $p_n = F(p_{n-1})$ iterazioak p puntura jotzen du. Kasu horretan, p puntu finko erakargarria dela esaten da.*

(ii) *Baldin $|F'(x)| > 1$ eta $p_0 \neq p$ badira, orduan, $p_n = F(p_{n-1})$ iterazioak ez du jotzen p puntura. Kasu horretan, p puntu finko aldaragarria dela esaten da eta iterazioak dibergentzia lokala du.*



4.3. irudia. (a) P. finko erakargarria ($|F'(x)| < 1$). (b) P. finko aldaragarria ($|F'(x)| > 1$).

(i)-ren frogapena. 4.2. teoremako (i) atalak eta oraingo teoremaren (a) eta (d) hipotesiek bermatzen dute F -k $[a, b]$ tartean puntu finko bat daukela. Bestalde, 4.2. teoremako (i) eta (ii) atalak erabiliz, (a)-(d) baldintzek inplikatzeko dute F -ren puntu finkoa bakarria dela $[a, b]$ tartean. Bestalde, indukzioz ikusiko dugun bezala, (c) eta (d) baldintzetatik ateratzen da $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ segidako puntu guztiak $[a, b]$ tartean daudela. Jarraian, p_0 -tik hasiz batez besteko balioaren teorema aplikatuko dugu, $c_0 \in (a, b)$ existitzen dela ateratzeko, hau egiaztatzen duena:

$$\begin{aligned} |p - p_1| &= |F(p) - F(p_0)| = |F'(c_0)(p - p_0)| = |F'(c_0)| \cdot |p - p_0| \\ &\leq K|p - p_0| < |p - p_0|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Beraz, p_1 p -tik hurbilago dago p_0 baino. Horrela arrazoituz, oro har, hau izango dugu:

$$\begin{aligned} |p - p_n| &= |F(p) - F(p_{n-1})| = |F'(c_{n-1})(p - p_{n-1})| = |F'(c_{n-1})| \cdot |p - p_{n-1}| \\ &\leq K|p - p_{n-1}| < |p - p_{n-1}|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Frogapena bukatzeko, hau betetzen dela ikusi behar dugu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p - p_n| = 0.$$

Lehenik, indukzioz (4.6)-(4.7) erlazioak erabiliz, hau erraz lortzen da:

$$|p - p_n| \leq K^n |p - p_0|. \quad (4.8)$$

Gainera, $0 < K < 1$ denez,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |p - p_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} K^n |p - p_0| = 0.$$

Ondorioz, $\lim_{n \rightarrow \infty} |p - p_n| = 0$, eta, orduan, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$.

(ii) frogapena ariketa gisa geratzen da. \square

Ohartu 4.3. teoremaren (i) ataleko baldintzak betetzen direnean (4.8) betetzen dela eta, ondorioz, puntu-finkoaren iteraziorako errorearen borne hau dugula:

$$|p - p_n| \leq K^n |p - p_0|, \quad n \geq 1 \text{ guztietarako}$$

4.6. adibidea. *Puntu finkoaren metodoa erabiliz, kalkulatu $\cos x - x = 0$ ekuazioaren soluzio hurbildu bat, errore-tolerantzia=0.0001 eta $p_0 = \pi/4 = 0.785398$ hartuz. Gehienez, hamar iterazio egin. (Errorea $|f(p_n)|$ da).*

Ebazpena. Kasu honetan, $f(x) = \cos x - x = 0$ ekuazioa dugu, eta $[0, \pi/2]$ tartean p erro bakar bat dauka, zeren eta $F(x) = \cos x$ funtzioak 4.2. teoremaren baldintzak betetzen baititu ($|F'(x)| = |-\sin(x)| < 1$ da $(0, \pi/2)$ tartean). Gainera, 4.3. teoremaren (i) ataleko baldintzak betetzen direnez, p puntu finko hori erakargarria da. Ondorioz, metodo hori konbergentea da.

n	p_n	$F(p_n)$	$f(p_n)$
0	0.785398	0.707107	0.078291
1	0.707107	0.760244	-0.053137
2	0.760244	0.724668	-0.035576
3	0.724668	0.748720	-0.024052
4	0.748720	0.732561	-0.016159
5	0.732561	0.743464	-0.010903
6	0.743464	0.736128	-0.007336
7	0.736128	0.741074	-0.004945
8	0.741074	0.737744	-0.003330
9	0.737744	0.739988	-0.002244

4.2. taula. Puntu finkoaren iterazioak.

Hona hemen puntu finkoaren iterazioa:

$$p_n = F(p_{n-1}) = \cos(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

Beraz, hamar iterazio egin ondoren, ez dugu lortu nahi genuen soluzio hurbildua. Iterazio gehiago eginez gero, eskatutako soluzio hurbildura helduko da. Zenbat iteraziotan? \square

4.3.2. Konbergentziaren ordena

Segida baten konbergentzia neurtzeko erabiltzen den kontzeptu bat da. Askotan segida hori algoritmo batek sortutakoa da. Demagun $\{x_n\} \rightarrow x^*$ segida konbergentea. Orduan, hau

betetzen da:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| = 0.$$

4.1. Definizioa. *Konbergentzia **Q-lineala** dela esango dugu $r \in [0, 1)$ konstante bat existitzen bada, non hau betetzen baita:*

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} \leq r, \quad k \text{ nahiko handi baterako.}$$

Horrek esan nahi du iterazio bakoitzean x^* -rainoko distantzia gutxienez txikitzen dela faktore konstante batean. Adibidez, $\{1 + (0.5)^k\} \rightarrow 1$ segidak konbergentzia Q-lineala du. Horren frogapena ariketa gisa geratzen da.

4.2. Definizioa. *Konbergentzia **Q-superlineala** dela esango dugu $\{r_k\} \rightarrow 0$ segida bat existitzen bada, non hau betetzen baita:*

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} \leq r_k.$$

Hots, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = 0$ denean.

Adibidez, $\{1 + k^{-k}\} \rightarrow 1$ segidak konbergentzia Q-superlineala du. Horren frogapena ariketa gisa geratzen da.

4.3. Definizioa. *Konbergentzia **Q-koadratikoa** dela esango dugu $r \geq 0$ konstante bat existitzen bada, non hau betetzen baita:*

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} \leq r, \quad k \text{ nahiko handi baterako.}$$

Kasu honetan r konstanteak ez du izan behar 1 baino txikiagoa. Adibidez, $\{1 + (0.5)^{2^k}\} \rightarrow 1$ segidak konbergentzia Q-koadratikoa du. Horren frogapena ariketa gisa geratzen da.

4.4. Definizioa. *Oro har, konbergentzia **Q-konbergentzia ordena p gutxienez** dela esango dugu $r \geq 0$ konstante bat existitzen bada, non hau betetzen baita:*

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} \leq r, \quad k \text{ nahiko handi baterako.}$$

Oro har, “Q” ez da idazten (Q “quotient” hitzetik dator). Puntu finkoaren metodoaren konbergentzia (konbergente denean) lineala da (ikus (4.7) adierazpena).

4.3.3. Newton-Raphson-en metodoa

Metodo hau (Newtonen metodoa ere esaten zaio) oso azkarra da, baina badu arazo bat: hasierako puntuak errotik nahiko hurbil egon behar du.

Oinarri analitikoak Tayloren serie-garapenean datza. Izan bedi $f \in C^2[a, b]$, non p erroa baita eta $p_0 \in [a, b]$ haren hurbilketa on bat. Orduan, $|p_0 - p|$ txikia eta $f(p_0) \neq 0$ izango dira. Funtzio horren p_0 -ren inguruneko Tayloren garapena hau da:

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0)f'(p_0) + \frac{1}{2}(x - p_0)^2 f''(c)$$

non c balioa p_0 eta x -ren artean baitago. Beraz, $f(p) = 0$ bete behar denez, hau lortuko dugu:

$$f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2 f''(c) = 0 \Rightarrow 0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

Baina, azken ondorioa lortzeko, $(p - p_0)^2 f''(c)/2$ batugaia ezabatu dugu, baztergarria dela suposatzen baita; izan ere, $|p - p_0|$ tartea nahiko txikia dela jo dugu. Arrazoi horretan datza, hain zuzen ere, metodoaren baldintza.

Beraz, $f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) \approx 0$ dela joz eta p askatuz, $p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = p_1$ hurbilketa lortzen dugu. Iterazio hori errepikatuz, metodoaren iterazio-formula hau lortuko dugu:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad (4.9)$$

Newtonen iterazioa puntu finkoaren iterazioa da, iterazio funtzio honetarako:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Ohartu p errorako $p = F(p)$ dela. Kasu honetan, $f'(p) \neq 0$ hartuz, zera dugu:

$$F'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Hipotesiaz $f(p) = 0$ denez, $F'(p) = 0$ dugu. Beraz, $[a, b]$ tartean $F'(x)$ jarraitua denez eta $F'(p) = 0$, badago p -ren $(p - \delta, p + \delta)$ ingurune bat non $|F'(x)| < 1$ den. Ondorioz, 4.3. teoremako (i) atalaren arabera, iterazio hori konbergentea da p_0 ingurune horretako puntu bat bada. Baina, zein da haren konbergentzia-ordena? Jarraian erantzungo dugu.

4.4. teorema. (Newtonen teorema.) *Izan bedi $f \in C^2[a, b]$. Demagun $\rho > 0$ baterako $|f'(x)| > \rho$ betetzen dela $x \in [a, b]$ guztietarako, eta p_0 puntua p -tik nahiko hurbil dagoela (goiko parrafoaren zentzuan). Orduan, $f(x) = 0$ ekuazioak $p \in [a, b]$ soluzio bat badauka, $\eta > 0$ bat existitzen da, non: $|p_0 - p| < \eta$ bada, (4.9) adierazpenak sortutako $\{p_n\}$ segidak p puntura jotzen baitu konbergentzia koadratikoarekin.*

Frogapena. $n = 1$ -erako hau dugu:

$$\begin{aligned} p_1 - p &= p_0 - p - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = p_0 - p - \frac{f(p_0) - f(p)}{f'(p_0)} \\ &= \frac{1}{f'(p_0)} [f(p) - f(p_0) - f'(p_0)(p - p_0)]. \end{aligned}$$

Makoen arteko gaia Tayloren garapenaren $O(|p - p_0|^2)$ hondarra da (ikus 3.4.5. azpiatala); hots, badago $M > 0$ zenbaki bat hau betetzen duena:

$$|f(p) - f(p_0) - f'(p_0)(p - p_0)| \leq M|p - p_0|^2.$$

M hori nahiko handia hartuko dugu $|f''(x)/2| < M$ bete dadin $[a, b]$ tartean ere ($f''(x)$ jarraitua denez, bornatua da $[a, b]$ tartean). Ondorioz,

$$|p_1 - p| \leq \frac{M}{|f'(p_0)|} |p_0 - p|^2 \leq \frac{M}{\rho} |p_0 - p|^2$$

$n = 2$ denean, hau dugu:

$$|p_2 - p| \leq \frac{M}{|f'(p_1)|} |p_1 - p|^2 \leq \frac{M}{\rho} |p_1 - p|^2$$

Horrela, $r = M/\rho$ bada, $n = 1, 2, \dots$ guztietarako emaitza honetara heltzen gara:

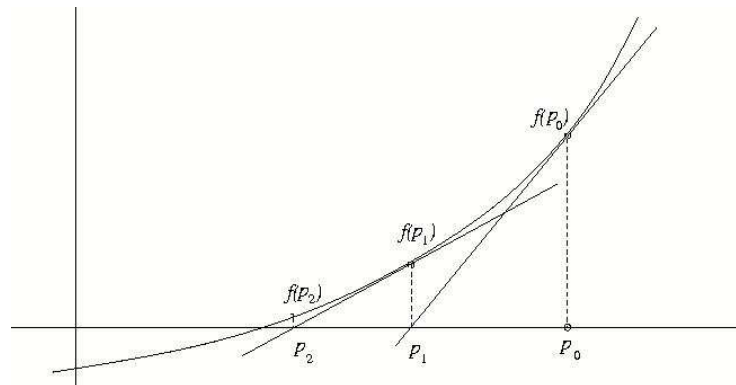
$$|p_n - p| \leq r|p_{n-1} - p|^2.$$

Hori dela eta, ondorio hau lortuko dugu:

$$\frac{|p_n - p|}{|p_{n-1} - p|^2} \leq r.$$

Beraz, $r|p_{n-1} - p| < 1$ bada, $|p_n - p| < |p_{n-1} - p|$ dugu eta hori $n = 1, 2, \dots$ guztietarako beteko da, p_0 puntua p -tik nahiko hurbil badago $r|p_0 - p| < 1$ betetzeko (hots, baldin $\eta \leq 1/r$ bada $p_0 \in (p - \eta, p + \eta)$ hartuz). Ondorioz, p_0 hasierako puntua p erroitik nahiko hurbil hartuz gero, $\{p_n\} \rightarrow p$ dugu konbergentzia koadratikoarekin. \square

Geometrikoki, metodoak hau egiten du: OX ardatza ebakitzen duen $y = f(x)$ kurbaren ordez, $(p_0, f(p_0))$ puntutik pasatzen den kurbaren zuzen ukitzailea erabiltzen du. Gero, ebakidura OX -rekin ($y = 0$ -rekin) kalkulatu da, eta, hala, p_1 puntua lortzen da. Teknika hori errepikatuz, $(p_n, f(p_n))$ puntutik pasatzen den $f(x)$ -ren ukitzailearen ekuazioa lortzen da, hots, $y - f(p_n) = f'(p_n)(x - p_n)$. Orain, OX ardatzarekin ($y = 0$ -rekin) ebakiz, x aska daiteke. Ondorioz, $x = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$ lortzen da eta $p_{n+1} = x$. Begira ezazu 4.4. irudia.



4.4. irudia. Newtonen metodoa.

4.1. algoritmoa. Newtonen algoritmoa.

0 urratsa. SARRERA. Sartu: $f(x)$ funtzioa, $f'(x)$ funtzioa, p_0 hasierako hurbilpena, ε_{max} errorearen tolerantzia, ze_{max} eskatutako zehaztasun erlatiboa eta i_{max} iterazioen kopuru maximoa.

1 urratsa. Jarri $i = 0$ eta definitu:

$$\begin{aligned} fp_0 &= f(p_0); \\ dfp_0 &= f'(p_0); \\ \varepsilon &= |fp_0|; \\ ze &= ze_{max} + 1; \end{aligned}$$

2 urratsa. $i \leq i_{max}$ eta $\varepsilon > \varepsilon_{max}$ eta $ze > ze_{max}$ diren bitartean, egin hau:

(a) Kalkulatu p honela:

$$p = p_0 - fp_0/dfp_0;$$

(b) Egin hau:

$$\begin{aligned} p_{zaharra} &= p_0; \\ p_0 &= p; \\ fp_0 &= f(p_0); \\ dfp_0 &= f'(p_0); \end{aligned}$$

(c) Egin $i = i + 1$;

(d) Kalkulatu zehaztasun erlatiboa: $ze = |p_0 - p_{zaharra}|/|p_0|$;

(e) Kalkulatu errorea: $\varepsilon = |fp_0|$;

3 urratsa. IRTEERA. Emaitzak: p erroa, i erabilitako iterazioen kopurua, ze zehaztasun erlatiboa eta ε errorea.

4.7. adibidea. *Newtonen metodoa erabiliz, kalkulatu $x = \cos x$ ekuazioaren soluzio hurbildu bat, errore-tolerantzia 0.00001 hartuz.*

Ebazpena. Izan bedi $f(x) = \cos x - x$. Orain, $f(x)$ -ren erro bat aurkitu behar dugu. Baina, lehendabizi, soluzio bat bakartu behar dugu tarte batean. Horretarako, alde aurretik ikusitako (ii) propietatea (Bolzanoren teorema) erabiliko dugu. Orduan, $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ eta $f(0) = 1 > 0$ direnez, funtzioak gutxienez erro bat dauka $(0, \pi/2)$ tartean (grafikoki ikus daiteke erro bakarra dela). Hona hemen Newtonen iterazioa kasu horretan:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}}{-\sin(p_{n-1}) - 1}, \quad n \geq 1$$

p_0 geometriaren arabera hautatuko dugu. Kasu honetan, $p_0 = \pi/4 = 0.785398$ egokia dela ikus daiteke.

n	p_n	$f(p_n)$
0	0.785398	0.078291
1	0.739542	0.000765
2	0.739085	$-2.2 \cdot 10^{-7}$

4.3. taula. Newtonen iterazioak.

Beraz, bi iterazio egin ondoren, $x = 0.739085$ dugu ekuazioaren soluzio hurbildua. \square

4.8. adibidea. *Newtonen metodoa erabiliz eta $p_0 = -3$ hartuz, kalkulatu $e^x = \sin x$ ekuazioaren soluzio hurbildu bat errore-tolerantzia 0.0001 hartuz.*

Ebazpena. Hemen $f(x) = e^x - \sin x$ dugu eta

$$p_n = p_{n-1} - \frac{e^{p_{n-1}} - \sin(p_{n-1})}{e^{p_{n-1}} - \cos(p_{n-1}) - 1}, \quad n \geq 1$$

n	p_n	$f(p_n)$
0	-3.0000	0.1909
1	-3.1836	-0.000559
2	-3.1831	$-3.8 \cdot 10^{-5}$

4.4. taula. Newtonen iterazioak.

Beraz, bi iterazio egin ondoren, $x = -3.1831$ dugu ekuazioaren soluzio hurbildua. \square

Newtonen metodoari buruzko oharra

- Ikusi dugun bezala, metodo hau konbergente izateko, hasierako puntuak p soluziotik nahiko hurbil egon behar du; horrelako metodo bati *metodo lokala* deritzogu.
- Oro har, metodoak konbergentzia arazoak izaten ditu p soluzioaren ingurune batean $f'(x) \approx 0$ denean. Ariketa gisa, aurkitu $x^{10} - 1 = 0$ ekuazioaren erro positibo bat $p_0 = 0.5$ hartuz. Zer gertatzen da?
- Erroa anizkoitza denean, konbergentzia lineala da. Demagun $f(x) = (x - p)^m G(x)$ funtzioa dugula eta $G(p) \neq 0$; orduan, $|p_n - p|/|p_{n-1} - p| \approx 1 - \frac{1}{m}$ da n nahiko handi baterako. Beraz, anizkoitzasuna handitzen den heinean, konbergentzia motelago bihurtzen da. Horrelako kasuetan, oso egokia da $f(x)$ funtzioaren ordez $g(x) = f(x)/f'(x)$ funtzioa hartzea; horrek *Newtonen metodo orokortua* ondorioztatzen du. Adibidez, $f(x) = x^3 - 3x + 2$ funtzioak erro bikoitza du $x = 1$ puntuan. Aztertu gertatzen dena Newtonen metodoa erabiltzen badugu erroa kalkulatzeko $p_0 = 1.2$ hartuz. Geroago, erabili Newtonen metodo orokortua.
- Hasierako balioa, p_0 , errotik nahiko urrun badago, gerta daiteke metodoa konbergente ez izatea. Adibidez, $f(x) = xe^{-x}$ kasuan, bistan da erroa $p = 0$ dela. Aztertu gertatzen dena $p_0 = 2$ hartzen badugu.
- Beste gertaera berezi bat *periodikotasuna* da; hori gertatzen da $\{p_n\}$ segidaren gaiak periodikoki errepikatzen (edo ia errepikatzen) hasten direnean. Adibidez, aztertu $f(x) = x^3 - x - 3$ eta $p_0 = 0$ hartzen dugunean.
- $|F'(x)| > 1$ betetzen bada p erroa daukan tartean, orduan, oszilazio dibergente bat gerta daiteke. Adibidez, $f(x) = \arctan(x)$ funtzioa $p_0 = 1.45$ hartuz. Aztertu kasu hori.

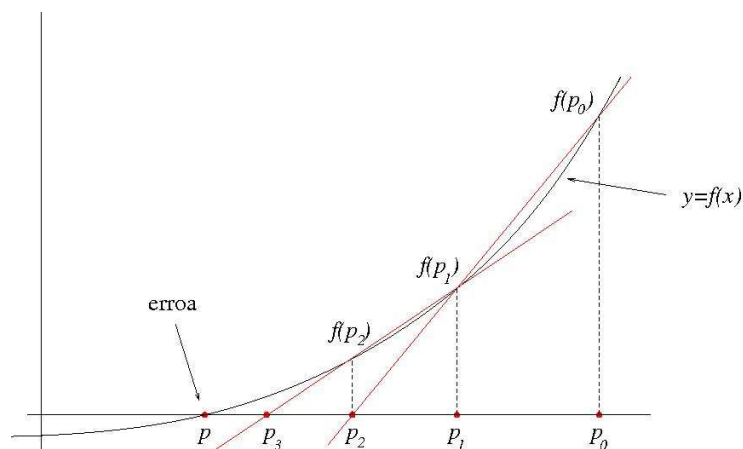
4.3.4. Ebakitzailaren metodoa

Batzuetan, ezin da $f'(x)$ deribatua kalkulatu iterazioaren formularen ordezkatzeko; orduan, zenbakizko metodoak erabiliz malda zehaztu dezakegu. Hots, Newtonen metodoaren ordez *ebakitzailaren metodoa* erabiliko dugu. Kasu horietan deribatua hurbil dezakegu adierazpen honen bitartez:

$$f'(p_k) \approx \frac{f(p_k) - f(p_{k-1})}{p_k - p_{k-1}},$$

orduan, Newtonen ekuazioan ordezkatuz $k = n - 1$ -erako,

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \quad (4.10)$$



4.5. irudia. Ebakitzailearen metodoa.

Adierazpen horretan ikusten den bezala, hasierako bi puntu behar ditugu. Hau da, p_0 eta p_1 puntuek errotik nahiko hurbil egon behar dute (Newtonen metodoan bezala); p_2 izango da lortuko duguna 1. iterazioan.

Newtonen metodoan, beste aukera bat da deribatua hurbiltzea oraingo iterazioa zertxobait aldatuz, alegia:

$$f'(p_k) \approx \frac{f(p_k + \delta) - f(p_k)}{\delta},$$

non $\delta > 0$ balio txiki bat baita, eta, orduan, *ebakitzailearen metodo aldatua* izango dugu:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\delta \cdot f(p_{n-1})}{f(p_{n-1} + \delta) - f(p_{n-1})} \quad (4.11)$$

Ebakitzailearen metodoari buruzko oharrak

- Metodo hau Newtonen metodoaren deribatu gabeko hurbilpen bat denez (batez ere (4.11) iterazioa erabiltzen badugu), konbergentziaren ordena α da, non:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

urrezko ratioa baita. Bereziki, konbergentzia superlineala da, baina ez da heltzen koardatikoa izatera. Konbergentziaren ordena 1.618 da baldin $f \in C^2$ bada, p erro bakun (hots, anizkoiztasuna=1) bada baten ingurune batean, eta p_0, p_1 hasierako puntuak p -tik nahiko hurbil daudenean.

- Baina, $\bar{p} \in [p_0, p_1]$ puntu baterako $f'(\bar{p}) = 0$ bada, algoritmoa baliteke konbergente ez izatea.

4.2. algoritmoa. Ebakitzabilearen algoritmoa.

0 urratsa. SARRERA. Sartu: $f(x)$ funtzioa, p_0 eta p_1 hasierako hurbilpenak, ε_{max} erro-
rearen tolerantzia, ze_{max} eskatutako zehaztasun erlatiboa eta i_{max} iterazioen kopuru
maximoa.

1 urratsa. Jarri $i = 1$ eta definitu:

$$\begin{aligned}q_0 &= f(p_0); \\q_1 &= f(p_1); \\ \varepsilon &= |q_1|; \\ ze &= |p_1 - p_0|/|p_1|;\end{aligned}$$

2 urratsa. $i \leq i_{max}$ eta $\varepsilon > \varepsilon_{max}$ eta $ze > ze_{max}$ diren bitartean, egin hau:

(a) Kalkulatu p honela:

$$p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0);$$

(b) Egin hau:

$$\begin{aligned}p_0 &= p_1; \\p_1 &= p; \\q_0 &= q_1; \\q_1 &= f(p_1);\end{aligned}$$

(c) Egin $i = i + 1$;

(d) Kalkulatu zehaztasun erlatiboa: $ze = |p_1 - p_0|/|p_1|$;

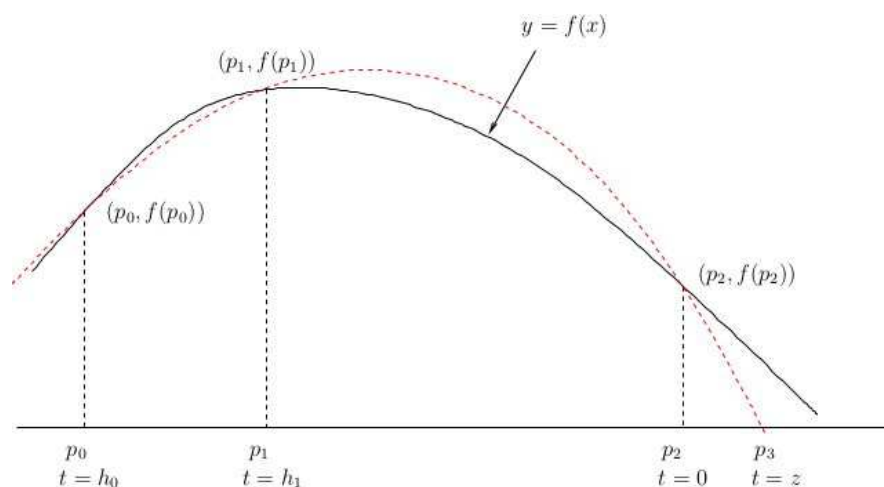
(e) Kalkulatu errorea: $\varepsilon = |q_1|$;

3 urratsa. IRTEERA. Emaitzak: p erroa, i erabilitako iterazioen kopurua, ze zehaztasun
erlatiboa eta ε errorea.

4.3.5. Muller-en metodoa

Ebakitzabilearen metodoak aurreko bi puntu erabiltzen ditu puntu berri bat lortzeko. Zergatik ez ditugu erabiltzen hiru puntu?

Metodo honi *Mulleren metodoa* deritzogu. Demagun iterazioen hasieran $(p_0, f(p_0))$, $(p_1, f(p_1))$ eta $(p_2, f(p_2))$ hiru puntuak ditugula. Orduan, hiru puntu horietatik pasatzen den parabola bakarra eraikitzen dugu eta, abszisa ardatzarekin ebakitze-puntua kalkulatu, hurrengo p_3 puntua izango dugu. Jo dezagun p_2 erroaren hurbilpen hoberena dela, eta demagun hiru puntuetatik igarotzen den 4.6. irudiko parabola dela.



4.6. irudia. Mulleren metodoa.

Izan bitez $t = x - p_2$ aldagai-aldaketa, eta $h_0 = p_0 - p_2$ eta $h_1 = p_1 - p_2$ diferentziak. Izan bedi $y = at^2 + bt + c$ polinomio koadratikoa. Hiru puntu horietatik igarotzen den parabolaren ekuazioko a , b eta c koefizienteak kalkulatuko ditugu. Puntu bakoitzeko, hau dugu:

$$\begin{aligned} p_0 - \text{rako } t = h_0 \text{ da eta hau bete behar: } & ah_0^2 + bh_0 + c = f(p_0), \\ p_1 - \text{erako } t = h_1 \text{ da eta hau bete behar: } & ah_1^2 + bh_1 + c = f(p_1), \\ p_2 - \text{rako } t = 0 \text{ da eta hau bete behar: } & a0^2 + b0 + c = f(p_2). \end{aligned}$$

Hau da sistema horren soluzioa:

$$c = f(p_2),$$

$$a = \frac{e_0 h_1 - e_1 h_0}{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2},$$

$$b = \frac{e_1 h_0^2 - e_0 h_1^2}{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2},$$

non $e_0 = f(p_0) - c$ eta $e_1 = f(p_1) - c$. Orain, parabola horren $t = z_1, z_2$ erroak formula hau erabiliz lortzen dira:

$$z = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Dakigunez, formula hori da bigarren mailako ekuazioen erroak aurkitzeko dugun ohiko formularen baliokidea; baina kasu honetan hobe da hura erabiltzea, jada ezagutzen baitugu $c = f(p_2) \approx 0$ dela eta, ondorioz, $b \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$.

Metodoaren egonkortasuna ziurtatzeko, balio absolutu txikiena duen erroa aukeratu dugu. Beraz, $b > 0$ bada, zeinu positiboa aukeratu dugu erro karraturako. Aldiz, $b < 0$ bada, zeinu negatiboa aukeratu dugu erro karraturako. Puntu berria hau izango da:

$$p_3 = p_2 + z.$$

Orduan, p_0 eta p_1 puntu berriak $\{p_0, p_1, p_2\}$ puntu zaharren artean aukeratuko ditugu eta p_3 -tik hurbilenak izango dira; p_2 berria p_3 izango da.

Prozesu hau errepikatuz, iterazio-segida bat lortzen da, eta horrek, baldintza egokietan, $f(x)$ funtzioaren errora joko du. Mulleren metodoak arazo larriak izan ditzake, ez badira desberdinak $f(p_1)$, $f(p_2)$ eta $f(p_3)$. Hala ere, errotik nahiko hurbil badago, oso azkarra da; haren konbergentzia-ordena 1.84 da. Ebakitzailarena 1.62 da eta Newtonen metodoarena 2 (erro bakunen kasurako).

Gerta daiteke sortutako parabolak x ardatza ez ukitzea; orduan, erro konplexuak izango ditugu non alde irudikaria txikia baita alde errealekin konparatuta. Kasu horretan, alde irudikaria kentzen da eta prozesuarekin jarraitzen da.

4.3.6. Alderantzizko interpolazio koadratikoa

Metodo honetan, x -rekiko koadratikoa izan beharrean, y -rekiko izango da. Hots, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ eta $(c, f(c))$ hiru puntuak ezagutuz, alderantzizko funtzioarekin arituko gara; lortuko dugun polinomio koadratikoa $P(y)$ motakoa izango da, eta interpolazio-baldintza hauek erabiliz zehaztuko dugu:

$$a = P(f(a)), \quad b = P(f(b)), \quad c = P(f(c)).$$

Parabola honek beti ebakitzen du x ardatza; hots, $y = 0$. Beraz, $x = P(0)$ da hurrengo iterazioa. Metodo honi AIK izen laburtua emango diogu. MATLABen kodean; hau izan liteke:

```
k=0;
while abs(c-b) > eps*abs(c)
    x = polyinterp([f(a),f(b),f(c)], [a,b,c],0)
    a = b;
    b = c;
    c = x;
    k = k+1;
end
```

Metodo horren arazoa zera da; interpolazio-polinomioak $f(a)$, $f(b)$ eta $f(c)$ desberdinak izatea eskatzen du. Baina, guk ez dugu berme hori. Adibidez, kalkulatu nahi badugu $\sqrt{2}$ balioa $f(x) = x^2 - 2$ funtzioa erabiliz, eta $a = -2$, $b = 0$ eta $c = 2$, orduan, $f(a) = f(c)$ eta lehenengo urratsa ez dago definituta. Aldiz, $a = -2.001$, $b = 0$ eta $c = 1.999$ balioekin hasten bagara, hurrengo iterazioa $x = 500$ izango da.

4.3.7. Zeroin algoritmoa

Metodo honetan, bisekzioaren konbergentziarekiko fidagarritasuna, ebakitzaille metodoaren konbergentzia azkartasuna eta AIK metodoa konbinatzen dira. Dekker-ek eta Brent-ek garatu zuten algoritmo honen lehenengo bertsioa (ikus [3, 6]); gero bertsioek asko hobetu dute algoritmo hori. Hona hemen algoritmoaren laburpen bat:

4.3. algoritmoa. Zeroin algoritmoa.

a eta b emanda, puntu horietarako $f(a) \cdot f(b) < 0$ betetzen da; beraz, f jarraitua bada $[a, b]$ -n, erroa tartearen barnean dago.

- Erabili ebakitzaillearen iterazioa, a eta b -ren arteko c lortzeko.
- Gero, errepikatu honako urrats hauek, $|b - a| < \varepsilon|b|$ edo $f(b) = 0$ bete arte:

1 urratsa. Ordenatu a , b eta c honela:

- ▷ $f(a)$ -k eta $f(b)$ -k zeinu desberdinak dituzte.
- ▷ $|f(b)| \leq |f(a)|$.
- ▷ c beti da aurreko iterazioko b -ren balioa.

2 urratsa. $c \neq a$ bada, AIK iterazioa kalkulatu dugu.

3 urratsa. $c = a$, ebakitzaillearen iterazioa kalkulatu dugu.

4 urratsa. AIKrena edo ebakitzaillearena $[a, b]$ -n badago, hartu egingo dugu; ez bada horrela, bisekzioaren metodoa erabili hurrengo iterazioa lortzeko.

Algoritmo honen implementazioa MATLABeko `fzero` funtzioa da, eta eraginkortasun handia du ekuazio ez-linealen erroen kalkuluan. Ohartu ez duela deribaturik erabiltzen. Adibidez, `fzero('x-0.5*sin(x)-0.7',1)` instrukzioaren emaitza 1.1580 da eta $f(1.1580) = -1.1102 \times 10^{-16}$.

Honela ere idatz daiteke: `fzero('x-0.5*sin(x)-0.7',[1,2])`, non $[1,2]$ tarteari erro bat izan behar baitu, bestela errore-mezu bat emango du.

Badago `root` funtzioa ere; `r=root(1,-6,5)` idazten badugu, $p(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$ ekuazioaren erroak emango dizkigu, honela: $\mathbf{r} = (1, 5)$; hots, \mathbf{r} bektoreak $p(x)$ polinomioaren erroak gordeko ditu.

4.4. Algoritmoak gelditzeko irizpideak

Hauek izaten dira algoritmo horiek gelditzeko irizpideak:

1. Errorrea, ε , aldez aurretik finkatutako $\varepsilon_{max} > 0$ errorearen tolerantzia baino txikiagoa izatea, alegia:

$$\varepsilon = |f(p_n)| < \varepsilon_{max}.$$

2. Ondoz ondoko bi iterazioen arteko diferentzia (zehaztasun absolutua) nahiko txikia izatea; hots, zehaztasun absolutua aldez aurretik finkatutako $za > 0$ tolerantzia baino txikiagoa izatea, alegia:

$$|p_n - p_{n-1}| < za.$$

3. Bi iterazioen arteko zehaztasun erlatiboa nahiko txikia izatea; hots, diferentzia erlatibo hori aldez aurretik finkatutako $ze > 0$ zehaztasun erlatiboa baino txikiagoa izatea, alegia:

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < ze.$$

Hau da $p_n \approx 0$ -ren arazoa gainditzeko erabil dezakegun beste zehaztasun mota bat:

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{1 + |p_n|} < ze.$$

Ohartu $p_n = 0$ bada, zatidura hori zehaztasun absolutua dela.

4. Iterazioen kopuru maximo bat, n_{max} , finkatzea. Alegia, hau bada:

$$n > n_{max},$$

algoritmoa gelditu egingo da.