euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco
eman ta zabal zazu

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA

SEGUNDA CONVOCATORIA 2011-2012

EJERCICIO 1

Tres máquinas A, B y C producen el 40%, 35% y 25%, respectivamente, del total de piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 1%, 2% y 3%, respectivamente.

Sean los sucesos $D \triangleq$ "La pieza está defectuosa" y $X \triangleq$ "La pieza está fabricada en la máquina X = A, B, C".

(1º) Seleccionada una pieza al azar, hallar la probabilidad de que sea defectuosa.

Usando el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$$\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C)=$$
$$\mathbb{P}(D)=0.40\times0.01+0.35\times0.02+0.25\times0.03=0.0185$$

(2º) Aleatoriamente, se toma una pieza y es defectuosa. Calcular la probabilidad de haber sido producida por la máquina A.

Aplicando el teorema de Bayes a la máquina, siendo el suceso $X_A \triangleq$ "La pieza defectuosa está fabricada en la máquina A":

$$\mathbb{P}(X_A)=\frac{\mathbb{P}(D\cap A)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{0.40\times0.01}{0.0185}=\frac{0.004}{0.0185}=0.2162$$

(3º) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido dicha pieza defectuosa?

Es suficiente con repetir los cálculos del apartado (2º) para las máquinas B y C. Sean, para ello, los sucesos

$X_B \triangleq$ "La pieza defectuosa está fabricada en la máquina B"

$X_C \triangleq$ "La pieza defectuosa está fabricada en la máquina C"

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

Aplicado a cada una de dichas máquinas el teorema de Bayes, se deduce que:

$$\mathbb{P}(X_B)=\frac{\mathbb{P}(D\cap B)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{\mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{0.35\times 0.02}{0.0185}=\frac{0.007}{0.0185}=0.3784$$

$$\mathbb{P}(X_C)=\frac{\mathbb{P}(D\cap C)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{\mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{0.25\times 0.03}{0.0185}=\frac{0.0075}{0.0185}=0.4054$$

Se deduce, entonces, que es la máquina C la que tiene la mayor probabilidad de haber producido dicha pieza defectuosa.

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

EJERCICIO 2

Lanzamos una moneda que tiene probabilidad *p* de cara; si sale cara elegimos un número al azar del conjunto {1, 2, 3}, y si sale cruz un número al azar del conjunto {2, 3, 4}. Sea X el número obtenido.

Suponiendo que $C \triangleq$ "Sacar cara" y $\bar{C} \triangleq$ "Sacar cruz". El espacio muestral del experimento planteado viene dado por

$$\Omega = \left\{ (C,1),(C,2),(C,3),\left(\bar{C},2\right),\left(\bar{C},3\right),\left(\bar{C},4\right) \right\}$$

que consta de $n_\Omega = 6$ sucesos elementales, que no son equiprobables dado que $\mathbb{P}(C) = p$ y $\mathbb{P}(\bar{C}) = 1 - p$. Sea X la variable aleatoria del experimento del enunciado; es decir, $X \triangleq$ "el número elegido".

Se pide: (1º) La función de distribución de probabilidad de X.

La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad y la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.

VALOR X = k	SUCESO ELEMENTAL	CÁLCULOS	$\mathbb{P}(S_i) = \mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{F}(a) = \mathbb{P}(X \le a)$
1	$S_1 = (C,1)$	$\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(1) = p \times \frac{1}{3} = \frac{p}{3}$	$\frac{p}{3}$	$\frac{p}{3}$
2	$S_2 = \left\{ (C,2), \left(\bar{C},2\right) \right\}$	$\mathbb{P}(S_2) = \mathbb{P}\left[(C,2) \cup \left(\bar{C},2\right) \right] = \mathbb{P}(C,2) + \mathbb{P}\left(\bar{C},2\right) =$ $\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(2) + \mathbb{P}\left(\bar{C}\right)\mathbb{P}(C2) = p\frac{1}{3} + (1-p)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{p+1}{3}$
3	$S_3 = \left\{ (C,3), \left(\bar{C},3\right) \right\}$	$\mathbb{P}(S_3) = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{p+2}{3}$
4	$S_4 = \left(\bar{C},4\right)$	$\mathbb{P}(S_6) = \mathbb{P}(\bar{C}) \times \mathbb{P}(4) = (1-p) \times \frac{1}{3} = \frac{1-p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$	$\mathbb{1}$

(2º) La esperanza matemática y la varianza de X.

Vienen definidas como

$$\mu = E[X] = \sum_{\forall i} k \mathbb{P}(X = k) = 1 \times \frac{p}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4\left(\frac{1-p}{3}\right) = 3 - p$$

$$\sigma^2\left[X\right]=E\left[X^2\right]-\mu^2=\sum_{\forall i}k^2\mathbb{P}\left(X=k\right)-\mu^2=\left[1^2\times\frac{p}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\left(\frac{1-p}{3}\right)\right]-\left(3-p\right)^2=$$

$$\left[\frac{p}{3}+4\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{3}+16\left(\frac{1-p}{3}\right)\right]-\left(9-6p+p^2\right)=\frac{2}{3}+p-p^2$$

(3º) Si X = 3, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido cara?

La probabilidad condicional que se pide es:

$$\mathbb{P}\left(C\middle|X=3\right)=\frac{\mathbb{P}\left(C\cap 3\right)}{\mathbb{P}\left(3\right)}=\frac{\mathbb{P}\left[\left(C,3\right)\right]}{\mathbb{P}\left(3\right)}=\frac{p\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=p$$

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco
eman ta zabal zazu

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

EJERCICIO 3

Un fabricante de maquinaria de tipo A observa que de 200 máquinas de tipo A tomadas al azar 16 requieren de grandes ajustes, mientras que de 400 máquinas de tipo B 14 máquinas han requerido grandes ajustes.

Se trata de un problema de proporciones de dos poblaciones (se dan dos muestras) y de muestras grandes ya que se cumple

$$\begin{aligned} n_A p_A &= 16 > 4; \quad n_A q_A = n_A(1-p_A) = 184 \gg 4 \\ n_B p_B &= 14 > 4; \quad n_B q_B = 386 \gg 4 \end{aligned}$$

En consecuencia, se ha de aplicar el modelo normal de probabilidad. Y el estimador insesgado de varianza mínima viene definido por

$$\widehat{\pi_A - \pi_B} = p_A - p_B = \frac{16}{200} - \frac{14}{400} = 0.08 - 0.035 = 0.045$$

siendo el error probable (desviación típica de la estimación)

$$\sigma_{\widehat{\pi_A-\pi_B}} = \sqrt{\frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n_A} + \frac{\pi_B(1-\pi_B)}{n_B}} \approx \sqrt{\frac{p(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B}} =$$

$$\sqrt{\frac{0.08 \times 0.92}{200} + \frac{0.035 \times 0.965}{400}} = \sqrt{0.0003680 + 0.00008444} = \sqrt{0.00045244} = 0.02127$$

(1º) Con un nivel de confianza del 99%, establecer un intervalo de confianza para la diferencia de proporciones de maquinaria que requiera de grandes ajustes.

A partir de la distribución normal se tiene

$$z_\alpha = z_{99\,\%} \equiv z_{99.5\,\%} = \pm 2.575829304$$

y para la estimación confidencial (intervalar) pedida se puede calcular con

$$[l, \mathcal{L}] = \widehat{\pi_A - \pi_B} \pm z_\alpha \sigma_{\widehat{\pi_A-\pi_B}} = 0.045 \pm 2.575829304 \times 0.02127$$

Operando se llega a $[l, \mathcal{L}] = [0.0009788, 0.09978]$.

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

(2º) Realizar un contraste de hipótesis para determinar si se acepta la hipótesis que indica que la maquinaria de tipo A requiere grandes ajustes en un porcentaje superior, con un nivel de significación del 1%.

En las hipótesis de trabajo que se desprende del enunciado, el contraste de hipótesis que se ha de plantear es

$$\begin{cases} H_0: & \pi_A = \pi_B \\ H_a: & \pi_A > \pi_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \pi_A - \pi_B = 0 \\ H_a: & \pi_A - \pi_B > 0 \end{cases}$$

del tipo unilateral (direccional), de cola superior. La región crítica o de rechazo se sitúa en la cola lateral derecha siendo el valor crítico

$$z_c = z_1 = z_\alpha = z_{1\%} \equiv z_{99\%} = +2.326347874$$

Además, se sabe que el estadístico del contraste viene dado por

$$z = \frac{(p_A - p_B) - \cancel{(\pi_A - \pi_B)}}{\sigma_{\widehat{\pi_A - \pi_B}}} = \frac{p_A - p_B}{\sigma_{\widehat{\pi_A - \pi_B}}} = \frac{0.045}{0.02127} = 2.1157$$

Conclusión: A partir de las muestras del enunciado no hay evidencia estadística suficiente que indique que la maquinaria de tipo A requieragrandes ajustes en un porcentaje superior respecto a la maquinaria de tipo B, con un nivel de significación del 1%.

(3º) Hallar el p-valor del apartado anterior e interpretar el resultado.

El p-valor es el tamaño de la región critica que justamente comienza a hacer que falle la hipótesis nula. En otras palabras, es el máximo error de tipo I que se puede cometer para este contraste concreto. Es decir:

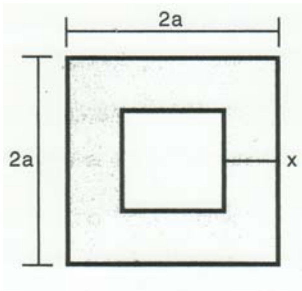
$$z_c = z_1 = z_{p-valor} = +2.1157 \Leftrightarrow p-valor = 1 - 0.982814835 = 0.017185165 \equiv 1.7185165\,\%$$

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

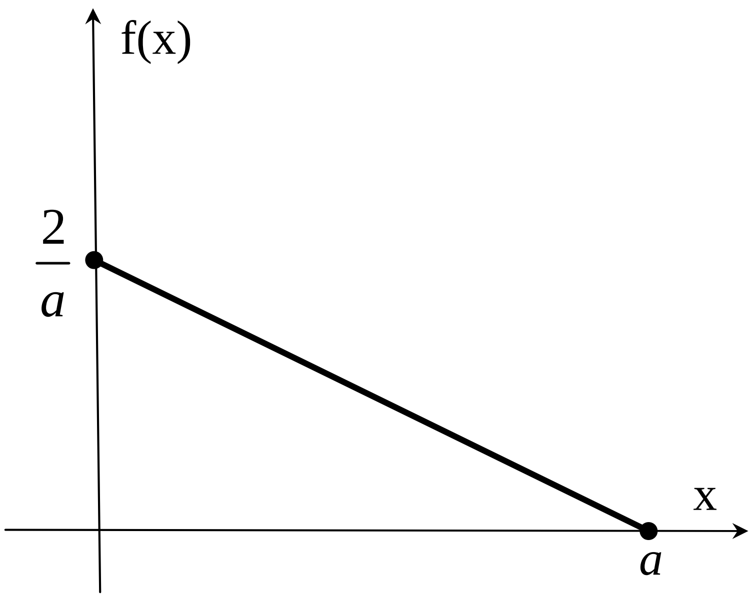
EJERCICIO 4

Un ingeniero, preocupado por el efecto de las cargas concentradas en forjados, está interesado en conocer cuál es la distribución de la distancia X de una carga al apoyo más próximo. Supone que la posición de las cargas es al azar, lo cual implica que la probabilidad de que una carga esté en una zona determinada es proporcional a su área. Si además supone que el forjado está apoyado en cuatro vigas que forman un cuadrado de lado 2a se puede encontrar que la función de densidad de probabilidad de la distancia al apoyo más próximo viene dada por

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\frac{2(a-x)}{a^2};0\le x\le a$$



(1º) Dibuja la densidad de probabilidad y comprueba que X efectivamente es una variable aleatoria.



La condición que ha de darse para que sea una variable aleatoria continua es

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

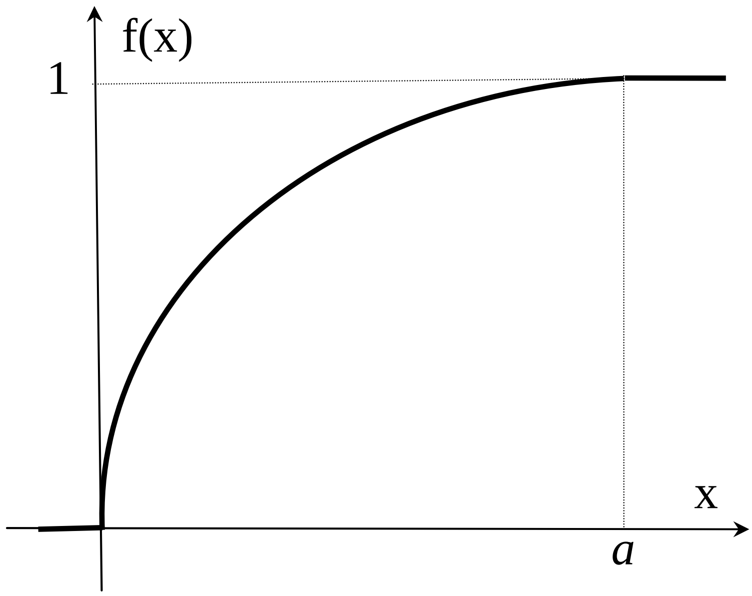
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(a-x)}{a^2}dx = \int_0^a \frac{2(a-x)}{a^2}dx = \left(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)\Bigg|_0^a = 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

(2º) Calcula la expresión de la función de distribución de probabilidad. Dibuja su gráfica.

Por definición, función de distribución de probabilidad se define como $F(h) = \mathbb{P}(X \le h)$:

$$F(h) = \int_{-\infty}^{h} \frac{2(a-x)}{a^2}dx = \int_0^h \frac{2(a-x)}{a^2}dx = \left(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)\Bigg|_0^h = \frac{2h}{a} - \frac{h^2}{a^2}, \forall h \in [0, a] \subset \mathbb{R}$$

cuya representación gráfica viene dada por



(3º) ¿Calcula la probabilidad de que la distancia al apoyo más próximo se encuentra entre $\frac{a}{4}$ *y* $\frac{a}{2}$?

$$\mathbb{P}\left(\tfrac{a}{4} \le X \le \tfrac{a}{2}\right) = F\left(h = \tfrac{a}{2}\right) - F\left(h = \tfrac{a}{4}\right) = \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \frac{2(a-x)}{a^2}dx = \left(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)\Bigg|_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

(4º) La esperanza matemática o valor esperado de la variable aleatoria X viene dado por

$$\mu[X] = \int_{\infty}^{-\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{2(a-x)}{a^2}dx = \int_0^a x\frac{2(a-x)}{a^2}dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x^3}{3a^2}\right|_0^a = \frac{a}{3}, \forall a \in \mathbb{R}$$

Y la desviación típica se define como

$$\sigma[X] = \sqrt{\mu\left[\left(X - \mu^2[X]\right)\right]} = \sqrt{\mu\left[X^2\right] - \left(\mu[X]\right)^2} =$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} x^2 f(x)dx - \frac{a^2}{9} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{2(a-x)}{a^2}dx - \frac{a^2}{9} = \int_0^a x^2 \frac{2(a-x)}{a^2}dx - \frac{a^2}{9} = \left(\frac{2x^2}{3a} - \frac{x^4}{2^2}\right|_0^a - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}, \forall a \in \mathbb{R}$$