UNIDAD TEMÁTICA 5
CONTROL DE CALIDAD

ENUNCIADO 1

*(**a**) Un control de calidad que trabaja con muestras de tamaño n = 20 da una probabilidad de aceptación de 0.7358 para un lote con un 5 % de piezas defectuosas, ¿cuál es el valor de aceptación del control? (**b**) Un control de calidad que trabaja con muestras de tamaño n = 100 da una probabilidad de rechazo de 0.238 para el mismo lote, ¿cuál es el valor de aceptación del control?*

Resolución:

En un control de calidad la probabilidad de aceptación de un lote con plan de muestreo (n, a) viene dada por $P_{aceptación} = p(X \le a) = \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(a) En este caso se puede hacer uso de las tablas, ya que n = 20, de donde se deduce para una fracción dedefectuosos p = 0.05 que el valor de aceptación del control resulta ser a = 1.

(b) Como $P_{rechazo} = 1 - P_{aceptación}$, y no podemos aplicar las tablas de la distribución binomial, aunque sí las de la normal siendo $np = 5 > 4$, $nq = 95 > 5$, con

$$\mathcal{N}\left(\mu = np = 5, \sigma = \sqrt{npq} = 2.1795\right)$$

Entonces $P_{rechazo} = 1 - P_{aceptación} = 1 - p(X \le a) = 0.238$, lo que implica que

$$P_{aceptación} = p(X \le a) = 0.762 \underset{\substack{corrección\ por \\ continuidad}}{\approx} p(X < a + 0.5) = p\left(Z < z_1 = \frac{a + 0.5 - 5}{2.1795}\right)$$

De las tablas se tiene que $z_1 \underset{interpolando}{=} -0.71275053 \Rightarrow \quad X = 6.05344$. Así pues, el valor pedido es a = 6.

ENUNCIADO 2

Para controlar la calidad de diferentes envíos de naranjas se proponen los siguientes planes de muestreo por cada 10 Tm.

PLAN	**TAMAÑO DE MUESTRA** (n)	**NÚMERO DE ACEPTACIÓN** (a)
A	20	2
B	40	4
C	200	15

*(**a**) Calcula, para cada plan, la probabilidad de ser aceptado de un envío con 5% de defectuosos. (**b**) Calcula, para cada plan, la probabilidad de ser aceptado de un envío con 15% de defectuosos. (**c**) Responde razonada y **escuetamente** a las siguientes cuestiones: (**c1**) Sin considerar su coste ¿qué plan es más preciso, el A o el B? (**c2**) ¿Qué plan es más exigente, el B o el C?*

Resolución:

Para una fracción de defectuosos (p) del lote de llegada y con un número de aceptación (a) la probabilidad de aceptar el lote de tamaño (n) es $p(X \le a) = \sum_{k=1}^{a} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Así pues, se tiene que:

(1º) $p = 0.05 \Rightarrow \begin{cases} p_A = 0.9245 \\ p_B = 0.9520 \quad (binomial) \\ p_C = 0.9556 \end{cases} \qquad p = 0.05 \Rightarrow \begin{cases} p_A = 0.920 \quad (Poisson) \\ p_B = 0.947 \quad (Poisson) \\ p_C = 0.951 \quad (Poisson) \end{cases}$

(2º) $p = 0.15 \Rightarrow \begin{cases} p_A = 0.4049 \\ p_B = 0.2633 \quad (binomial) \\ p_C = 0.0010 \end{cases} \qquad p = 0.15 \Rightarrow \begin{cases} p_A = 0.423 \quad (Poisson) \\ p_B = 0.285 \quad (Poisson) \\ p_C = 0.0015 \quad (normal) \end{cases}$

(3º) (a) El plan B es más preciso (mejor) que el plan A porque $n_B = 4 > n_A = 2$.

(b) El plan C es más exigente que el plan B porque $\frac{a_C}{n_C} = \frac{15}{200} = 0.075 < \frac{a_B}{n_B} = \frac{4}{40} = 0.1$.

ENUNCIADO 3

*(**a**) Se realiza un control de calidad con un tamaño de muestra n = 30 y un valor de aceptación a = 2. Hallar la probabilidad de <u>aceptación</u> de un lote con 5% de piezas defectuosas.*
*(**b**) Hallar la probabilidad de <u>rechazo</u> del mismo lote con n = 150 y a = 10.*
*(**c**) Comparando la probabilidad de aceptación del lote en los apartados (a) y (b) razonar por qué es mayor en uno que en otro.*

Resolución:

(a) Como $np = 30\times 0.05 = 1.5 < 4 \Rightarrow$ aproximar mediante la distribución de Poisson:

$$p_{aceptacion} = p(Y\le a) = \sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\Bigg|_{\substack{n=30\\ a=2\\ p=0.05}} \approx p_{acept}\Big|_{\lambda=1.5} \underset{tablas}{=} 0.809$$

(b) $\begin{matrix}\mu = np = 150\times 0.05 = 7.5 > 4\\ nq = 142.5 > 4\end{matrix} \Rightarrow$ aproximar mediante la distribución normal, teniendo en cuenta la corrección por continuidad:

$$\mathcal{B}(n=150, p=0.05) \to \mathcal{N}(\mu = 7.5, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{7.125} = 2.6693)$$

$$p_{acept} = p(Y\le a=10) \simeq p(Y\le 10.5) = p\left(Z \le \frac{10.5-7.5}{2.6693}\right) = p(Z\le 1.1239) = 0.8695$$

Entonces, la probabilidad de rechazo es:

$$p_{rechazo} = 1 - p_{aceptacion} = 0.1305$$

(c) Porque $n_{(b)} > n_{(a)}$.

ENUNCIADO 4

*Un fabricante desea establecer un control de calidad en su empresa definido por las siguientes condiciones: (**A**) que sea el más barato posible, (**B**) que el porcentaje aceptable de piezas defectuosas en un lote sea del 20 %, (**C**) que un lote con 10 % de piezas defectuosas tenga una probabilidad de aceptación de al menos un 90 %, (**D**) que un lote con 30 % de piezas defectuosas tenga una probabilidad de rechazo de al menos un 75 %. Establecer las características del control elegido justificando razonadamente la propuesta.*

Resolución:

(A) $\Rightarrow$ minimizar

(B) $\Rightarrow$ $p = \dfrac{a}{n} = 0.2$

(C) $\Rightarrow$ $p_{aceptacion}(X\le a)\big|_{p=0.1} \ge 0.90$

(D) $\Rightarrow$ $p_{rechazo}(X\le a)\big|_{p=0.3} \ge 0.75 \Leftrightarrow p_{aceptacion}(X\le a)\big|_{p=0.3} \ge 0.25$

De las tablas de la distribución binomial se observa la siguiente progresión:

a	n		
2	8	11	12
3	18	17	16

De donde se deduce que la solución al problema pedido es **a = 4, n = 20**.

ENUNCIADO 5

Un Departamento de Calidad propone tres planes de muestreo:

Plan	n	a
A	10	2
B	25	5
C	50	10

*(**a**) Dibuja las curvas operativas características (de forma aproximada) en términos de probabilidad de rechazo para p = 10 %, 17.15 %, 30 %. Comenta los resultados que se obtienen. (**b**) ¿Cuál de los tres planes es más exigente? (**c**) ¿Cuál es más preciso, sin tener en cuenta el coste asociado? (**d**) Indica las características de los tres planes cuando p ≈ 17.15 %. Justifica todas las respuestas que des.*

Resolución:

$$p_{rechazo} = 1 - p_{aceptacion} = p(X > a) = 1 - \sum_{i=0}^{a} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

(**a**) El trazado aproximado de las curvas operativas características de los tres planos de muestreo se desarrolla a continuación

p	**A** **n = 10 a = 2**	**B** **n = 25 a = 5**	**C** **n = 50 a = 5**
0.1000	0.0702 tablas de $\mathcal{B}(.,.)$	0.04202 (1) tablas de $\mathcal{P}(.)$	0.0237004 (4) tablas de $\mathcal{P}(.)$
0.1715	0.2384 fórmula de $\mathcal{P}(.)$	0.2613 (2) interpolación de $\mathcal{P}$	0.2804 (5) interpolación de $\mathcal{N}$
0.3000	0.6172 tablas de $\mathcal{B}(.,.)$	0.8086 (3) interpolación de $\mathcal{N}$	0.9385 (6) interpolación de $\mathcal{N}$

siendo

(1) $np = 25 \times 0.1 = 2.5 < 5 \Rightarrow \mathcal{P}(\text{interpolando})$

(2) $np = 25 \times 0.1715 = 4.2875 < 5 \Rightarrow \mathcal{P}(\text{interpolando})$

(3) $np = 25\times 0.3 = 7.5 \Rightarrow \mathcal{N}$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25\times 0.3\times 0.7} = \sqrt{5.25} = 2.2913;\ z = \frac{5.5-7.5}{2.2913} = -0.872872$$

(4) $np = 50\times 0.1 = 5 \Rightarrow \mathcal{P}$

(5) $np = 50\times 0.1785 = 8.925$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50\times 0.1785\times 0.8215} = \sqrt{7.33189} = 2.7078;\ z = \frac{10.5-8.92.5}{2.7078} = 0.5817$$

(6) $np = 50\times 0.3 = 15$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50\times 0.3\times 0.7} = \sqrt{10.5} = 3.2404;\ z = \frac{10.5-15}{3.2404} = -1.5430$$

(**b**) Los tres planes son igual de exigentes: $\frac{a}{n} = \left.\frac{2}{10}\right|_A = \left.\frac{5}{25}\right|_B = \left.\frac{10}{50}\right|_C = 0.2$.

(**c**) El plan C es el plan más preciso porque $n_A < n_B < n_C$.

(**d**) Para p = 17.15 se produce aproximadamente el punto crítico de corte de los tres planes (lo cual debe ser así ya que todos los planes tienen la misma razón "a/n = 0.2 "); en efecto:

	PLAN DE MUESTREO (X)		
	A	**B**	**C**
$p_{aceptacion}\Big\|_{p=0.1715}^{X}$	0.7616	0.7509	0.7710