INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

**SECCIÓN DEPARTAMENTAL
DE MATEMÁTICA APLICADA**

PRÁCTICA Nº 2.

Análisis Combinatorio y Probabilidad

INTRODUCCIÓN

Por Análisis Combinatorio, o Combinatoria, se entiende aquella parte del Álgebra que se ocupa del estudio y propiedades de los grupos que pueden formarse con unos elementos dados, distinguiéndose entre sí:

- por el número de elementos que entran en cada grupo
- por el orden de colocación

Los m elementos de que se dispone para formar los grupos pueden ser distintos o bien puede haber algunos iguales. En el primer caso, las agrupaciones formadas se llaman *ordinarias*, las formadas en el segundo supuesto se denominan agrupaciones *con repetición*.

Según los criterios empleados para la formación, las agrupaciones pueden ser de tres tipos:

- variaciones
- permutaciones
- combinaciones

El análisis combinatorio permite, en relación al experimento planteado y sin perder ningún caso, calcular los valores necesarios para aplicar la regla de Laplace:

$$\boxed{P(A) = \frac{casos\ \ favorables\ al\ suceso\ A}{casos\ \ posibles}}$$

PRINCIPIO DE RECUENTO

En ocasiones, las probabilidades se calculan contando el número de resultados diferentes que caen dentro de un suceso determinado. La clave para hacerlo de una forma efectiva es utilizar la regla conocida como *principio básico de recuento*.

Supóngase que un experimento consta de dos partes. Si en la parte 1 se pueden obtener n posibles resultados y si por cada resultado de la parte 1 existen m resultados posibles de la parte 2, el número total de resultados posibles del experimento es $m \cdot n$.

Este principio se puede verificar, fácilmente, enumerando todos los casos posibles del experimento:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,m) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,m) \end{matrix}$$

El resultado (i, j) significa que en la parte 1 del experimento se ha obtenido el resultado i–ésimo y que en la parte 2 se ha obtenido el resultado j–ésimo. Como la tabla anterior de resultados tiene n filas y m columnas existen $m \cdot n$ resultados diferentes posibles.

Ejemplo 1. Se selecciona aleatoriamente a una mujer y a un hombre de un grupo compuesto por 12 mujeres y 8 hombres. ¿Cuántas elecciones diferentes son posibles?

Solución. Si se considera la elección de la mujer como la primera parte del experimento y la del hombre como segunda parte, del principio básico de recuento se desprende que existen $12 \cdot 8 = 96$ resultados posibles.

Ejemplo 2. En cierto txoko con 25 socios la elección de presidente y vicepresidente se realiza de forma totalmente aleatoria. ¿Cuántas elecciones diferentes son posibles?

Solución. Si se considera la elección del presidente como la primera parte del experimento y la del vicepresidente como la segunda parte, por el principio básico de recuento se desprende que existen $25 \cdot 24 = 600$ resultados posibles.

Cuando el experimento tiene más de dos partes puede considerarse el denominado como *principio básico de recuento generalizado*.

Supóngase que un experimento consta de r partes. Si en la parte 1 se pueden obtener n_1 posibles resultados, n_2 en la parte 2 y, así sucesivamente, entonces existen un total de $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_r$ resultados posibles del experimento.

Por ejemplo, si se quiere determinar el número de formas diferentes de ordenar las tres letras *a*, *b* y *c* basta con enumerarlas para darse cuenta de que existen 6 posibilidades (*abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*). Usando el principio básico de recuento generalizado se observa que existen 3 elecciones para la primera letra, 2 para la segunda y sólo una para la tercera; por lo tanto, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ posibles resultados.

Si lo que se quiere es determinar el número de formas diferentes de ordenar n objetos, razonando de forma análoga, se tiene:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \cdots\ 3\cdot 2\cdot 1 = n\,!$$

Cada una de estas ordenaciones determina una *permutación*.

Se supone, ahora, que se quiere elegir 3 de las 5 letras *a*, *b*, *c*, *d* y *e*. ¿Cuántas elecciones son posibles? Se puede razonar que, como existen 5 posibilidades para la primera elección, 4 posibilidades para la segunda y tres para la tercera, existen $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ posibles elecciones cuando el orden de elección es relevante. Sin embargo, en este conjunto de elecciones ordenadas, cada grupo de tres letras se ordena de $3\,!$ veces, como se vio antes, y se incluyen en el conjunto de posibles elecciones. Si el orden de selección no tiene importancia el número de grupos diferentes de tamaño 3 que se pueden formar con las 5 letras es:

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\,!} = 10$$

Si se quiere determinar el número de grupos diferentes de tamaño r que se puede extraer de un conjunto de n elementos (*combinaciones de n elementos tomados de r en r*), razonando de forma análoga, se tiene:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \cdots\ \cdot(n-r+1)}{r\,!} = \frac{n\,!}{r\,!\cdot(n-r)!} = \binom{n}{r} \quad \text{donde } r \le n$$

Ejemplo 3. Se extrae una muestra aleatoria de tamaño 3 de un conjunto de 10 elementos. ¿Cuál es la probabilidad de que un elemento prefijado esté contenido en la muestra?

Solución. Existen $\binom{10}{3}$ grupos diferentes que pueden ser elegidos. El número de grupos distintos que contienen el elemento prefijado es igual al número de elecciones de los dos elementos adicionales que se pueden extraer de los 9 elementos restantes tras haber elegido el prefijado; es decir, $\binom{9}{2}$. Siendo igual la probabilidad de cada elemento de ser elegido, la probabilidad de que un elemento concreto pertenezca a la muestra es:

$$\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{9\cdot 8}{2}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3}} = \frac{3}{10}$$

PERMUTACIONES

Una permutación de r elementos tomados de un conjunto de n elementos distintos ($r \le n$) es una secuencia ordenada de los r elementos. El número de estas ordenaciones que se pueden hacer viene dado por la expresión:

$$\boxed{P_{n,r} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

El número de ordenaciones que pueden realizarse si se consideran los n elementos del conjunto (por definición, $0! = 1$) es:

$$\boxed{P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot 2\cdot 1 = n!}$$

COMBINACIONES

Una combinación de r elementos tomados de un conjunto de n elementos ($r \le n$) es una subconjunto no ordenado de los r elementos. El número de combinaciones de tamaño r que se pueden seleccionar de n objetos distintos viene dado por la expresión:

$$\boxed{C_{n,r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-r+1)}{r!} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \binom{n}{r}}$$

NÚMERO DE PARTICIONES

A menudo, resulta interesante el problema de dividir un conjunto de n objetos distintos en k subconjuntos. Ésto requiere que cada uno de los n objetos pertenezca a uno y sólo uno de los subconjuntos. El orden de los objetos dentro de un subconjunto no tiene importancia.

El número de maneras de dividir n objetos distintos en k grupos que contienen, respectivamente, $n_1, n_2, \cdots, n_k$ objetos es:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k}}$$

Ejemplo 4. ¿De cuántas formas puede dividirse un conjunto de cuatro objetos en tres subconjuntos que contengan, respectivamente, 2, 1 y 1 objetos?

Solución. Si se representan los cuatro objetos con las letras *a*, *b*, *c* y *d* y se enumeran los casos se observa que hay 12 posibilidades:

$$\begin{array}{llll} ab\,|\,c\,|\,d & ab\,|\,d\,|\,c & ac\,|\,b\,|\,d & ac\,|\,d\,|\,b \\ ad\,|\,b\,|\,c & ad\,|\,b\,|\,c & bc\,|\,a\,|\,d & bc\,|\,d\,|\,a \\ bd\,|\,a\,|\,c & bd\,|\,c\,|\,a & cd\,|\,a\,|\,b & cd\,|\,b\,|\,a \end{array}$$

Utilizando la fórmula: $\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12$

RESUMEN DE ANÁLISIS COMBINATORIO

Para aplicar la regla de Laplace hay que conocer los casos posibles y los favorables a la ocurrencia del suceso A en relación al experimento considerado y sin perder ningún caso:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{casos favorables al suceso } A}{\text{casos posibles}}}$$

Estos números los proporciona el Análisis combinatorio.

VARIACIONES

Variaciones de N elementos tomados de n en n, son los diferentes grupos que pueden formarse con los N elementos dados, tomados de n en n, de modo que dos grupos difieren entre sí porque o son distintos o sus elementos están en distinto orden.

$$V_N^n = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)$$

Variaciones con repetición de N elementos tomados de n en n, son los diferentes grupos que pueden formarse con los N elementos dados, tomados de n en n, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de modo que dos grupos difieren entre sí porque o son distintos o sus elementos están en distinto orden.

$$VR_N^n = N^n$$

PERMUTACIONES

Permutaciones de N elementos, son los diferentes grupos que pueden formarse con los N elementos, de modo que dos grupos difieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden.

$$P_N = V_N^N = N!$$

Permutaciones con repetición de r elementos distintos tal que aparece n_1 veces el primero, n_2 veces el segundo, …, n_r veces el r-ésimo donde $n_1+n_2+\ldots+n_r = N$, son los diferentes grupos que pueden formarse con los N elementos dados, de modo que dos grupos difieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden.

$$PR_N^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

COMBINACIONES

Combinaciones de N elementos tomados de n en n, son los diferentes grupos que pueden formarse con los N elementos dados, tomados de n en n, de modo que dos grupos difieren entre sí cuando, al menos, un elemento es distinto. No se tiene en cuenta el orden.

$$C_N^n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Combinaciones con repetición de N elementos tomados de n en n, son los diferentes grupos que pueden formarse con los N elementos dados, tomados de n en n, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de modo que dos grupos difieren entre sí cuando, al menos, un elemento es distinto.

$$CR_N^n = \binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}$$

FUNCIONES PREDEFINIDAS

Las funciones predefinidas relacionadas con esta práctica se encuentran en la categoría "**Matemáticas y trigonométricas**". Con algunas de ellas se pueden diseñar simulaciones de juegos con monedas, dados u otro tipo de experimentos aleatorios.

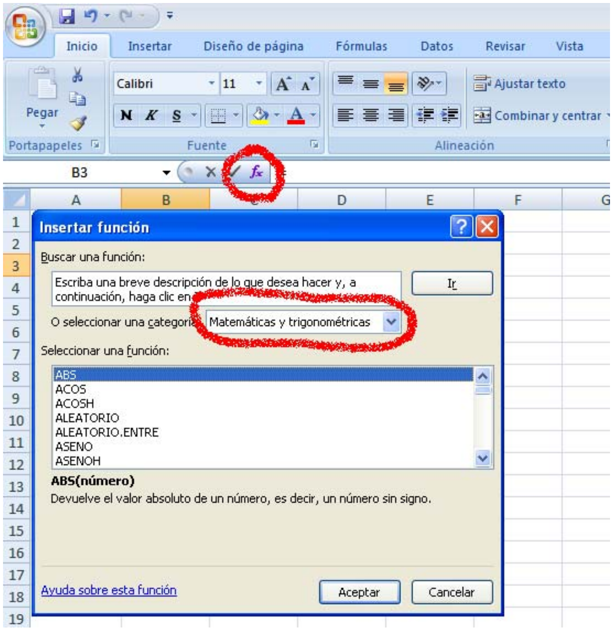

Figura 1: inserción de funciones

Procedimiento:

1. Barra de herramientas→Línea de fórmulas→f_x (pinchar)
2. En la ventana que se despliega denominada **Insertar función**, seleccionar la categoría **Matemáticas y trigonométricas**
3. Escoger la función deseada de entre las que se presentan

De forma análoga pueden escogerse, dentro de la categoría "**Lógicas**", las funciones **SI**, **O**, **Y**. Estas funciones pueden utilizarse para el análisis del contenido de otras celdas ó de resultados de operaciones realizadas y el establecimiento de diferentes condiciones para determinar nuevas operaciones ó el contenido de otra celda.

ACTIVIDAD

Buscar las funciones estadísticas relacionadas con el tema de *Probabilidad*.

Analizar y estudiar dichas funciones para establecer en la siguiente tabla su sintaxis y una breve descripción de su utilidad.

Si se han ejecutado las funciones ALEATORIO ó ALEATORIO.ENTRE comprobar qué ocurre al pulsar la tecla F9 ó ejecutar cualquier otra celda.

FUNCIÓN	DESCRIPCIÓN	SINTAXIS
COMBINAT		
FACT		
ABS		
ALEATORIO		
ALEATORIO.ENTRE		
ENTERO		
SI		
O		
Y		