eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
The University of the Basque Country

E.U.I.T.I. Bilbao

Asignatura: MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA

E.U.I.T.I. Bilbao

Asignatura:
MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA

TEMA 4: VARIABLE ALEATORIA

EN EL CAPÍTULO 2, VIMOS QUE LAS OBSERVACIONES BASADAS EN DATOS NUMÉRICOS, COMO LOS PESOS DE LOS ESTUDIANTES, SE PUEDEN REPRESENTAR MEDIANTE GRÁFICOS Y RESUMIR EN TÉRMINOS DE PUNTO MEDIO, DISPERSIÓN, OBSERVACIONES ATÍPICAS, ETC. EN EL CAPÍTULO 3, HEMOS VISTO CÓMO SE PUEDEN ASIGNAR PROBABILIDADES A LOS RESULTADOS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO.

La estadística en comic
L. Gocking, W. Smith
(2002)

SI IMAGINAMOS QUE UN EXPERIMENTO ALEATORIO SE REPITE MUCHAS VECES, ESPERAMOS QUE LOS RESULTADOS ACABEN OBEDECIENDO A SUS PROBABILIDADES. LA PROBABILIDAD CONFORMA UN **MODELO** PARA EXPERIMENTOS REALES... ASÍ QUE, ¿POR QUÉ NO HACEMOS CON EL MODELO LO QUE YA HEMOS HECHO CON LOS DATOS QUE DESCRIBE?

Mas a pesar de todo, aunque la mala suerte exista, muy pocos reporteros veteranos creen de verdad en ella. En la guerra, las cosas suelen discurrir más bien según la ley de las probabilidades: tanto va el cántaro a la fuente que al final hace bang

Arturo Pérez Reverte
Territorio Comanche

http://es.wikipedia.org/wiki/Arturo_P%C3%A9rez-Reverte

1. RESUMEN

Se continúa con el estudio de la probabilidad, usando el concepto de variable aleatoria para hacer referencia a experimentos donde el resultado se caracteriza por un valor numérico.
Se presentan, además, algunos de los modelos más habituales de asignación de probabilidades y sus propiedades más relevantes.

1. RESUMEN

<u>Palabras clave</u>:

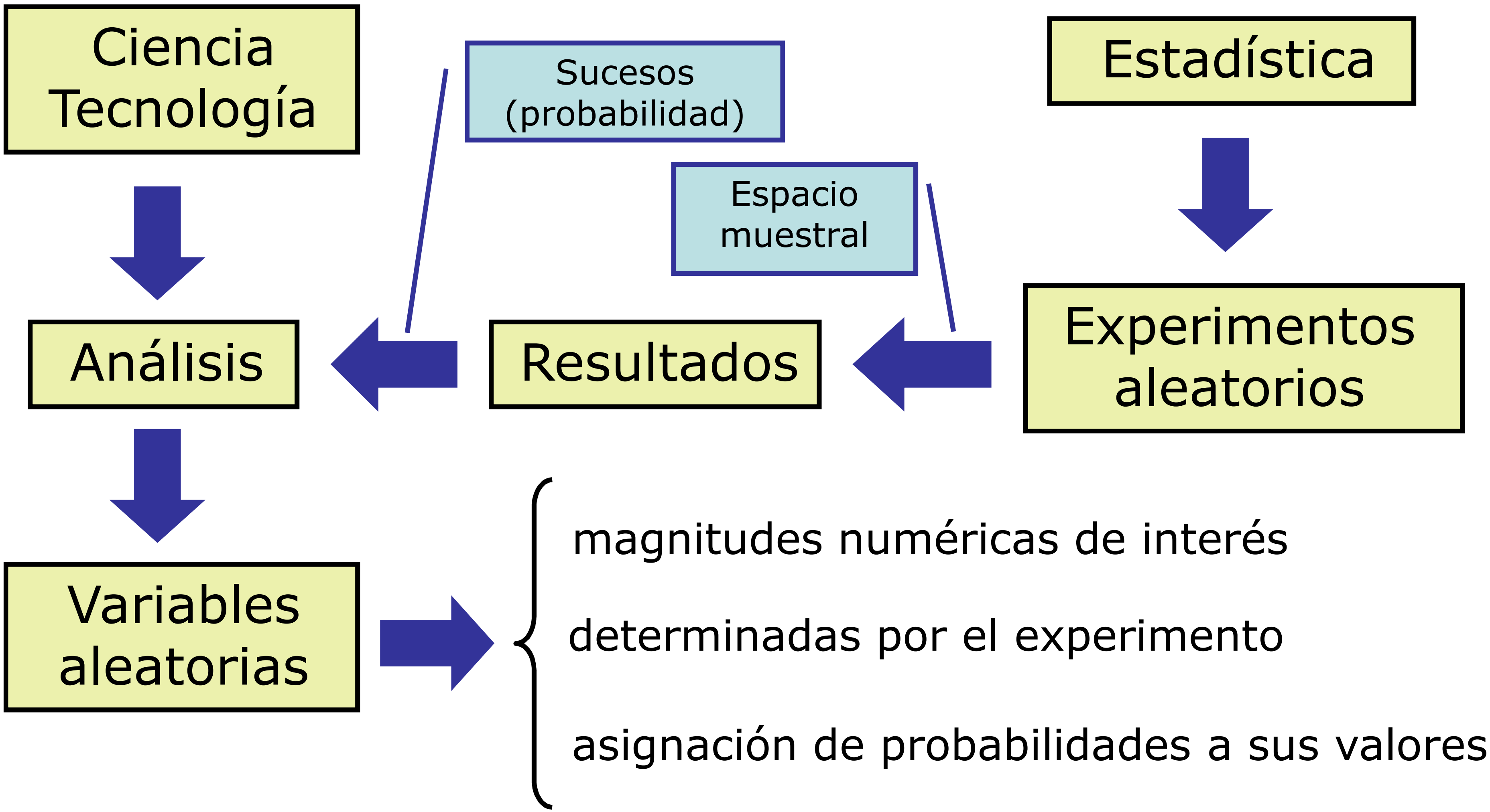
- variable aleatoria: discreta y continua
- función de masa de probabilidad
- función de densidad de probabilidad
- función de distribución
- media y varianza
- modelos de distribución de probabilidad: uniforme (discreta y continua), binomial, hipergeométrica, Poisson, geométrica, exponencial, Gamma, normal

2. ÍNDICE DEL TEMA

2. ÍNDICE DEL TEMA

2. ÍNDICE DEL TEMA

2. INTRODUCCIÓN



Los resultados de un experimento aleatorio no son necesariamente numéricos pero, normalmente, interesa cuantificarlos

2. INTRODUCCIÓN

- **EJEMPLO**

  - experimento: lanzamiento de una moneda dos veces
  - espacio muestral: $\Omega=\{CC,CX,XC,XX\}$
  - el resultado CX significa que sale cara en la primera tirada y cruz en la segunda
  - si Z denota el *número de caras obtenido*, su valor queda determinado por el resultado del experimento; es una variable aleatoria que puede tomar los valores 0, 1 y 2
  - si los cuatro resultados son equiprobables:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(XX) = P(Z=0) = 0.25 \\ P(\{XC,CX\}) = P(Z=1) = 0.5 \\ P(CC) = P(Z=2) = 0.25 \end{array}}$$

3. DEFINICIÓN

Se considera un experimento aleatorio en cuyo espacio muestral, Ω, está definida una función de probabilidad, P. Una **variable aleatoria** (**v.a.**) es una función que hace corresponder un número real a cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral Ω.

$$\boxed{X : \Omega \longrightarrow R}$$

► <u>notación</u>

- mayúsculas para las variables: X, Y, Z, … (para hacer referencia a la v.a. antes de observar su valor)
- minúsculas para sus valores: x, y, z, … (cuando se observa el valor de la v.a. deja de ser algo aleatorio)

3. DEFINICIÓN

variable aleatoria

► <u>notación (ejemplo)</u>

- experimento: lanzamiento de un dado
- espacio muestral: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
- variable aleatoria X: “puntuación obtenida”
- valores de X: $x=1,2,3,4,5,6$
- cabe preguntarse sobre la probabilidad de que X tome el valor $x=1$ o de que $X<4$
- una vez lanzado el dado si se observa que ha salido un 5 se indica que $x=5$

3. DEFINICIÓN

variable aleatoria

► notación (ejemplo)

- experimento: lanzamiento de una moneda tres veces
- espacio muestral: Ω={CCC,CCX,CXC,XCC,CXX,XCX,XXC,XXX}
- variable aleatoria Y: "número de cruces"
- argumentos de Y: los sucesos elementales de Ω (y=CCC)
- valores de Y: {0,1,2,3}
- Y(CCC)=0; Y(CCX)=Y(CXC)= Y(XCC)=1
- Y(XXX)=3; Y(CXX)=Y(XXC)= Y(XCX)=2

3. DEFINICIÓN

variable aleatoria

► <u>notación (ejemplo)</u>

- experimento: lanzamiento de una moneda tres veces
- espacio muestral: Ω={CCC,CCX,CXC,XCC,CXX,XCX,XXC,XXX}
- otra variable aleatoria *Z*: $Z : \Omega \longrightarrow R$

$$Z\left(w_i\right)=\begin{cases} 1 & \textit{el tercer lanzamiento es cruz} \\ 0 & \textit{el tercer lanzamiento NO es cruz} \end{cases}$$

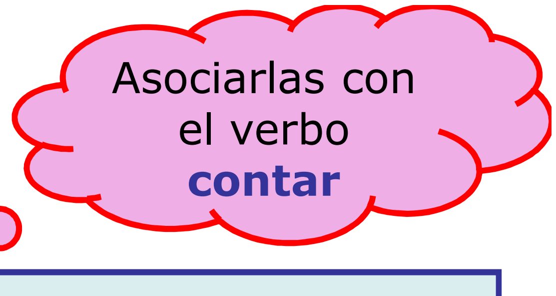
- *Z*(XXX)=1; *Z*(CXX)=1; *Z*(XXC)=0; *Z*(XCX)=1

3. DEFINICIÓN

variable aleatoria

- El objeto de la Estadística respecto a la observación de fenómenos aleatorios es medir la incertidumbre o la certidumbre asociada a sus posibles resultados
- Al describir estos resultados con variables aleatorias se logran valores numéricos sujetos a incertidumbre
- Como el resultado de la variable aleatoria depende del resultado del experimento se pueden asignar probabilidades a sus posibles valores
- El objetivo, ahora, es cuantificar de alguna manera la probabilidad de esos resultados numéricos

4. CLASIFICACIÓN



Una variable aleatoria es **discreta** si el conjunto de todos los valores que puede tomar es, a lo sumo, numerable; es decir, puede tomar un número finito o infinito numerable de valores

- ejemplos:
  - número de caras (ó cruces) al lanzar 3 veces una moneda
  - número de piezas defectuosas encontradas al examinar una muestra de 100 unidades
  - número de e-mails recibidos en un día
  - número de accidentes laborales anuales en una empresa
  - número de días de baja de un trabajador al mes
  - número de errores en un mensaje transmitido

4. CLASIFICACIÓN

Asociarlas con
el verbo
medir

Una variable aleatoria es **continua** si el conjunto de todos los valores que puede tomar no es numerable; es decir, puede tomar cualquier valor en uno o varios intervalos de la recta real (acotados o no)

► ejemplos:

- altura de una persona seleccionada aleatoriamente
- tiempo de espera (en minutos) entre la llegada de dos buses a una determinada parada
- consumo eléctrico (en megawatios) de una empresa al mes
- tensión de fractura (en megapascales) de una mezcla de asfalto

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

5. EJEMPLOS

EJEMPLO 1: se lanza 2 veces de forma sucesiva una moneda

- espacio muestral: $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$
- el resultado CX significa que sale cara en la primera tirada y cruz en la segunda, CC dos caras, etc.
- variable aleatoria Z: "número de caras obtenido"
- valores de Z: {0,1,2}
- $Z(CC)$=2; $Z(XC)$=$Z(CX)$= 1; $Z(XX)$=0

$$
\begin{aligned}
Z : \Omega &\longrightarrow R \\
CC &\longrightarrow 2 \\
CX &\longrightarrow 1 \\
XC &\longrightarrow 1 \\
XX &\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

5. EJEMPLOS

<u>**EJEMPLO 1**</u>

- $Z=z$ denota todos los resultados del experimento aleatorio a los que la variable aleatoria Z asocia el valor z
- "$Z=0$" ➡ suceso $\{XX\}$
- "$Z=1$" ➡ suceso $\{XC, CX\}$
- "$Z=2$" ➡ suceso $\{CC\}$
- puede asignarse probabilidades a los sucesos "$Z=z$" sumando las probabilidades de todos los sucesos elementales a los que la v.a. asocia el valor z
- sean equiprobables los 4 posibles resultados
- $P(Z=0)=0.25$
- $P(Z=1)=0.5$
- $P(Z=2)=0.25$

$$\left.\begin{array}{l} P(Z=0)=0.25 \\ P(Z=1)=0.5 \\ P(Z=2)=0.25 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(Z=0)+ P(Z=1)+ P(Z=2)= 1}$$

5. EJEMPLOS

<u>EJEMPLO 2</u>: se lanza un dado y se define una v.a. del siguiente modo. Descríbase dicha variable aleatoria.

$$
\begin{aligned}
X : \Omega &\longrightarrow R \\
1 &\longrightarrow -100 \\
2 &\longrightarrow 100 \\
3 &\longrightarrow -100 \\
4 &\longrightarrow 100 \\
5 &\longrightarrow -100 \\
6 &\longrightarrow 100
\end{aligned}
$$

- v.a. X: "ganancia en el juego (par gana 100 e impar pierde 100)"
- espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- valores de X: $\{-100,100\}$
- $X(1)=X(3)=X(5)= -100$
- $X(2)=X(4)=X(6)= 100$

5. EJEMPLOS

EJEMPLO 2

- $X=x$ denota todos los resultados del experimento aleatorio a los que la variable aleatoria X asocia el valor x
- "$X=-100$" $\Rightarrow$ suceso $\{1,3,5\}$
- "$X=100$" $\Rightarrow$ suceso $\{2,4,6\}$
- puede asignarse probabilidades a los sucesos "$X=x$" sumando las probabilidades de todos los sucesos elementales a los que la v.a. asocia el valor x
- si son equiprobables los 6 posibles resultados
- $P(X=-100)=0.5$
- $P(X=100)=0.5$

$$\left.\begin{array}{l} P(X=-100)=0.5 \\ P(X=100)=0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(X=-100)+P(X=100)=1}$$

5. EJEMPLOS

<u>EJEMPLO 3</u>: familias con tres hijos de los que se quiere conocer el sexo

- los 8 posibles resultados se consideran equiprobables (h:hombre, m:mujer)
- espacio muestral: $\Omega=\{hhh,hhm,hmh,hmm,mhh,mhm,mmh,mmm\}$
- variable aleatoria Y: "número de hijas de la familia"
- valores de Y: $\{0,1,2,3\}$
- $Y(hhh)=0$; $Y(hhm)=Y(hmh)= Y(mhh)=1$
- $Y(mmm)=3$; $Y(hmm)=Y(mhm)= Y(\mathrm{mmh})=2$

5. EJEMPLOS

EJEMPLO 3

- $Y=y$ denota todos los resultados del experimento aleatorio a los que la variable aleatoria Y asocia el valor y
- "$Y=0$" ➡ suceso $\{hhh\}$
- "$Y=1$" ➡ suceso $\{hhm, hmh, mhh\}$
- "$Y=2$" ➡ suceso $\{hmm, mhm, mmh\}$
- "$Y=3$" ➡ suceso $\{mmm\}$
- si son equiprobables los 8 posibles resultados
- $P(Y=0)=P(Y=3)=0.125$
- $P(Y=1)=P(Y=2)=0.375$

$$\boxed{P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)=1}$$

5. EJEMPLOS

<u>EJEMPLO 4</u>: se extraen de forma sucesiva dos bolas, sin reemplazo, de una urna que contiene cuatro bolas rojas (*R*) y tres blancas (*B*)

- espacio muestral: $\Omega = \{RR, RB, BR, BB\}$
- variable aleatoria *X*: "número de bolas rojas extraídas"
- valores de *X*: {0,1,2}
- $X(RR)=2$; $X(RB)=X(BR)= 1$; $X(BB)=0$

$$
\begin{aligned}
X : \Omega &\longrightarrow R \\
RR &\longrightarrow 2 \\
RB &\longrightarrow 1 \\
BR &\longrightarrow 1 \\
BB &\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

5. EJEMPLOS

EJEMPLO 4

- $X=x$ denota todos los resultados del experimento aleatorio a los que la variable aleatoria X asocia el valor x
- "$X=0$" $\Rightarrow$ suceso {BB}
- "$X=1$" $\Rightarrow$ suceso {BR, RB}
- "$X=2$" $\Rightarrow$ suceso {RR}
- puede asignarse probabilidades a los sucesos "$X=x$" sumando las probabilidades de todos los sucesos elementales a los que la v.a. asocia el valor x

5. EJEMPLOS

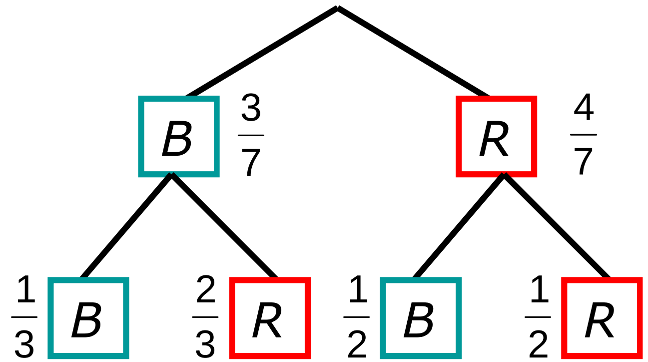
EJEMPLO 4

- $X=x$ denota todos los resultados del experimento aleatorio a los que la variable aleatoria X asocia el valor x

$$P(X=0)=\frac{\cancel{3}}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}=\frac{1}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$$



6. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

<u>Distribución de probabilidad discreta</u>: conjunto de todos los posibles valores que toma una variable aleatoria asociada a cierto experimento aleatorio junto con las probabilidades para cada uno de esos sucesos (lista ó tabla ó gráfico ó fórmula)

- sea una v.a. X que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- como los valores de X son números reales, interesa calcular las probabilidades de todos y cada uno de los sucesos $X=x$
- <u>notación</u>: $P(X=x_i)$ representa la probabilidad de que $X=x_i$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} P\left(X = x_i\right) = 1}$$

6. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

EJEMPLO 1

z	0	1	2
P(Z=z)	0.25	0.5	0.25

EJEMPLO 2

x	-100	100
P(X=x)	0.5	0.5

EJEMPLO 3

y	0	1	2	3
P(Y=y)	0.125	0.375	0.375	0.125

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Dada una v.a. discreta X, su **función de masa de probabilidad ó función de probabilidad** se define como:

$$\boxed{p(x_i) = P(X = x_i)} \quad \forall x_i$$

- **Nota.** Una función masa de una v.a. discreta está definida en todos los puntos de la recta real pero sólo vale distinto de cero en un conjunto, a lo sumo numerable, que corresponde con los únicos valores que pueden darse de la variable
- una v.a. discreta queda caracterizada por su función de masa de probabilidad

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

- sea una v.a. X que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- su función de masa de probabilidad cumple:

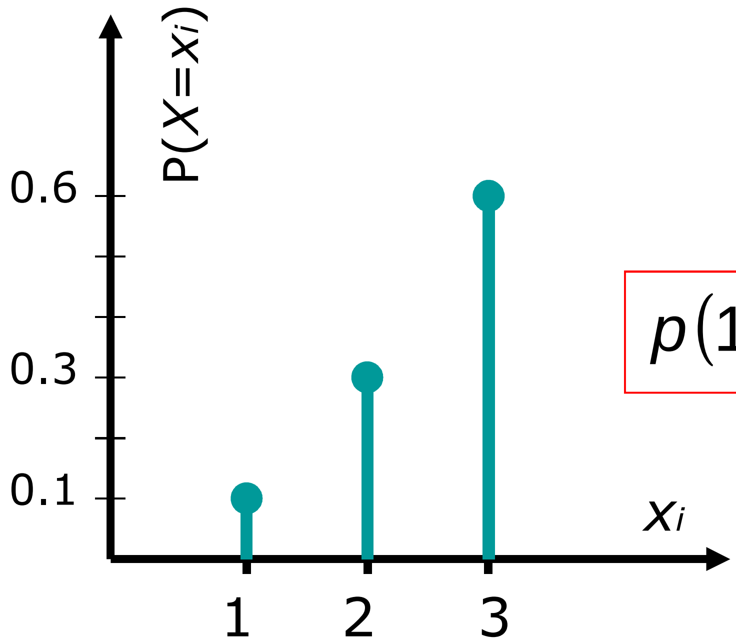
$$\boxed{p(x_i) = P(X = x_i) \quad \forall x_i}$$

  - $\boxed{p(x_i) \geq 0 \quad \forall i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)}$
  - $\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} p(x_i) = 1}$

- generalmente, la función de masa de probabilidad (**f.m.p.**) se representa gráficamente con un diagrama de barras

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

EJEMPLO: sea X un v. a. que puede tomar los valores 1, 2 ó 3. Si P(X=1)=0.1 y P(X=2)=0.3 hallar P(X=3)



$$p(1)+p(2)+p(3)=1 \Rightarrow p(3)=0.6$$

8. FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

Dada una v.a. discreta X, se define su **función de distribución acumulada** como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \quad \forall x \in R$$

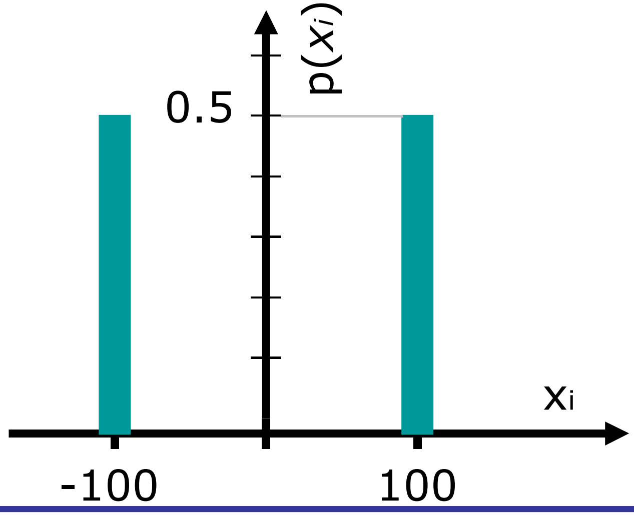
- el dominio de esta función es todo el conjunto de los números reales y hace corresponder a todo $x \in R$ la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual que x
- una v.a. discreta, también, queda caracterizada por su función de distribución

8. FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

EJEMPLO 2: obtener la función masa de probabilidad y la función de distribución de la v.a. *X* del ejemplo 2. Representarlas gráficamente.

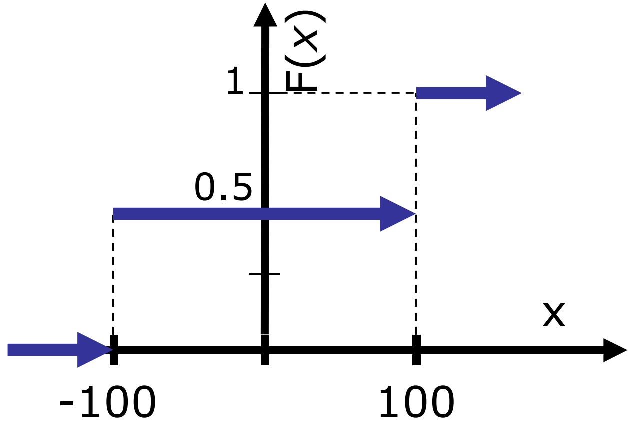
Función de masa

x_i	-100	100
$p(x_i)$	0.5	0.5



Función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-100 \\ \frac{1}{2} & -100\le x<100 \\ 1 & x\ge 100 \end{cases}$$

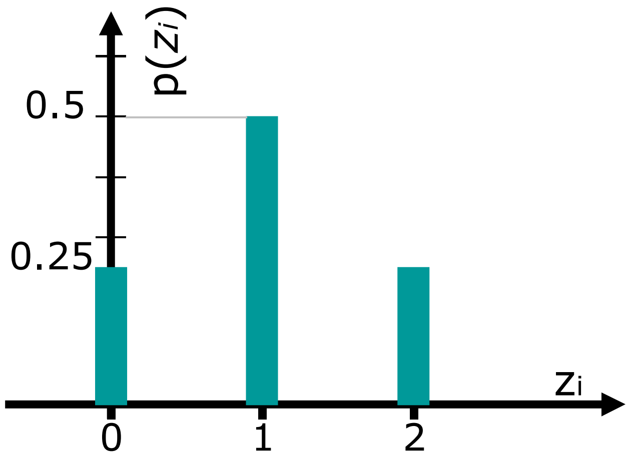


8. FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

EJEMPLO 1: obtener la función masa de probabilidad y la función de distribución de la v.a. *Z* del ejemplo 1. Representarlas gráficamente.

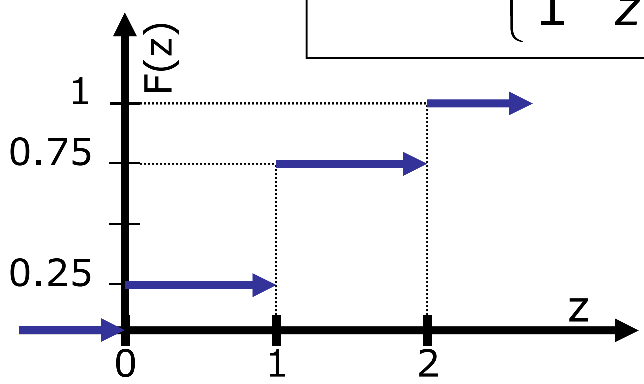
Función de masa

z_i	0	1	2
$p(z_i)$	0.25	0.5	0.25



Función de distribución

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \le z < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \le z < 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$



8. FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

Propiedades

- $\boxed{0 \le F(x) \le 1}$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ | $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- *F(x)* es una función **no decreciente**
- Relación con *p(x)*: si la v.a. *X* toma los valores $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

$$F(x_1) = p(x_1)$$
$$F(x_2) = p(x_1) + p(x_2)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$F(x_n) = p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x_k) = \sum_{i=1}^{i=k} p(x_i)}$$

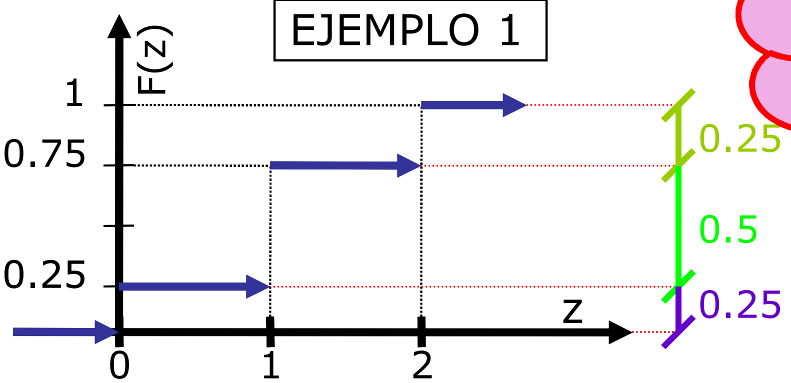
8. FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

Propiedades

- si a<b, entonces: $\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$
- *F(x)* es una función **escalonada** con saltos en los puntos de probabilidad no nula cuya magnitud es igual a la probabilidad en dicho punto

zi	0	1	2
p(zi)	0.25	0.5	0.25

EJEMPLO 1



Cuidado con los extremos de los intervalos y con los símbolos $\leq$ y $<$

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq z < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq z < 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases}$$

$$P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \boxed{1} - \boxed{0.75} = 0.25$$

9. MEDIA O VALOR ESPERADO

Media, **valor esperado** ó **esperanza matemática:**

$$\mu = E[X] = E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot p(x_i)$$

- sea una v.a. X que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- el valor esperado de X es una media ponderada de los posibles valores de X en la que el peso de un valor determinado coincide con la probabilidad de que X tome ese valor
- si g(X) es una función real de una v.a. X también es una v.a.; entonces:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{i=n} g(x_i) \cdot p(x_i)$$

9. MEDIA O VALOR ESPERADO

EJEMPLO 1

$$E[X]=\sum_{i=1}^{i=3} x_i \cdot p(x_i)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$$

EJEMPLO 2

$$E[X]=\sum_{i=1}^{i=2} x_i \cdot p(x_i)=(-100)\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}=0$$

EJEMPLO 3

$$E[X]=\sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot p(x_i)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=1.5 \rightarrow \boxed{?}$$

Interpretación: valor medio de *X* en un gran número de repeticiones del experimento (no entenderlo como el valor de *X* que se espera obtener)

9. MEDIA O VALOR ESPERADO

PROPIEDADES

► sea una v.a. X y sean las constantes a y b

$$\boxed{E[bX] = b\,E[X]}$$

$$\boxed{E[a+X] = a + E[X]}$$

$$\boxed{E[a+bX] = a + b\,E[X]}$$

► la media de la suma de dos v.a., X e Y, es la suma de sus medias

$$\boxed{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$$

10. VARIANZA

Varianza de una v.a. con valor esperado *μ*:

$$\sigma^2 = Var[X] = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

- la varianza de una v.a. discreta *X* es el valor esperado del cuadrado de las desviaciones a la media de *X*
- como *X* es una v.a. discreta, operando:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i-\mu)^2 \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2\right) \cdot p(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \cdot p(x_i) + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\mu^2 - 2\mu x_i\right) \cdot p(x_i) = E\left[X^2\right] + \mu^2 - 2\mu \cdot E[X]$$

$$\boxed{\sigma^2 = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2}$$

10. VARIANZA

PROPIEDADES

► sea una v.a. *X* y sean las constantes *a* y *b*

$$\boxed{Var[bX] = b^2 \cdot Var[X]}$$

$$\boxed{Var[a+X] = Var[X]}$$

$$\left.\right\} \quad \boxed{Var[a+bX] = b^2 \cdot Var[X]}$$

► dos v.a., *X* e *Y*, son independientes cuando el conocimiento del valor de una de ellas no cambia la probabilidad de la otra; en ese caso:

$$\boxed{Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]} \qquad \boxed{Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y]}$$

11. DESVIACIÓN TÍPICA

Desviación típica de una v.a. X:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var[X]}$$

► sea una v.a. X con media μ y desviación típica σ; se denomina **forma estandarizada** de X a la v.a.:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Propiedades de la media y la varianza de v.a.

$$E[Y] = 0 \qquad \sigma[Y] = 1$$

12. DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEV

Sea una v.a. X con media μ y desviación típica σ; para cualquier número positivo k se verifica:

$$\boxed{P\left(\left|X-\mu\right|<k\cdot\sigma\right)\geq 1-\frac{1}{k^2}}$$

- sustituyendo k=2 en la desigualdad:

$$P\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right)\geq\frac{3}{4}$$

- al menos, el 75% de la distribución de probabilidad debe estar contenida en el intervalo $\left(\mu-2\sigma,\,\mu+2\sigma\right)$

- de forma análoga $\begin{cases} \left(\mu-3\sigma,\,\mu+3\sigma\right) \Rightarrow \boxed{88.\widehat{8}\%} \\ \left(\mu-4\sigma,\,\mu+4\sigma\right) \Rightarrow \boxed{93.75\%} \end{cases}$

13. EJEMPLOS

Ejemplo: ejercicio 3

Calcular la esperanza de beneficios para una compañía de seguros al hacer un seguro cuya prima anual es *r*, la probabilidad de siniestro *p* y la cantidad asegurada *M*

Solución

► Resultados posibles para la empresa:

Siniestro	Ganancia	Probabilidad
SÍ	r−M	p
NO	r	1−p

► *X*="beneficios": $\boxed{E[X] = r\cdot(1-p) + (r-M)\cdot p = r - p\cdot M}$

13. EJEMPLOS

<u>Ejemplo: ejercicio 4</u>

Sea X una v.a. discreta con la siguiente función de probabilidad:

x_i	2	3	4
$p(x_i)$	0.08	0.84	0.08

Se pide:

1. calcular la media y la desviación típica de X
2. calcular P(2<X<4)
3. usando la acotación de Tchebychev, hallar la proporción de la distribución que cae, al menos, en el intervalo $(\mu - 2.5\sigma, \mu + 2.5\sigma)$
4. comparar los resultados de los apartados 2 y 3

13. EJEMPLOS

Ejemplo: ejercicio 4

Solución

1.
$$\boxed{E[X]=\sum_{i=1}^{i=3} x_i\cdot p(x_i)=2\cdot 0.08+3\cdot 0.84+4\cdot 0.08=3=\mu}$$

$$E\left[X^2\right]=\sum_{i=1}^{i=3} x_i^2\cdot p(x_i)=4\cdot 0.08+9\cdot 0.84+16\cdot 0.08=9.16$$

$$\boxed{\sigma=\sqrt{Var[X]}=\sqrt{E\left[X^2\right]-(E[X])^2}=\sqrt{9.16-9}=0.4}$$

2.
$$\boxed{P(2<X<4)=P(3)=0.84}$$

13. EJEMPLOS

Ejemplo: ejercicio 4

Solución

3.

$$P\left(\mu-2.5\sigma,\ \mu+2.5\sigma\right)\geq 1-\frac{1}{2.5^{2}}=0.84$$

Al menos el 84% de la distribución se encuentra en ese intervalo

4.

$$\left.\begin{array}{l}\mu=3\\ \sigma=0.4\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\mu-2.5\sigma,\ \mu+2.5\sigma\right)=\left(2,\ 4\right)$$

Se observa que, exactamente, el 84% de la distribución está en ese intervalo

MODELOS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

14. INTRODUCCIÓN

Distribución de probabilidad

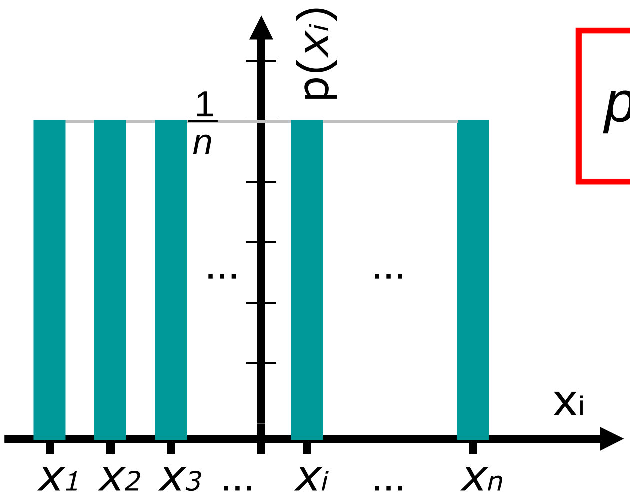
- para determinar la distribución de probabilidad de una v.a. basta con dar la función de masa
- a priori no puede conocerse la función de masa de una v.a.

Modelos teóricos de distribución de probabilidad

fórmulas teóricas de funciones de masa que pueden resultar adecuadas para determinadas variables aleatorias

15. DISTRIB. UNIFORME DISCRETA

- sea una v.a. X que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- la v.a. X sigue una distribución uniforme discreta si cada uno de los n valores que puede tomar X tiene la misma probabilidad
- notación: $\boxed{X \sim \mathrm{UD}(n)}$
- <u>función de masa de probabilidad</u>:



$$\boxed{p(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)}$$

15. DISTRIB. UNIFORME DISCRETA

- ejemplos:
  - en un dado equilibrado todos los resultados tienen la misma probabilidad
  - en una moneda perfecta la cara y la cruz tienen la misma probabilidad
- esperanza matemática (media):

$$\boxed{E[X]=\sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot p(x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i=\frac{1}{n}\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

  - si *X* toma los valores 1,2, … ,n

$$\boxed{E[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i=\frac{1}{n}\cdot(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{(n+1)\cancel{n}}{2}=\frac{n+1}{2}}$$

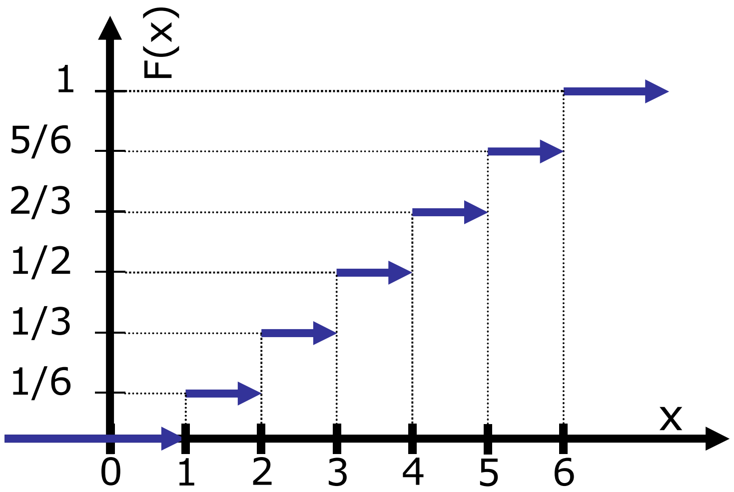
15. DISTRIB. UNIFORME DISCRETA

ejemplo

- X: "número que sale al lanzar un dado equilibrado"
- valores: 1,2,3,4,5,6
- función de masa:

$$\boxed{p(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{6} \quad (x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)}$$

- función de distribución:



$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{3} & 2 \le x < 3 \\ \frac{1}{2} & 3 \le x < 4 \\ \frac{2}{3} & 4 \le x < 5 \\ \frac{5}{6} & 5 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}}$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

PRUEBA DE BERNOUILLI

- experimento aleatorio en el que sólo pueden darse dos resultados (sucesos) posibles:
  - S : denominado "éxito" ⇒ $p(S) = p$
  - F : denominado "fracaso" ⇒ $p(F) = 1 - p$
- se define la variable aleatoria X que toma el valor 1 si ocurre S y 0 en caso contrario
- su función de masa es:

$$\boxed{\begin{cases} p(1) = P(X = 1) = p \\ p(0) = P(X = 0) = 1 - p \end{cases}}$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

PRUEBA DE BERNOUILLI

- la esperanza matemática es:

$$\boxed{E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p}$$

- la varianza es:

$$\boxed{\begin{gathered} Var[X] = (0-p)^2 \cdot P(X=0) + (1-p)^2 \cdot P(X=1) = \\ = p^2 (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p \cdot (1-p) \end{gathered}}$$

- distribución de probabilidad denominada **binomial** ó de **Bernouilli**; se denota:

$$\boxed{B(1, p)}$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

PRUEBA DE BERNOUILLI

- ejemplos:
  - lanzamiento de una moneda (cruz: éxito; cara: fracaso)
  - lanzamiento de un dado (“6”: éxito; otro resultado: fracaso)
  - contestación al azar de una pregunta tipo test de múltiple elección con cuatro opciones y una única correcta

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- sea el experimento aleatorio que consiste en repetir *n* veces, de forma **independiente**, la misma prueba de Bernoulli tal que, se verifica que la probabilidad de que ocurra el suceso *S* permanece constante

- se considera la v.a. *X* : "número de éxitos en las *n* repeticiones"

- la v.a. *X* sigue una distribución binomial: $\boxed{B(\underbrace{\boxed{n}}_{\text{nº de pruebas}}, \underbrace{\boxed{p}}_{p(S)})\sim X}$

- los valores que toma una v.a. binomial *X* dependen del número de pruebas independientes de Bernouilli realizadas: $\{0,1,2,3, \ldots ,n\}$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLOS

► Ejemplo 1. Se estima que 4000 de los 10000 residentes con derecho a voto de una ciudad se oponen a cierta ordenanza. Si se seleccionan al azar 15 de los posibles votantes y se pregunta su opinión, ¿cuál es la probabilidad de que, como máximo, siete estén a favor de la nueva ordenanza municipal?

- S (éxito): a favor de la ordenanza ⟹ $p(S) = 0{,}6$
- F (fracaso): en contra de la ordenanza ⟹ $p(F) = 0{,}4$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLOS

La estadística en comic
L. Gocking, W. Smith
(2002)

los términos *éxito* y *fracaso* son sólo etiquetas

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLOS

► Ejemplo 2. Al realizar pruebas en los neumáticos que se van a utilizar en cierto tipo de vehículo se observa que en el 15% de los ellos se ha producido un pinchazo en algún neumático. Se prueban 20 vehículos. Hallar la probabilidad de que, al menos, en 3 vehículos se produzca un pinchazo.

- *S* (éxito): hay pinchazo $\Rightarrow$ $p(S) = 0{,}15$
- *F* (fracaso): no hay pinchazo $\Rightarrow$ $p(F) = 0{,}85$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLOS

► Ejemplo 3. Hay 5 vuelos diarios de Bilbao a París. Suponiendo que la probabilidad de que un avión tenga retraso es 0.35, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los vuelos de hoy venga con retraso?, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos vuelos de hoy tengan retraso?

- S (éxito): hay retraso en un vuelo ⟹ $p(S) = 0{,}35$
- F (fracaso): no hay retraso ⟹ $p(F) = 0{,}65$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLOS

► Ejemplo 4. Una compañía aérea ha observado que el 4% de las plazas reservadas en cierto trayecto no se cubren. Suponiendo independencia entre distintos vuelos y sabiendo que la compañía ha vendido 150 billetes para uno de esos vuelos, hallar la probabilidad de que, al menos, 5 de las plazas reservadas no se cubran

- S (éxito): reserva no cubierta ⟹ $p(S) = 0{,}04$
- F (fracaso): reserva cubierta ⟹ $p(F) = 0{,}96$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

RESUMEN

▶ una variable X sigue una distribución binomial cuando cumple las siguientes condiciones:

- el experimento consiste en *n* pruebas idénticas
- cada prueba sólo tiene dos posibles resultados denominados *éxito* (*S*) y *fracaso* (*F*) de forma arbitraria
- probabilidad de éxito constante en cada una de las pruebas: $P(S)=p \Rightarrow P(F)=1-p$
- las pruebas son independientes
- la v. a. binomial *X*, de parámetros *n* y *p*, se define como "el número de éxitos en las *n* pruebas": $X \sim B(n;p)$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Función de masa de probabilidad

- sea una v.a. binomial $X \sim \mathrm{B}(n;p)$
- X toma los valores: {0,1,2,3, … ,n}
- se trata de calcular: $\boxed{P(X=i) \quad (i=0,1,2,3,\ \ldots\ ,n)}$
  - S (éxito): se repite i veces
  - F (fracaso): se repite (n-i) veces
- se calcula la probabilidad del siguiente suceso:

$$P(\underbrace{S \cap S \cap \cdots \cap S}_{\boxed{i \text{ veces}}} \cap \underbrace{F \cap F \cap \cdots \cap F}_{\boxed{(n-i) \text{ veces}}}) =$$

$$= \underbrace{p \cdot p \cdot\ \ldots\ \cdot p}_{i \text{ veces}} \cdot \underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdot\ \ldots\ \cdot(1-p)}_{(n-i) \text{ veces}} = p^{i} \cdot (1-p)^{n-i}$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Función de masa de probabilidad

► el número total de maneras posibles de obtener *i* éxitos en *n* pruebas es:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

n: número de pruebas
i: nº de éxitos en *n* pruebas
p: probabilidad de éxito en cada prueba
q=1-*p*

► entonces, la **función de masa de probabilidad** es:

$$\boxed{P(X=i) = \boxed{\binom{n}{i}} \cdot \boxed{p^i \cdot (1-p)^{n-i}} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \ \ldots \ , n)}$$

Número de todas las formas posibles de obtener *i* éxitos en *n* pruebas

Probabilidad de cada secuencia individual de *i* éxitos y (*n*-*i*) fracasos

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Función de masa de probabilidad

► **ejemplo**: hallar la probabilidad de obtener exactamente dos cuatros al lanzar 5 veces un dado equilibrado

- S: "obtener 4 (éxito)"
- F: "no obtener 4 (fracaso)"
- X: "número de cuatros en las 5 tiradas"
- $X \sim$ B(5;1/6)
- se debe calcular: P(X=2)

$$P\,(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{5^3}{6^5}\approx 0.16075 \longrightarrow 16{,}075\%$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Función de masa de probabilidad

- la función de masa de probabilidad de una v.a. dis– creta debe verificar:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p(x_i) = 1$$

- por tanto, para la distribución binomial:

$$\sum_{i=0}^{i=n} p(i) = \sum_{i=0}^{i=n} P(X=i) = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1$$

desarrollo del binomio de Newton

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Función de masa de probabilidad

- cálculo de probabilidades asociadas a una distribución binomial:
  - mediante aplicaciones informáticas
  - aproximaciones mediante otro tipo de distribuciones cuyas probabilidades son más sencillas de calcular
  - utilización de **tablas**; en este caso, conviene saber:

Buscar las tablas en la web y bajar un fichero pdf

$$X \sim B(n;p)$$

$$Y \sim B(n;1\text{-}p)$$

$$P\left(X=i\right)=P\left(Y=n-i\right)$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLO: utilización de tablas

- **ejemplo:** se dispone de una moneda trucada con la que la probabilidad de obtener cara es del 30%. Si se lanzase 10 veces la moneda de forma consecutiva, calcular:

  1. la probabilidad de obtener 6 caras o menos

Solución

- X: "número de caras obtenidas" ➡ $X \sim B(10;0.30)$
- A: "obtención de 6 caras o menos"
- S: "obtener cara (éxito)"
- F: "no obtener cara (fracaso)"

$$P(A) = P(X \leq 6) = 0.9894$$

TABLAS

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLO: utilización de tablas

► **ejemplo:** se dispone de una moneda trucada con la que la probabilidad de obtener cara es del 30%. Si se lanzase 10 veces la moneda de forma consecutiva, calcular:

2. la probabilidad de obtener 7 caras o más

Solución

- X: "número de caras obtenidas" ➡ $X \sim B(10;0.30)$
- $\overline{A}$: "obtención de 7 caras o más"

$$\boxed{P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(X \leq 6\right) = 1 - 0.9894 = 0.0106}$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLO: utilización de tablas

- **ejemplo:** se dispone de una moneda trucada con la que la probabilidad de obtener cara es del 30%. Si se lanzase 10 veces la moneda de forma consecutiva, calcular:

  3. la probabilidad de que salgan exactamente 6 caras

Solución

- X: "número de caras obtenidas" ➡ $X \sim B(10;0.30)$

$$P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^6\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^4 \approx 0.03676 \longrightarrow 3{,}676\%$$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLO: utilización de tablas

▶ **ejemplo:** se dispone de una moneda trucada con la que la probabilidad de obtener cara es del 30%. Si se lanzase 10 veces la moneda de forma consecutiva, calcular:

4. la probabilidad de obtener 4 cruces o menos

Solución

p>0.5
no está en las tablas

- *Y*: "número de cruces obtenidas" ➡ $Y \sim B(10;\boxed{0.70})$
- *X*: "número de caras obtenidas" ➡ $X \sim B(10;0.30)$

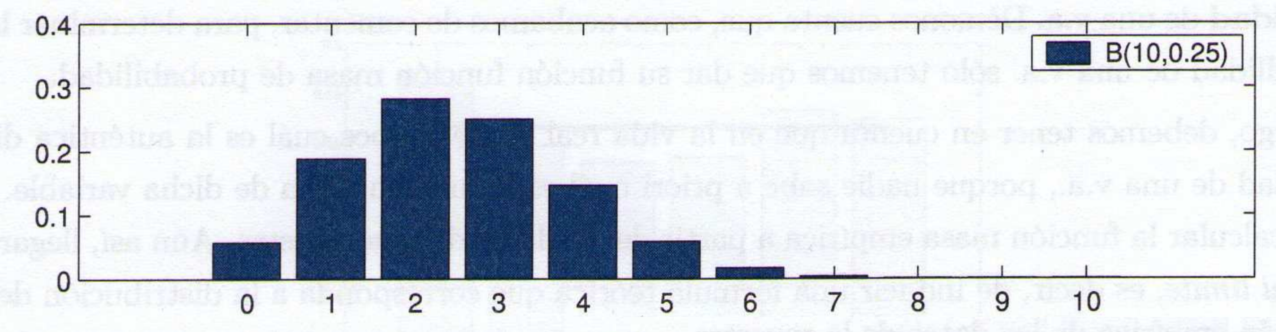
$$P(Y \le 4) = P(\boxed{X \ge 6}) = 1 - P(\boxed{X \le 5}) = 1 - 0.9527 = 0.0473$$

sucesos complementarios

TABLAS

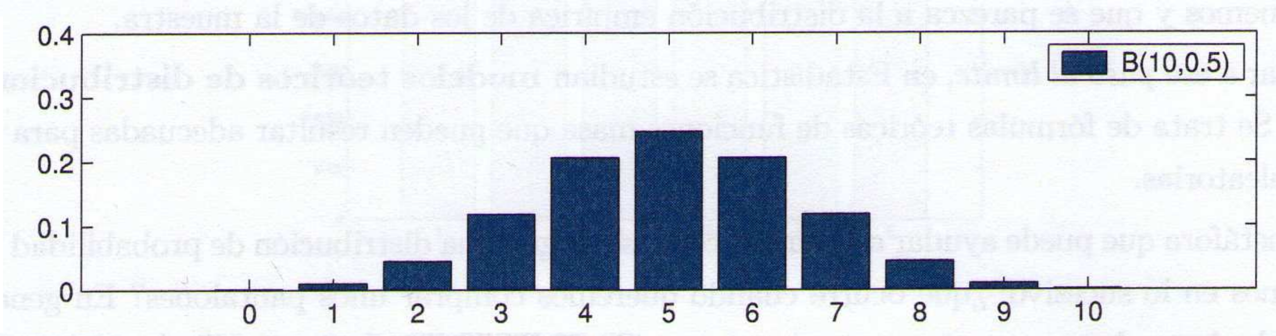
16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Algunas gráficas



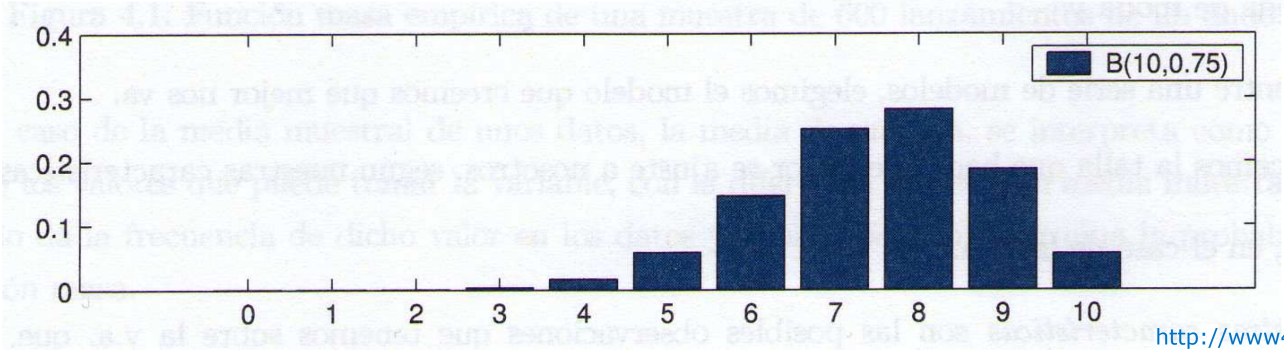
Asimetría a la derecha

Máximo: X=2



La asimetría se corrige para valores de p próximos a 0.5

Simetría: p=0.5



Asimetría a la izquierda

Máximo: X=8

http://www4.ujaen.es/~ajsaez/recursos/EstadisticaIngenieros.pdf

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Características de B(*n*;*p*)~*X*

▶ **media**: $\boxed{\mu = E\left[X\right] = n \cdot p}$

- X: nº de éxitos en n pruebas independientes de Bernouilli

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \quad donde \quad \begin{cases} P\left(X_i = 1\right) = p \\ P\left(X_i = 0\right) = 1 - p \end{cases} \Rightarrow E\left[X_i\right] = p \Longrightarrow E\left[X\right] = \sum_{i=1}^{i=n} E\left[X_i\right] = n \cdot p$$

▶ **varianza**: $\boxed{\sigma^2 = Var\left[X\right] = n \cdot p \cdot \left(1 - p\right)}$

▶ **desviación típica**: $\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot \left(1 - p\right)}}$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Ejemplo: ejercicio 5

Supóngase un sistema con 9 componentes que, para su funcionamiento, requiere que, al menos, seis estén disponibles. Si la probabilidad de funcionamiento de un componente es de 0.95, calcular la fiabilidad del sistema (probabilidad de que funcione)

Solución

- sólo son posibles dos resultados en cada prueba: que funcione el componente analizado o que no funcione
- se trata de una repetición de pruebas de Bernouilli
- X: "número de componentes que funcionan" $\Rightarrow$ $X \sim B(9;0.95)$

16. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

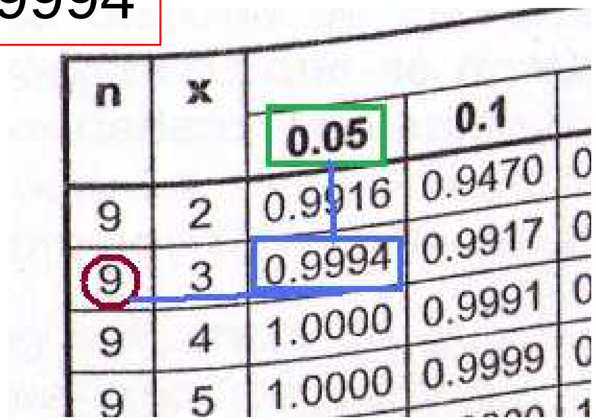
<u>**Ejemplo: ejercicio 5**</u>

<u>Solución</u>

- la distribución $X \sim B(9;0.95)$ no figura en las tablas
- Y: "número de componentes que no funciona" ➡ $Y \sim B(9;0.05)$
- A: "el sistema funciona"

$$\boxed{P(A) = P(X \geq 6) = P(Y \leq 3) = 0.9994}$$

TABLAS



n	x	0.05	0.1
9	2	0.9916	0.9470
9	3	0.9994	0.9917
9	4	1.0000	0.9991
9	5	1.0000	0.9999

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

► muestreo con reemplazamiento

- el modelo binomial exige la misma probabilidad de *éxito* en las *n* pruebas que se realizan
- si se toma una muestra de una población finita de *éxitos* y *fracasos* (por ejemplo, la producción total de cierta pieza que puede clasificarse como defectuosa o no defectuosa) el modelo binomial no se satisface salvo que una vez observado un elemento se devuelva a la población antes de realizar la siguiente observación

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

► muestreo sin reemplazamiento

- es el que se realiza normalmente
- se seleccionan, aleatoriamente, n elementos diferentes de una población formada por N elementos
- se puede extraer un conjunto de n elementos ó seleccionarlos de uno en uno sin reemplazamiento
- **ejemplo:** se tiene una urna con N bolas de las cuales r son negras y el resto, N-r, son blancas. Se toma una **muestra aleatoria simple** (es decir, sin reemplazamiento) de tamaño n y se cuenta el número de bolas negras, X, en la muestra
- la v.a. X del ejemplo sigue una distribución hipergeométrica

$$\boxed{X \sim \mathrm{H}(N;n;r/N)}$$

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

► definición

- el experimento consiste en seleccionar de forma aleatoria n elementos sin reemplazamiento de un conjunto de N elementos
- r elementos presentan una característica determinada (*éxito*) y N-r no presentan esa característica (*fracaso*)
- número de casos posibles de seleccionar la muestra: $\boxed{\binom{N}{n}}$
- número de casos posibles de seleccionar i "éxitos" entre los r "éxitos" de la muestra: $\boxed{\binom{r}{i}}$
- número de casos posibles de seleccionar n-i "fracasos" entre los N-r "fracasos" de la muestra: $\boxed{\binom{N-r}{n-i}}$

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

► definición

- sea X la v.a. que representa el número de éxitos de la muestra
- X sigue una distribución hipergeométrica: $\boxed{X \approx H\left(N\,; n\,; \dfrac{r}{N}\right)}$
- generalmente, se toman muestras sin reemplazamiento de poblaciones de tamaño relativamente pequeño
- las distintas observaciones no son independientes

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Función de masa de probabilidad

- sea una v.a. hipergeométrica $X \sim H(N;n;r/N)$
- con lo visto anteriormente en la definición, la función de masa de probabilidad es:

$$P(X=i)=\frac{\boxed{\binom{r}{i}\cdot\binom{N-r}{n-i}}}{\boxed{\binom{N}{n}}}$$

Casos favorables al suceso $X=i$ (i éxitos)

Casos posibles

- N: número de elementos
- n: tamaño de la muestra
- r: número de elementos clasificados como éxitos

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Función de masa de probabilidad

- una v.a. hipergeométrica $X \sim H(N;n;r/N)$ puede tomar valores del siguiente intervalo

$$\boxed{max\left\{0, n-\left(N-r\right)\right\} \leq i \leq min\left\{n, r\right\}}$$

- si ***n<r*** (el número de elementos de la muestra es menor que el número de éxitos): el mayor valor que puede tomar *i* es *n*
- si ***n>r*** (el número de elementos de la muestra es mayor que el número de éxitos): el mayor valor que puede tomar *i* es *r*
- si ***n<N-r*** (número de elementos de la muestra menor que el número de fracasos): menor valor que puede tomar *i* es 0
- si ***n>N-r*** (número de elementos de la muestra mayor que el número de fracasos): menor valor que puede tomar *i* es *n*-(*N*-*r*)

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Función de masa de probabilidad

- **ejemplo:** número de bolas blancas (ó negras) que pueden salir al extraer sin reemplazamiento 20 bolas de una urna que contiene 15 bolas blancas y 85 negras

  - **bolas blancas**

$$\left.\begin{array}{l} N=100 \\ n=20 \\ r=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \max\{0,-65\} \le i \le \min\{20,15\} \Rightarrow \boxed{0 \le i \le 15}$$

  - **bolas negras**

$$\left.\begin{array}{l} N=100 \\ n=20 \\ r=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \max\{0,5\} \le i \le \min\{20,85\} \Rightarrow \boxed{5 \le i \le 20}$$

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener 2 bolas negras al extraer sin reemplazamiento 3 bolas de una urna que contiene 4 bolas negras y 5 bolas blancas

Solución

- *N*: "bola negra (éxito)" $\longrightarrow$ r=4
- *B*: "bola blanca (fracaso)" $\longrightarrow$ N-r=5
- *X*: "número de bolas negras en la muestra" $\longrightarrow$ H(9;3;4/9)

$$P\left(X=2\right)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}}=0.357142\longrightarrow 35{,}71\%$$

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

- si en el ejemplo anterior se extraen las 3 bolas con reemplazamiento estamos ante un modelo binomial
- sin embargo, con poblaciones finitas, normalmente, no se realizan muestreos con reemplazamiento sino que suelen ser sin reemplazamiento
- pero si el tamaño muestral, *n*, es pequeño comparado con *r* (número de *éxitos* en la población) y con *N*-*r* (número de *fracasos*) el modelo hipergeométrico resulta muy similar al modelo binomial

$$H\left(N\,; n\,; \frac{r}{N}\right) \xrightarrow[\frac{n}{N} < 0.1]{N \to \infty} B\left(n; p = \frac{r}{N}\right)$$

17. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Características de H(N;*n*;*r*/*N*)~*X*

▶ **media**: $$\boxed{\mu = E[X] = n \cdot \frac{r}{N} = n \cdot p}$$

▶ **varianza**:

$$\boxed{\sigma^2 = Var[X] = n \cdot \frac{r}{N} \cdot \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}} \quad donde \quad q = 1 - p$$

▶ **desviación típica**:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}}} \quad donde \quad q = 1 - p$$

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

http://es.wikipedia.org/wiki/Sim%C3%A9on_Denis_Poisson

- Siméon Denis Poisson (1781-1840), físico y matemático francés conocido por sus trabajos en el campo de la electricidad, también publicó sobre geometría diferencial y la teoría de probabilidades

- distribución introducida en 1837, proporciona un modelo para la frecuencia relativa del número de "sucesos poco comunes" que ocurren en una unidad de tiempo, área, longitud, volumen, etc.

  - número de defectos en cada metro de un cable
  - número de llamadas/minuto recibidas en una centralita telefónica
  - número de clientes que llegan a un servicio en un intervalo de tiempo
  - fisiones por unidad de masa de un material radioactivo

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Caracterización

- se considera el número de éxitos en un período de tiempo en el que los éxitos acontecen a razón de λ veces por unidad de tiempo (promedio) y de forma independiente
- en ese caso, se considera la variable X

  X: *número de ocurrencias del suceso por unidad de tiempo*

- esta variable X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ; se denota: $X\sim$Poisson(λ) ó $X\sim \mathcal{P}(\lambda)$
- hipótesis fundamentales:
  - **independencia** en las diferentes realizaciones
  - **promedio constante** de ocurrencias por unidad de tiempo

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Caracterización

- el número de sucesos que ocurren en un cierto intervalo de tiempo (o espacio) es independiente del número de sucesos que ocurren en otro intervalo de la misma longitud no solapado
- el número medio de sucesos en cada unidad se denota con la letra griega λ
- la probabilidad de que, en un intervalo de tiempo (o espacio) arbitrariamente corto, se produzca un único suceso es proporcional a la longitud del intervalo
- la probabilidad de que, en un intervalo de tiempo (o espacio) arbitrariamente corto, se produzcan dos ó más sucesos es prácticamente nula

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Función de masa de probabilidad

- experimento: contar el número de veces que ocurre un suceso particular durante una unidad de tiempo dada (ó en una unidad de longitud, área, volumen, … dados)

$$\boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$$

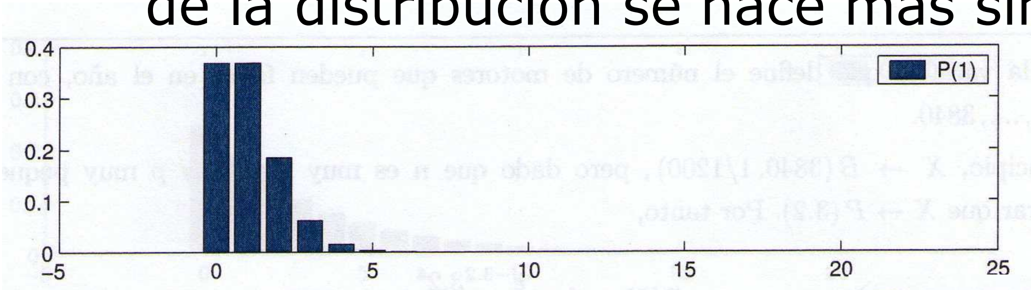
$$\boxed{P(X = i) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{i}}{i\,!} \quad (i = 0, 1, 2, \ \ldots)}$$

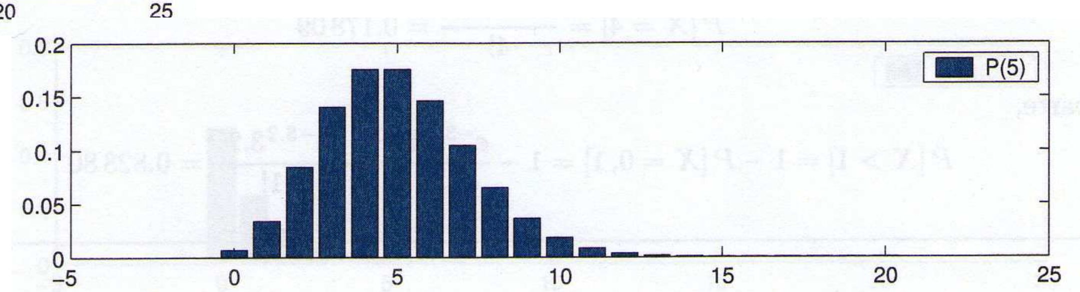
Las unidades de *i* y λ deben ser las mismas

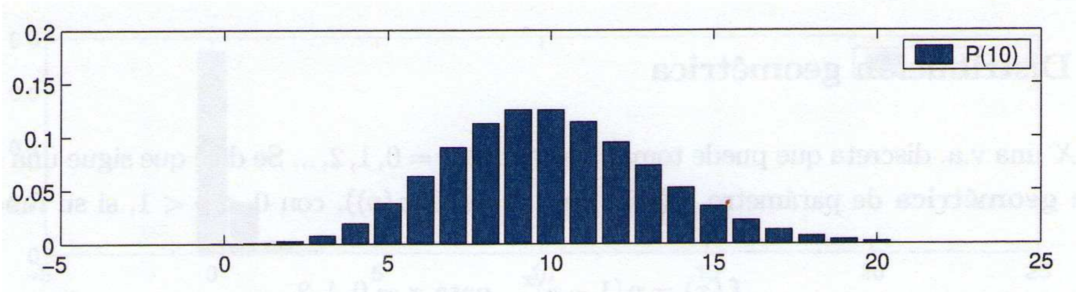
18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Representación gráfica

- la distribución de Poisson es asimétrica, cuanto menor es λ más asimétrica es; a medida que aumenta, la representación gráfica de la distribución se hace más simétrica







http://www4.ujaen.es/~ajsaez/recursos/EstadisticaIngenieros.pdf

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Características de P(λ)~*X*

- **media**: $\boxed{\mu = E\left[X\right] = \lambda}$
- **varianza**: $\boxed{\sigma^2 = Var\left[X\right] = \lambda}$
- **desviación típica**: $\boxed{\sigma = \sqrt{\lambda}}$

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Aproximación de la binomial
(ley de sucesos raros)

- se supone que, como en la distribución binomial,
  - cierto experimento aleatorio se repite n veces de forma independiente
  - hay un suceso que se denomina *éxito* que ocurre con probabilidad constante p
- además, se supone que:
  - el experimento se repite gran número de veces (n es grande)
  - el éxito es un suceso raro (p es pequeño)
  - el promedio de ocurrencias es $\lambda = n \cdot p$

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Aproximación de la binomial
(ley de sucesos raros)

► con los supuestos anteriores, la v.a. X que mide el número de éxitos sigue, aproximadamente, una distribución de Poisson ($X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) con $\lambda = n \cdot p$

► en esta segunda caracterización de la distribución se considera que la aproximación es:

- **aceptable** si $n > 20$ y $p < 0.05$
- **excelente** si $n > 100$ y siempre que $n \cdot p < 10$
- **Nota.** La aproximación es muy útil ya que, para estos valores de los parámetros, la distribución binomial es complicada de calcular ya que, entre otros cálculos, se exige el cálculo de $n!$

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Ejemplo

Sea X una variable binomial de parámetros n=1000 y p=0.006. Calcular P(X=20)

Solución

$$X \approx B\left(1000\,;\,0.006\right)$$

$$\boxed{P\left(X=20\right)=\binom{1000}{20}\cdot\left(0.006\right)^{20}\cdot\left(1-0.006\right)^{1000-20}}$$

Cálculo complicado
n!=1000!

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Ejemplo

Sea X una variable binomial de parámetros n=1000 y p=0.006. Calcular P(X=20)

Solución

$$\left.\begin{array}{l} n>100 \\ \lambda=n\cdot p=6<10 \end{array}\right\} \Rightarrow X \approx B(1000\,;0.006) \approx Poisson(6)$$

$$P(X=20) \approx \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{i}}{i\,!} \Rightarrow$$

	BINOMIAL	POISSON
P(X=20)	3,41E-06	3,73E-06

Excel

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Ejemplo

El número de personas que llega a un hospital sigue una distribución de Poisson. Si el promedio es de 120 personas a la hora, ¿cuál es la probabilidad de que, en un minuto lleguen, por lo menos, 3 personas?

Solución

- *X*: "número personas/minuto que llegan"
- promedio: $\lambda = \dfrac{120}{60} = 2 \ \ personas / minuto$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) =$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 0.3233$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = 0.1353$$
$$P(X = 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = 0.2707$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} = 0.2707$$

18. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Ejemplo

Solución

- buscando en las tablas

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.6767 = 0.3233$$

	$\lambda = 1{,}80$		$\lambda = 1{,}90$		$\lambda = 2{,}00$		$\lambda = 2{,}10$		$\lambda = 2{,}20$
x	Probabilidad	x	Probabilidad	x	Probabilidad	x	Probabilidad	x	Probabilidad
0	0.1653	0	0.1496	0	0.1353	0	0.1225	0	0.1108
1	0.4628	1	0.4337	1	0.4060	1	0.3796	1	0.3546
2	0.7306	2	0.7037	2	0.6767	2	0.6496	2	0.6227
3	0.8913	3	0.8747	3	0.8571	3	0.8386	3	0.8194
4	0.9636	4	0.9559	4	0.9473	4	0.9379	4	0.9275
5	0.9896	5	0.9868	5	0.9834	5	0.9796	5	0.9751
6	0.9974	6	0.9966	6	0.9955	6	0.9941	6	0.9925
7	0.9994	7	0.9992	7	0.9989	7	0.9985	7	0.9980
8	0.9999	8	0.9998	8	0.9998	8	0.9997	8	0.9995
9	1.0000	9	1.0000	9	1.0000	9	0.9999	9	0.9999
10	1.0000	10	1.0000	10	1.0000	10	1.0000	10	1.0000

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

19. INTRODUCCIÓN

- una v.a. continua es aquella que puede tomar cualquier valor en un intervalo (ó unión de intervalos)
- por tanto, los valores que puede tomar constituyen un conjunto con un número infinito no numerable de elementos
- ejemplos
  - tensión de fractura de una muestra de asfalto
  - grosor de una lámina de aluminio
  - pH de una muestra de agua
  - duración de una llamada telefónica
  - peso de un individuo

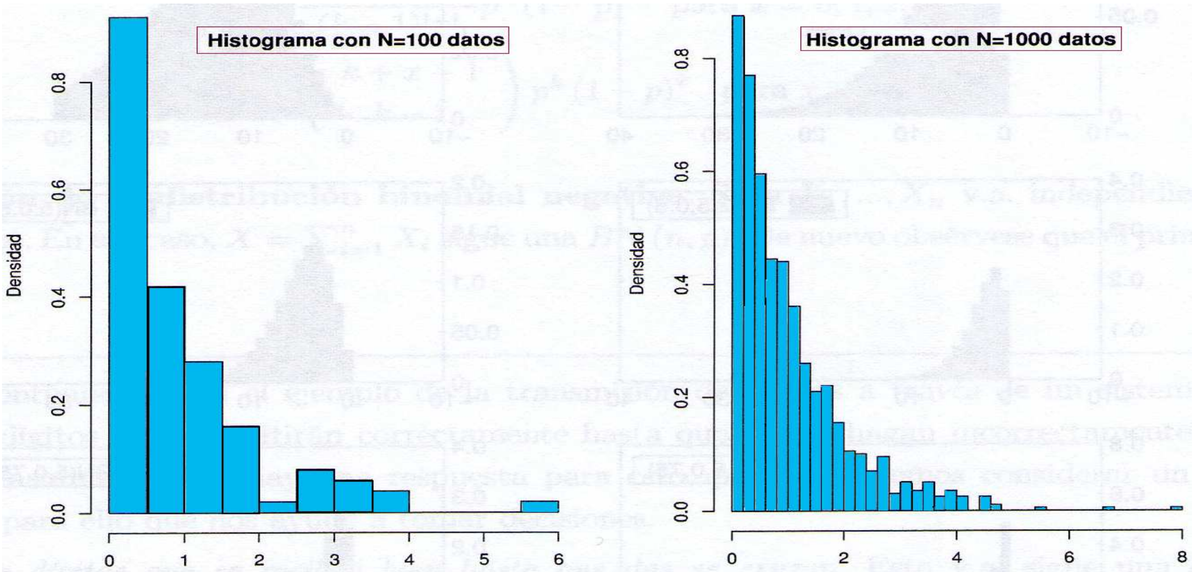
19. INTRODUCCIÓN

- diferencia principal entre v.a. discreta y v.a. continua
  - en la v.a. discreta se pueden numerar sus posibles valores y contar el número de veces que aparece cada uno en cierta muestra
  - en una muestra de variable continua no se repiten valores (si se toma un número suficiente de decimales de cada uno)
  - como ambos tipos de variables son diferentes deben tratarse de distinta forma
- cálculo de probabilidades de sucesos asociados a v.a.
  - en la v.a. discreta se usa la función de masa de probabilidad
  - los valores de una v.a. continua no tienen masa de probabilidad: se emplean la función de distribución y la denominada función de densidad

19. INTRODUCCIÓN

HISTOGRAMA

- permite aproximar las probabilidades de los valores de una v.a. continua
- ejemplo: supónganse dos muestras de una variable, una con N=100 valores y otra con N=1000 valores
  - se consideran, respectivamente, 10 y 31 intervalos de clase
  - histogramas

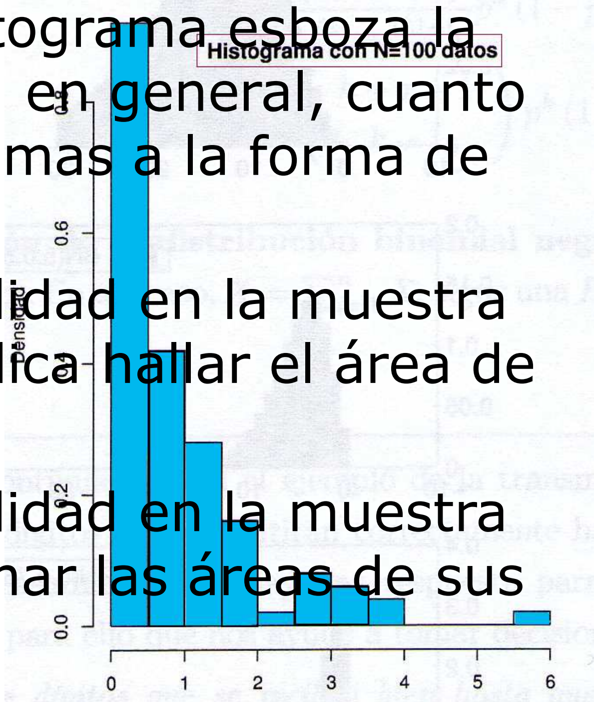


19. INTRODUCCIÓN

HISTOGRAMA

▶ ejemplo:

- el área de las barras representa la frecuencia relativa con que se dan los valores de los sucesivos intervalos en la muestra
- al pasar de N=100 a N=1000 datos el histograma esboza la forma de una función real de variable real; en general, cuanto mayor es N más se aproximan los histogramas a la forma de una función continua
- histograma de N=100: calcular la probabilidad en la muestra de alguno de los intervalos del gráfico implica hallar el área de la barra sobre el intervalo
- histograma de N=100: calcular la probabilidad en la muestra de varios intervalos del gráfico supone sumar las áreas de sus barras correspondientes

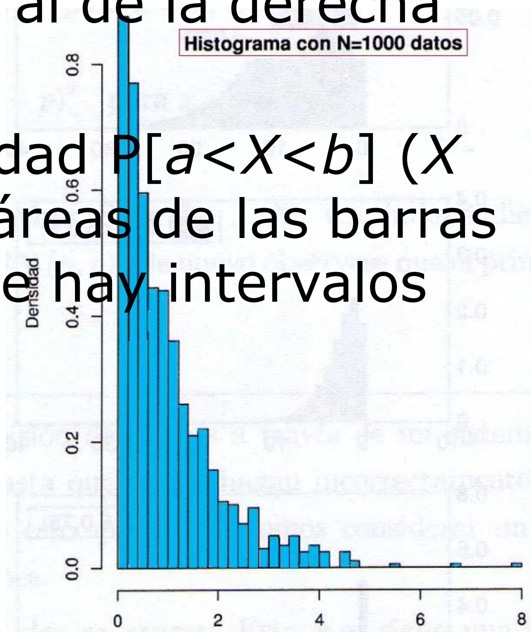


19. INTRODUCCIÓN

<u>HISTOGRAMA</u>

▶ <u>ejemplo</u>:

- para que las probabilidades en la muestra se aproximen a las verdaderas es necesario que el tamaño de la muestra, *N*, sea grande (cuanto más mejor)
- en este caso, el histograma se asemeja más al de la derecha de la figura anterior
- <u>histograma de *N*=1000</u>: calcular la probabilidad P[$a<X<b$] (X toma valores entre a y b) supone sumar las áreas de las barras que forman el intervalo (a,b), suponiendo que hay intervalos que forman, exactamente, el intervalo (a,b)



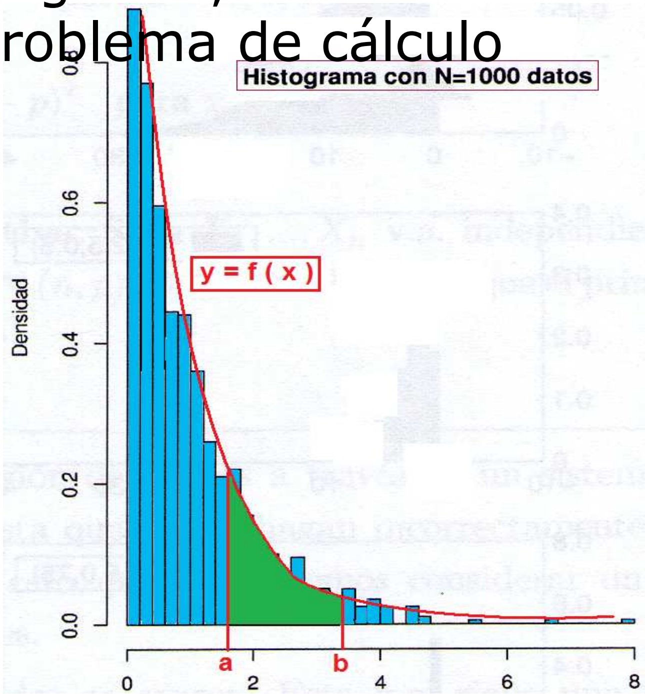
19. INTRODUCCIÓN

HISTOGRAMA

▶ ejemplo:

- si el tamaño de la muestra es suficientemente grande para realizar un paso al límite y encontrar una función real, *f*(x), que represente la línea que define el histograma, calcular la probabilidad anterior se reduce a un problema de cálculo integral

$$P\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right)dx$$



20. FUNCIÓN DE DENSIDAD

Dada una v.a. continua X, se define su **función de densidad de probabilidad** como aquella función $f(x)$ tal que:

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx} \quad \forall\, a, b \in R \ \text{ ó } \ a, b = \pm\infty$$

▶ **Utilización en el cálculo de probabilidades**

- $\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$
- $\boxed{P(x \in A) = \int_A f(x)\,dx}$

20. FUNCIÓN DE DENSIDAD

PROPIEDADES

- la función de densidad **NO** es una probabilidad

  $\boxed{f(x) \geq 0}$ pero no es necesario que $f(x) \leq 1$

- área total entre la curva de densidad de probabilidad y el eje de abscisas igual a 1:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$$

- <u>probabilidad de conjuntos unitarios</u>:

$$\boxed{P(X = a) = P(a < X < a) = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

20. FUNCIÓN DE DENSIDAD

PROPIEDADES

► extremos de intervalos: a efectos de cálculo integral un punto no afecta al resultado de la integral

- $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\forall\, a, b \in R$

20. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Dada una v.a. continua *X*, se define su **función de distribución de probabilidad** como aquella función *F*(*x*) tal que:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt} \qquad \forall\, t \in R$$

▶ Propiedades

- $\boxed{0 \leq F(x) \leq 1}$
- $\boxed{\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0} \boxed{\lim_{x \to \infty} F(x) = 1}$
- ***F*(x)** es un función **monótona no decreciente**
- ***F*(x)** es un función **continua**

21. RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES

- Cálculo de la función de densidad a partir de la función de distribución.

  Si $F(x)$ es la función de distribución de una v.a. continua entonces su función de densidad, $f(x)$, es:

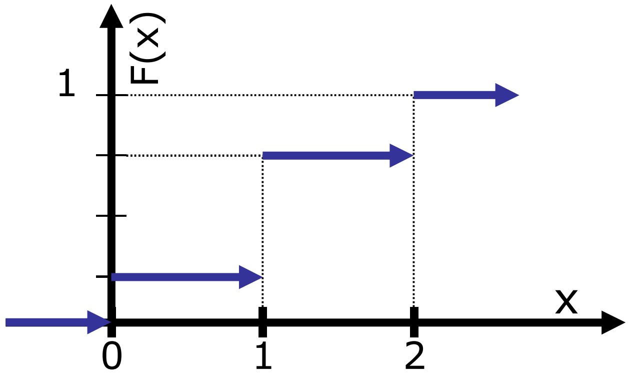
$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

- Cálculo de la función de distribución a partir de la función de densidad.

  Si $f(x)$ es la función de densidad de una v.a. continua entonces su función de distribución, $F(x)$, es:

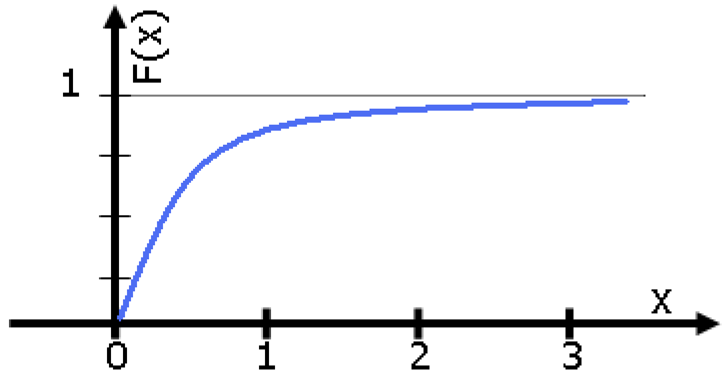
$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt} \qquad \forall\, t \in R$$

22. COMPARATIVA ENTRE VARIABLES



v.a. discreta

- $F(x) = P(X \leq x)$
- ***F*(x)**: función **escalonada**
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$



v.a. continua

- $F(x) = P(X \leq x)$
- ***F*(x)** : función **continua**
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

23. EJEMPLO

Ejemplo: ejercicio 1

La función de densidad de una v.a. continua es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

1. Comprobar que *f*(x) es una función de densidad y representarla gráficamente

2. Hallar la función de distribución, *F*(x); representarla gráficamente

3. Calcular: $P\left(X \ge \frac{1}{3}\right)$ $P\left(X \le \frac{1}{3}\right)$ $P\left(X > \frac{1}{3}\right)$

$P\left(X < \frac{1}{3}\right)$ $P\left(X = \frac{1}{2}\right)$ $P\left(\frac{1}{2} < X \le 1\right)$

23. EJEMPLO

Ejemplo: ejercicio 1

Solución

1. Comprobación de función de densidad

- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in R$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{0} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{0} 0\,dx = \lim_{u \to -\infty} [0]_{u}^{0} = 0$$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{0}^{1} = 1$$

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_{1}^{u} f(x)\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_{1}^{u} 0\,dx = \lim_{u \to \infty} [0]_{1}^{u} = 0$$

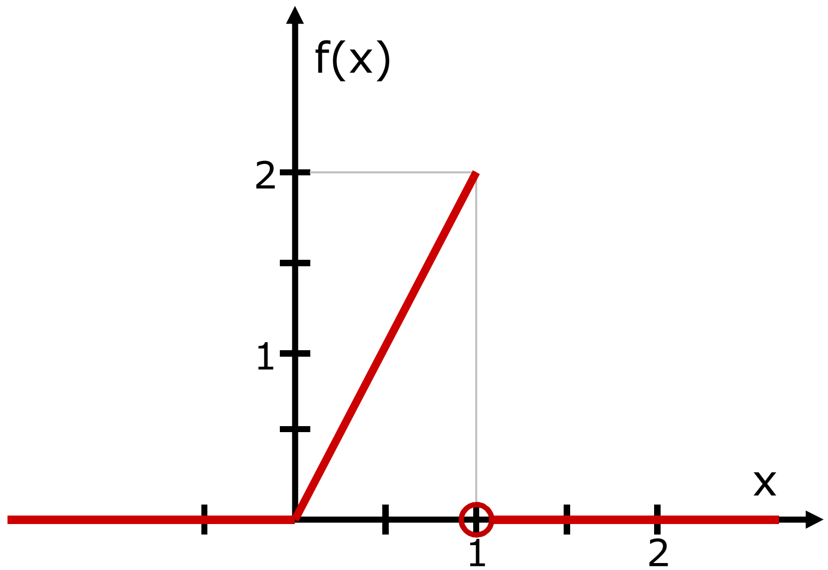
23. EJEMPLO

Ejemplo: ejercicio 1

Solución

1. Representación gráfica

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$



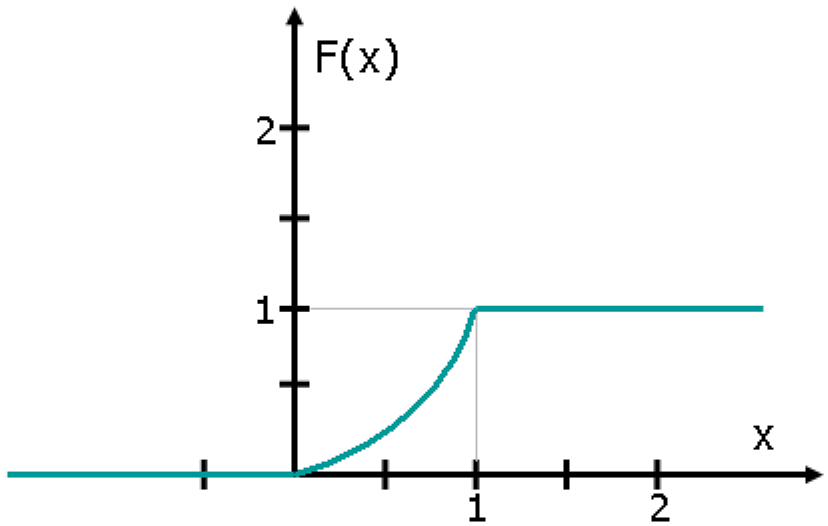
23. EJEMPLO

Ejemplo: ejercicio 1

Solución

2. Función de distribución, $F(\mathrm{x})$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$



23. EJEMPLO

Ejemplo: ejercicio 1

Solución

2. Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

- $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{x} 0\,dt = 0 \quad \forall x < 0$

- $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt = 0 + \left[t^2\right]_0^x = x^2 \quad \forall x \in [0,1]$

- $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \lim_{u \to \infty} \int_{1}^{u} 0\,dt = 1 \quad \forall x > 1$

23. EJEMPLO

Ejemplo: ejercicio 1

Solución

3. Cálculo de probabilidades:

- $P\left(X \leq \tfrac{1}{3}\right) = P\left(X < \tfrac{1}{3}\right) = F\left(\tfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9}$
- $P\left(X \geq \tfrac{1}{3}\right) = P\left(X > \tfrac{1}{3}\right) = 1 - F\left(\tfrac{1}{3}\right) = \dfrac{8}{9}$
- $P\left(\tfrac{1}{2} < X \leq 1\right) = F(1) - F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$
- $P\left(X = \tfrac{1}{2}\right) = 0$

23. EJEMPLO

Ejemplo

La función de distribución de una v.a. continua es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x & si\ 0 \le x < 1 \\ 1 & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

1. Representarla gráficamente

2. Hallar la función de densidad, $f(x)$, y representarla gráficamente

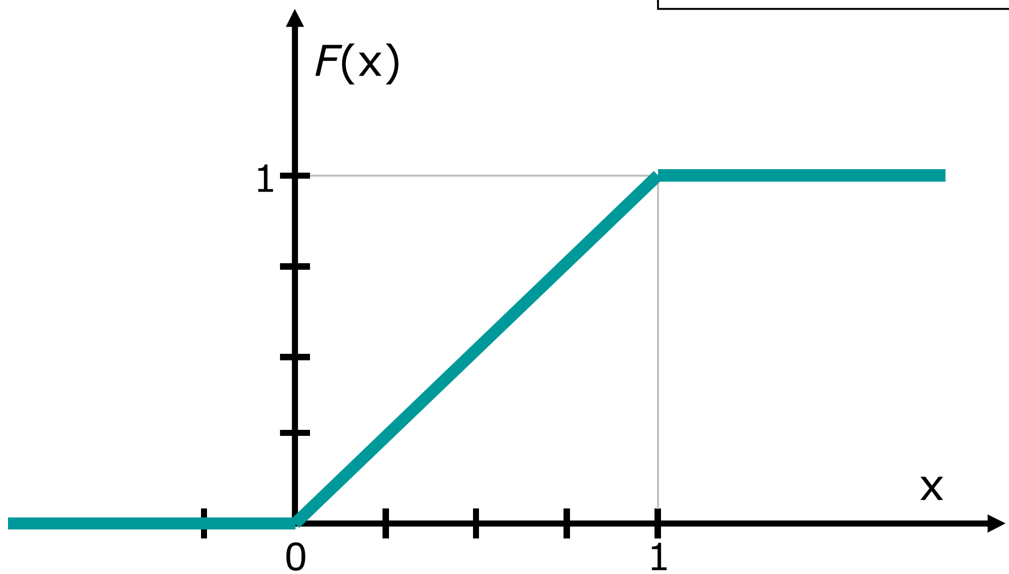
23. EJEMPLO

Ejemplo

Solución

1. Representación gráfica

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ x & si\ 0\leq x<1 \\ 1 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$



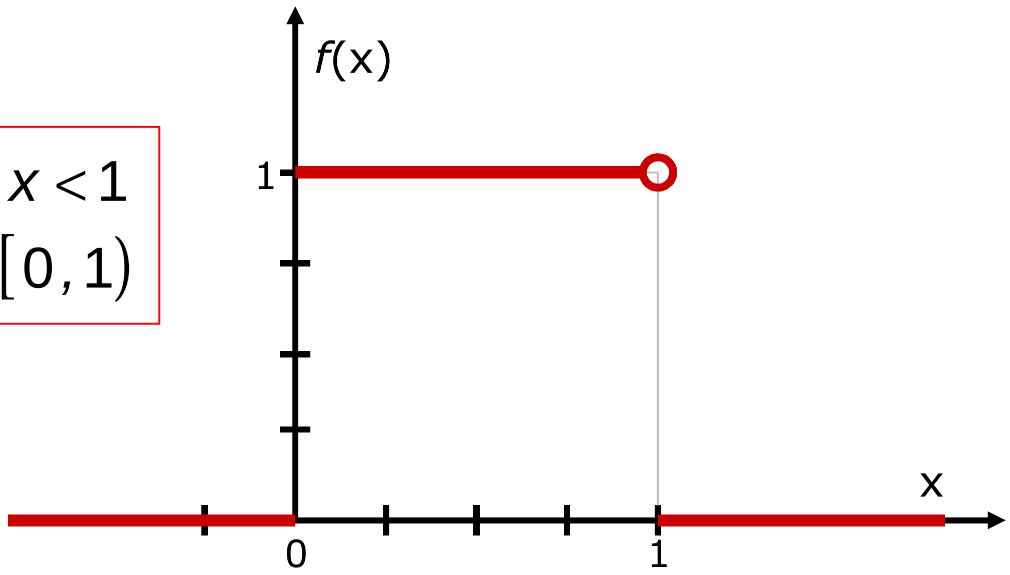
23. EJEMPLO

Ejemplo

Solución

2. Función de densidad, *f*(x)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \le x < 1 \\ 0 & si \;\; x \notin [0,1) \end{cases}$$



24. MEDIA O VALOR ESPERADO

Media, **valor esperado** ó **esperanza matemática:**

$$\boxed{\mu = E[X] = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$

- X es una v.a. continua con función de densidad $f(x)$
- interpretaciones:
  - valor central de la variable alrededor del que se da el conjunto de realizaciones de la v.a
  - valor esperado (aquél en el que se tienen más esperanzas)
- si g(X) es una función real de una v.a. X también es una v.a.; entonces:

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx}$$

24. MEDIA O VALOR ESPERADO

EJEMPLO

- sea X una v.a. continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$\mu = E[X] = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

- la media es el punto medio del intervalo

$$\boxed{\mu = E[X] = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \forall x \in [x_1, x_2]}$$

24. MEDIA O VALOR ESPERADO

EJEMPLO

- sea *X* una v.a. continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x} & si\ x\geq 0\\ 0 & si\ x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx\Rightarrow v=-e^{-\lambda x}\end{cases}$$

$$\mu=E[X]=\int_0^{\infty}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx=\lim_{u\to\infty}\int_0^{u}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left[\left[-x\cdot e^{-\lambda x}\right]_0^u+\int_0^u e^{-\lambda x}\,dx\right]=\lim_{u\to\infty}\left[-u\cdot e^{-\lambda u}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^u\right]=\lim_{u\to\infty}\left[-u\cdot e^{-\lambda u}-\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda u}-1\right)\right]$$

- resolviendo el límite: $\boxed{\mu=E[X]=\frac{1}{\lambda}}$

24. MEDIA O VALOR ESPERADO

PROPIEDADES

- sea una v.a. X y sean las constantes a y b

$$\boxed{E[bX] = b\,E[X]}$$

$$\boxed{E[a+X] = a + E[X]}$$

$$\boxed{E[a+bX] = a + b\,E[X]}$$

- la media de la suma de dos v.a., X e Y, es la suma de sus medias

$$\boxed{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$$

  - **Nota**: se puede generalizar a n variables

- si las dos v.a., X e Y, son independientes

$$\boxed{E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]}$$

25. VARIANZA

Varianza de una v.a. con valor esperado μ**:**

$$\sigma^2 = Var[X] = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

- la varianza de una v.a. continua X es el valor esperado del cuadrado de las desviaciones a la media de X
- es una medida de la concentración de los valores de la v.a. en torno a su media
- para una v.a. continua X:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$$

25. VARIANZA

Varianza de una v.a. con valor esperado μ**:**

$$\sigma^2 = Var[X] = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

► puede abreviarse el cálculo con la siguiente fórmula, más cómoda:

$$\sigma^2 = Var[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2$$

► la varianza es un promedio que mide la distancia de los valores de la v.a. a su media

- varianza pequeña: alta concentración de valores en torno a μ
- varianza grande: alta dispersión de valores respecto a μ

25. VARIANZA

EJEMPLO

- sea *X* una v.a. continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x_2-x_1} & x_1\le x\le x_2\\ 0 & x\notin[x_1,x_2]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu=E[X]=\frac{x_2+x_1}{2}}$$

$$E\left[X^2\right]=\int_{x_1}^{x_2}x^2\cdot\frac{1}{x_2-x_1}\,dx=\frac{1}{x_2-x_1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{x_2^3-x_1^3}{3\left(x_2-x_1\right)}=\frac{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)}{3\left(x_2-x_1\right)}$$

$$\sigma^2=Var[X]=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=\frac{\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)}{3}-\frac{\left(x_1+x_2\right)^2}{4}$$

$$\boxed{\sigma^2=Var[X]=\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{12}}$$

25. VARIANZA

PROPIEDADES

- sea una v.a. X y sean las constantes a y b

$$\boxed{Var[b\,X] = b^2 \cdot Var[X]}$$

$$\boxed{Var[a + X] = Var[X]}$$

$$\boxed{Var[a + b\,X] = b^2 \cdot Var[X]}$$

- dos v.a., X e Y, son independientes cuando el conocimiento del valor de una de ellas no cambia la probabilidad de la otra; en ese caso:

$$\boxed{Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]} \qquad \boxed{Var[X - Y] = Var[X] + Var[Y]}$$

- **Nota**: se puede generalizar a n variables

26. DESVIACIÓN TÍPICA

Desviación típica de una v.a. X:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var[X]}}$$

- para el ejemplo anterior:

$$\sigma^2 = Var[X] = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}}$$

27. NOTA

Estimaciones muestrales de media y varianza de una v.a.

- ¿qué relación hay entre la media y la varianza de una v.a. (continua o discreta) y la media y la varianza de unos datos (tema *Estadística descriptiva*)?
  - la respuesta se verá más adelante aunque se da un avance
  - la relación es parecida a la que se da entre los diagramas de barras y las funciones de masa ó entre los histogramas y las funciones de densidad
  - es decir, si se tienen unos datos de una variable (muestra de una variable) la media y la varianza de la muestra resultan ser aproximaciones de la media y la varianza de la v.a. que serán tanto mejores cuanto mayor sea el tamaño de la muestra

28. DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEV

Sea una v.a. X con media μ y desviación típica σ; para cualquier número positivo k se verifica:

$$\boxed{P\left(\left| X-\mu \right| < k\cdot\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}}$$

- sustituyendo k=2 en la desigualdad:

$$P\left(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\right) \geq \frac{3}{4}$$

- al menos, el 75% de la distribución de probabilidad debe estar contenida en el intervalo $\left(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma\right)$
- de forma análoga

$$\begin{cases} \left(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma\right) \Rightarrow \boxed{88.\overset{\frown}{8}\%} \\ \left(\mu-4\sigma,\ \mu+4\sigma\right) \Rightarrow \boxed{93.75\%} \end{cases}$$

MODELOS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

29. INTRODUCCIÓN

Distribución de probabilidad

- para determinar la distribución de probabilidad de una v.a. continua basta con dar la función de densidad
- a priori no puede conocerse la función de densidad de una v.a. continua

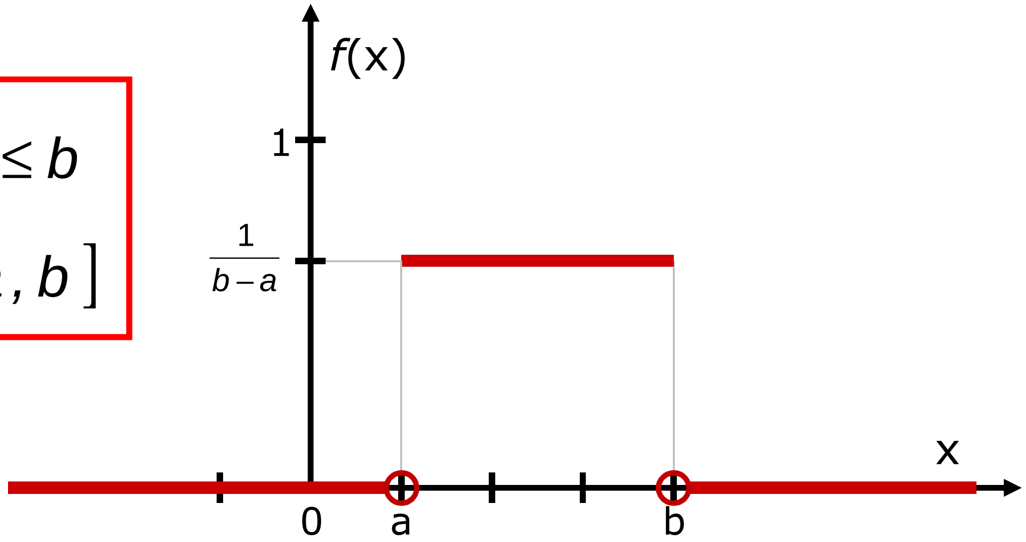
Modelos teóricos de distribución de probabilidad

fórmulas teóricas de funciones masa que pueden resultar adecuadas para determinadas variables aleatorias

30. DISTRIB. UNIFORME CONTINUA

- una v.a. continua *X* sigue una distribución **uniforme** continua en el intervalo [*a*,*b*] si está distribuida de forma uniforme en dicho intervalo
- notación: $\boxed{X \sim UC[a,b]}$ $\boxed{X \sim UC(a;b)}$
- **función de densidad** de probabilidad:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad a\le x\le b \\ 0 & si \quad x\notin [a,b] \end{cases}}$$



30. DISTRIB. UNIFORME CONTINUA

- por tanto, una distribución **uniforme** continua es aquella que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo, todos ellos con la misma probabilidad

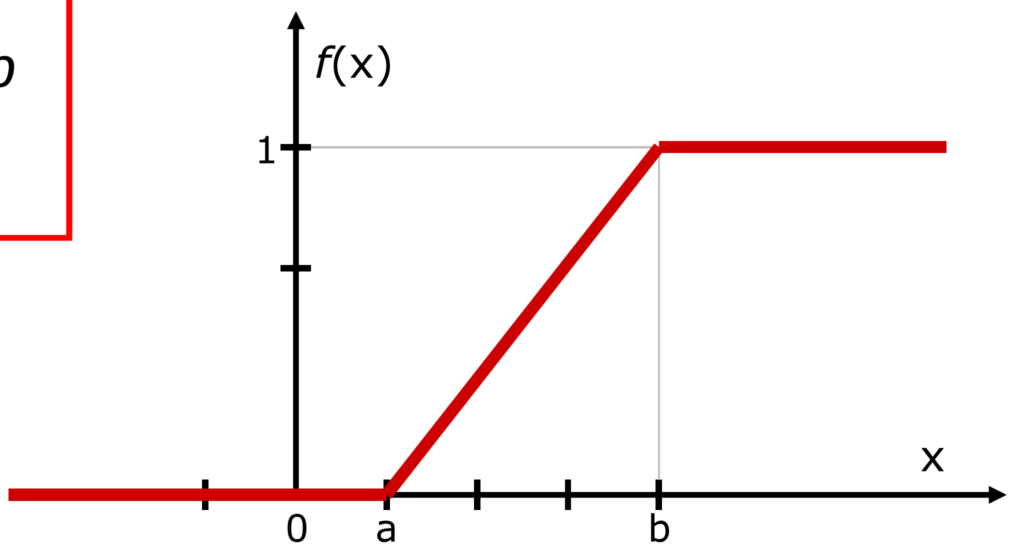
- **ejemplo**: el precio medio del litro de gasóleo A en una determinada gasolinera durante el próximo mes se estima que puede oscilar entre 1,35€ y 1,45€
  - el precio del litro de gasóleo A podría ser de 1.395€, 1.400€, 1.415€, ...
  - hay infinitas posibilidades (infinitos valores distintos dentro del intervalo [1.35,1.45])
  - todas ellas tienen la misma probabilidad

30. DISTRIB. UNIFORME CONTINUA

► **función de distribución** de probabilidad:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{t\,\big|_a^x}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} \quad \forall x \in [a,b]$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$



30. DISTRIB. UNIFORME CONTINUA

- esperanza matemática (media):

$$\boxed{\mu = E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \forall x \in [a,b]}$$

- varianza:

$$\boxed{\sigma^2 = Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

- desviación típica:

$$\boxed{\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}}$$

30. DISTRIB. UNIFORME CONTINUA

Ejemplo: ejercicio 3

El tiempo que tarda una determinada persona en ir de su casa al trabajo varía uniformemente entre 20 y 30 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 29 minutos?

Su hora de entrada son las 9,00h. ¿A qué hora debe salir de casa para no llegar tarde al trabajo con una probabilidad superior al 90%?

30. DISTRIB. UNIFORME CONTINUA

Ejemplo: ejercicio 3

Solución

1. $X \sim UC(20;30)$ ➡

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 20 \\ \dfrac{x-20}{10} & si \quad 20 \le x \le 30 \\ 1 & si \quad x > 30 \end{cases}$$

$$F(29) = P(X \le 29) = \frac{29-20}{30-20} = \frac{9}{10} = 0.9$$

2. Otra forma de preguntar lo mismo: $X \sim UC(20;30)$

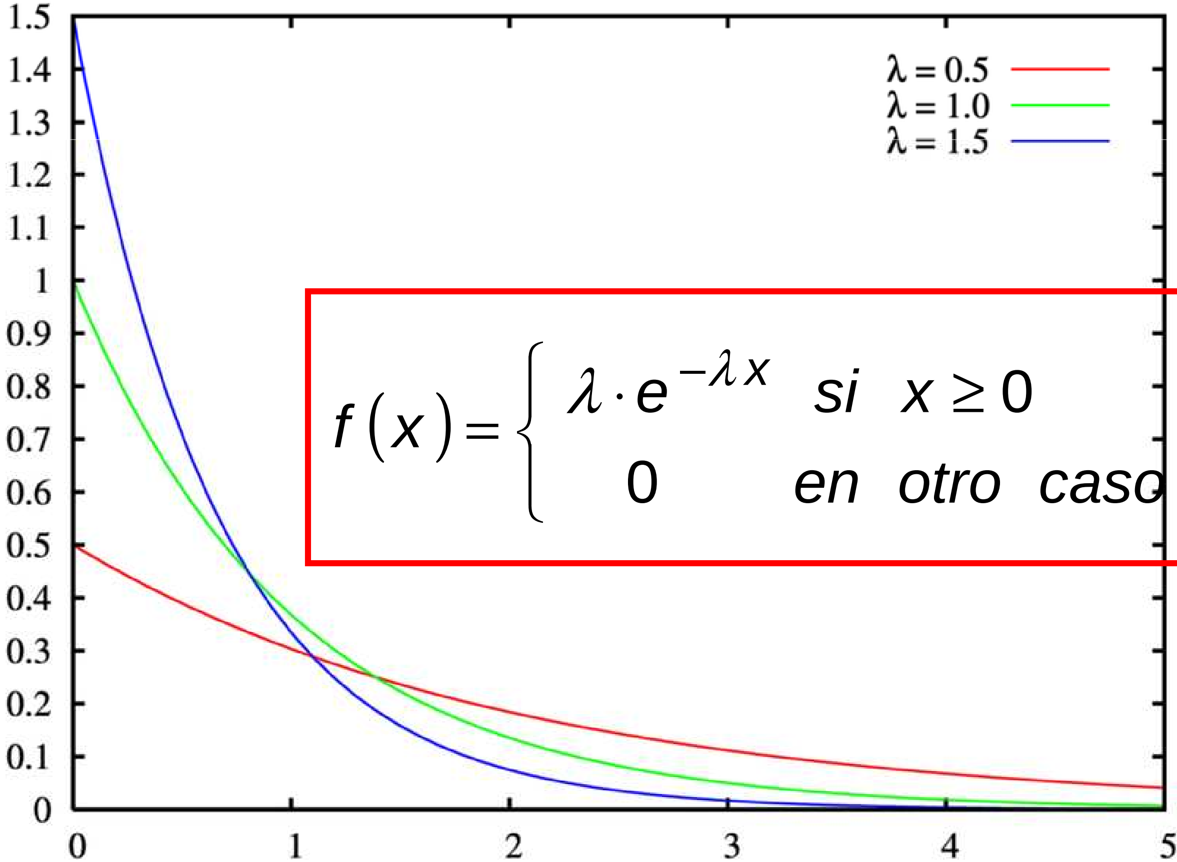
$$F(x) = P(X \le x) = \frac{x-20}{30-20} > 0.9 \Rightarrow \boxed{x > 29}$$

a las 8,30h.

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

- una v.a. continua *X* que puede tomar valores x≥0 sigue una distribución **exponencial** de parámetro λ si su **función de densidad** de probabilidad es de la forma:

http://es.wikipedia.org/wiki/Distribución_exponencial



$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases} \qquad \forall \lambda > 0$$

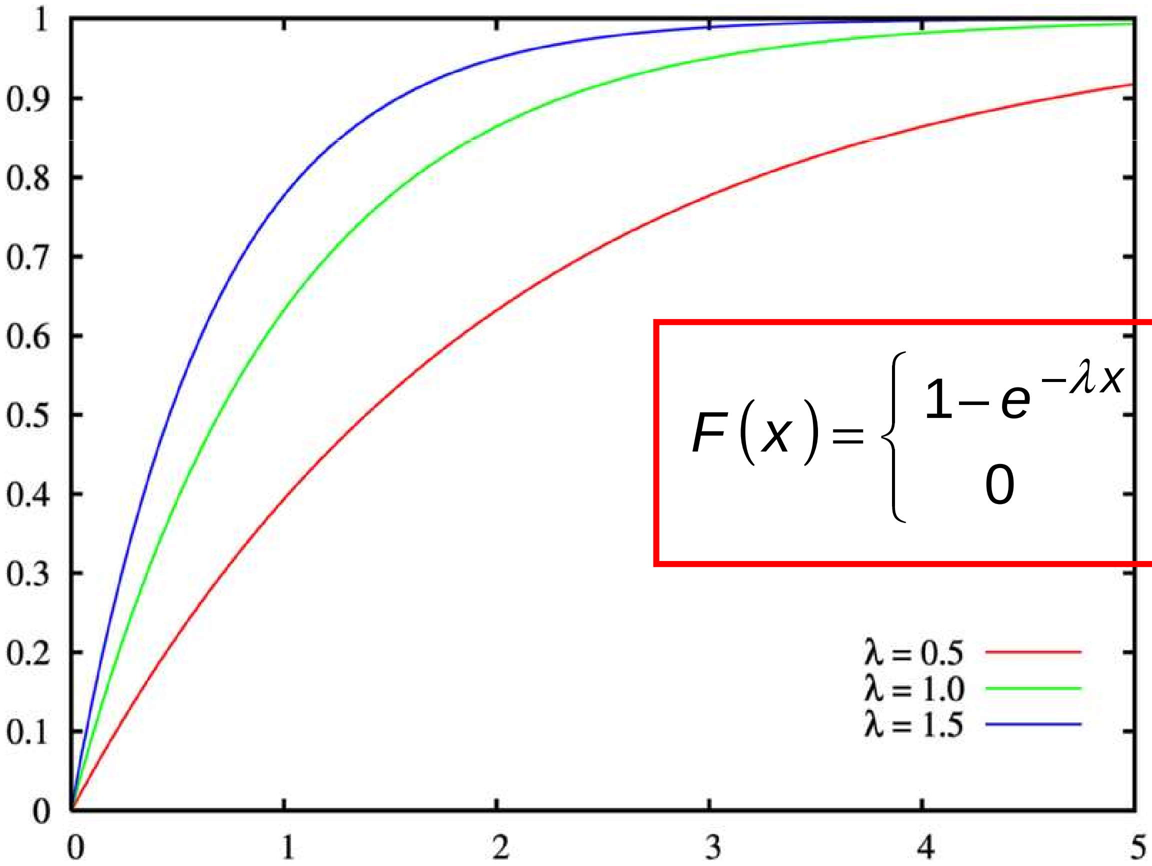
31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

- notación: $\boxed{X \sim \varepsilon(\lambda)}$ $\boxed{X \sim \exp(\lambda)}$
- <u>utilidad</u>:
  - suele ser modelo de aquellos fenómenos aleatorios que miden el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos sucesos
  - también, se emplea para modelar la distribución de la vida útil de determinados componentes
- <u>ejemplos</u>:
  - tiempo transcurrido entre la puesta en marcha de una cierta componente y un fallo
  - tiempo transcurrido entre dos llamadas a una centralita

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

▶ **función de distribución** de probabilidad:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x \ge 0$$



$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x \ge 0 \\ 0 & en\ otro\ caso\ (x < 0) \end{cases}}$$

http://es.wikipedia.org/wiki/Distribución_exponencial

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

- <u>esperanza matemática (media)</u>:

$$\boxed{\mu = E[X] = \frac{1}{\lambda}}$$

- <u>varianza</u>:

$$\boxed{\sigma^2 = Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}}$$

- <u>desviación típica</u>:

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$$

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Ejemplo: ejercicio 4

El tiempo que transcurre entre la llegada de dos autobuses a cierta parada se distribuye exponencialmente con media 5 minutos. Calcular la probabilidad de que haya que esperar entre 4 y 6 minutos.

Solución

X: tiempo que transcurre entre la llegada de dos autobuses

$$\mu = E[X] = \frac{1}{\lambda} = 5 \quad \Rightarrow \quad (\beta = \mu =)\ \lambda = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad X \sim \varepsilon(1/5)$$

$$\boxed{P(4 < X < 6) = F(6) - F(4) = \left(1 - e^{-\frac{6}{5}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{4}{5}}\right) = 0.148134}$$

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Caracterización

- distribución muy relacionada con la de Poisson
  - sea $X \to \mathcal{P}(\lambda)$ una v.a. discreta que cuenta el número de éxitos de un fenómeno aleatorio en cierto período de tiempo
  - en este caso, el tiempo que pasa entre dos éxitos consecutivos es una v.a. continua $T \to \mathcal{E}(\lambda)$
- ejemplo
  - el número de llamadas recibidas, en períodos de t minutos (X), en una centralita sigue una distribución de Poisson
  - λ: número medio de llamadas/minuto
  - $\lambda \cdot t$: número de llamadas esperadas en t minutos
  - $X \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot t)$: distribución de Poisson
  - T : tiempo de espera hasta la siguiente llamada

$\boxed{T \approx \varepsilon(\lambda \cdot t)}$ → $\boxed{P(T > t) = e^{-\lambda t}}$

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Ejemplo

Un elemento radiactivo emite partículas según una variable de Poisson con un promedio de λ=15 partículas por minuto. En ese caso, el tiempo *T* que transcurre entre la emisión de una partícula y la siguiente sigue una distribución exponencial de parámetro λ=15 . ¿Cuál es la probabilidad de que pasen menos de catorce segundos entre dos partículas consecutivas?

Solución

X: "número de partículas emitidas/minuto" ➡ $X \approx \mathcal{P}(15)$

T: tiempo transcurrido entre la emisión de dos partículas consecutivas

$\boxed{T \approx \varepsilon(\lambda = 15)}$ ➡ $\boxed{P\left(T < \tfrac{14}{60}\right) = F\left(\tfrac{14}{60}\right) = 1 - e^{-\frac{14}{60}\cdot 15} = 0.9698026}$

Excel: =DISTR.EXP(14/60;15;1)

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Ejemplo

Un elemento radiactivo emite partículas según una variable de Poisson con un promedio de λ=15 partículas por minuto. En ese caso, el tiempo *T* que transcurre entre la emisión de una partícula y la siguiente sigue una distribución exponencial de parámetro λ=15 . Este modelo permite, por ejemplo, calcular la probabilidad de que entre partícula y partícula pasen más de 10 segundos.

Solución

T: tiempo transcurrido entre la emisión de dos partículas consecutivas

$$\boxed{T \approx \varepsilon(\lambda = 15)}$$

$$P\left(T > \tfrac{10}{60}\right) = \int_{\frac{1}{6}}^{\infty} 15 \cdot e^{-15t}\, dt = \lim_{u\to\infty} \int_{\frac{1}{6}}^{u} 15 \cdot e^{-15t}\, dt = \lim_{u\to\infty} \left[-e^{-15t}\right]_{\frac{1}{6}}^{u} = e^{-\frac{15}{6}}$$

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Propiedad de la **falta de memoria** (ó **propiedad de no memoria**). Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial, $X \sim \varepsilon(\lambda)$, y t y s son dos números positivos tales que $t>s$, entonces se cumple:

$$\boxed{P(X > t+s \mid X > s) = P(X > t)}$$

- propiedad interesante y curiosa
- ejemplo: si la vida útil de cierto elemento sigue una distribución exponencial de parámetro λ la probabilidad de que la vida útil de ese elemento sea superior a t es independiente del tiempo, s, que lleve funcionando el elemento

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Propiedad de la **falta de memoria** (ó **propiedad de no memoria**). Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial, $X \sim \varepsilon(\lambda)$, y t_1 y t_0 son números positivos tales que $t_1 > t_0$, entonces se cumple:

$$\boxed{P\left(X > t_1 \mid X > t_0\right) = P\left(X > t_1 - t_0\right)}$$

- de otra forma
- ejemplo: si la vida útil de cierto elemento sigue una distribución exponencial de parámetro λ la probabilidad de que su vida útil aumente en $t_1 - t_0$ unidades de tiempo es independiente del tiempo ya vivido por el elemento (t_0)

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Propiedad de la **falta de memoria**

▶ **Demostración 1**

$$P(X>t+s \mid X>s)=\frac{P(X>t+s \cap X>s)}{P(X>s)}=$$

$$=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda\cdot(t+s)}}{e^{-\lambda\cdot s}}=e^{-\lambda\cdot t}=P(X>t)$$

▶ **Demostración 2**

$$P(X>t_1 \mid X>t_0)\underbrace{=}_{\substack{\text{probabilidad}\\\text{condicionada}}}\frac{P(X>t_1)}{P(X>t_0)}=\frac{1-P(X\le t_1)}{1-P(X\le t_0)}=\frac{1-F(t_1)}{1-F(t_0)}=$$

$$=\frac{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-e^{-\lambda\cdot t_1}\right)}{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-e^{-\lambda\cdot t_0}\right)}=e^{-\lambda(t_1-t_0)}=P(X>t_1-t_0)\quad \forall t_1>t_0$$

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Ejemplo: ejercicio 5

Se ha comprobado que la duración de vida de ciertos elementos sigue una distribución exponencial con una media de 8 meses. Se pide:

1. Calcular la probabilidad de que un elemento tenga una vida entre 3 y 12 meses

2. Percentil 95 de la distribución

3. Probabilidad de que un elemento que haya vivido ya más de 10 meses, viva más de 25 meses

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Ejemplo: ejercicio 5

Solución

$$\mu = E[X] = \frac{1}{\lambda} = 8 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{X \sim \mathcal{E}(1/8)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{8}} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso\ (x < 0) \end{cases}$$

1. $$P(3 < X < 12) = F(12) - F(3) = \left(1 - e^{-\frac{12}{8}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{3}{8}}\right) = 0.464159$$

2. $$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{8}} = 0.95 \quad \Rightarrow \quad x = 23.9659$$

31. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Ejemplo: ejercicio 5

Solución

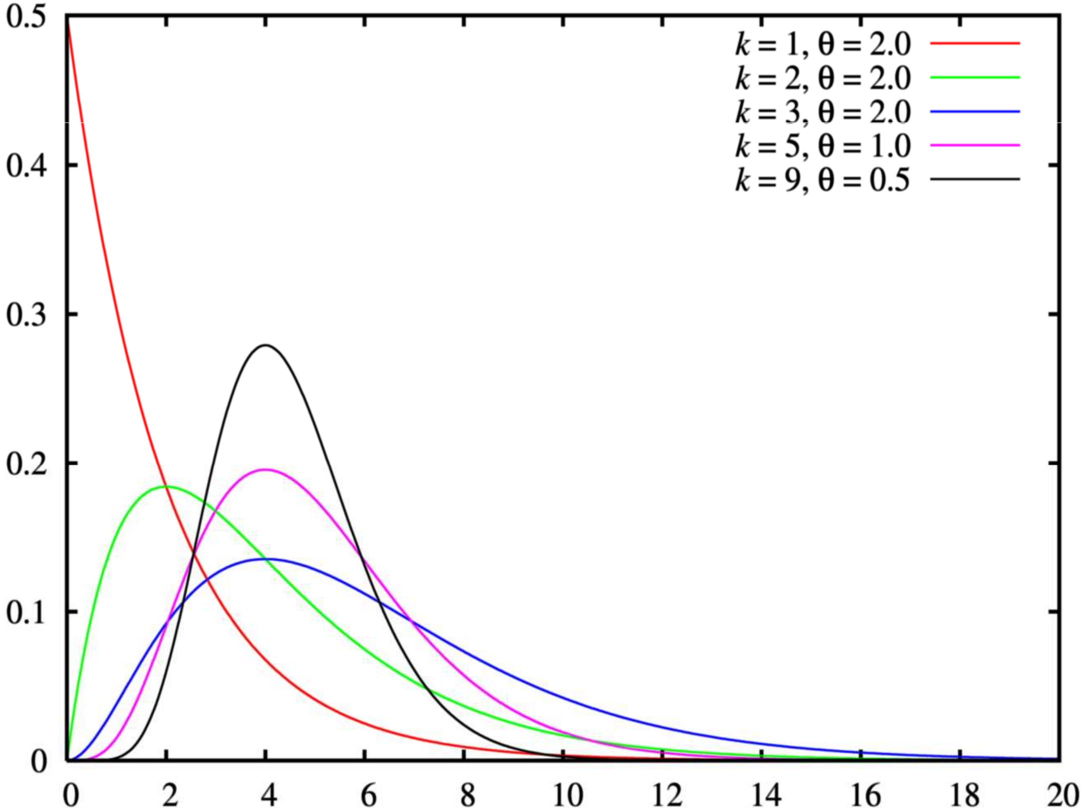
3.

$$P(X>25 \mid X>10) \underbrace{=}_{\substack{\text{probabilidad} \\ \text{condicionada}}} \frac{P(X>25)}{P(X>10)} = \frac{1-P(X\leq 25)}{1-P(X\leq 10)} = \frac{1-F(25)}{1-F(10)} =$$

$$= \frac{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-e^{-25\cdot\lambda}\right)}{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-e^{-10\cdot\lambda}\right)} = e^{-15\cdot\lambda} \underbrace{=}_{\lambda=\frac{1}{8}} 0.153355 = P(X>15)$$

32. DISTRIBUCIÓN GAMMA

- una v.a. continua *X* que puede tomar valores x≥0 sigue una distribución **gamma** de parámetros k y λ si su función de densidad de probabilidad es de la forma:



$$f(x) = \frac{\lambda \cdot (\lambda x)^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$$

http://es.wikipedia.org/wiki/Distribución_gamma

32. DISTRIBUCIÓN GAMMA

$$\boxed{f(x) = \frac{\lambda \cdot (\lambda x)^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}}$$

- notación: $\boxed{X \sim Gamma(k;\lambda)}$

- función gamma: $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt}$

  - si $k \in Z^+$: $\boxed{\Gamma(k) = (k-1)!}$

32. DISTRIBUCIÓN GAMMA

Casos particulares

- si $\boxed{k=1:}$
  - distribución exponencial
- si $\boxed{k=n \;\; (n \in N):}$
  - distribución de Erlang
  - se usa, por ejemplo, como modelo del tiempo que pasa entre n llamadas telefónicas
- si $\boxed{k=\frac{r}{2}\,;\,\lambda=\frac{1}{2}\;:}$
  - distribución χ^2 con r grados de libertad
  - se usa, por ejemplo, para evaluar la bondad del ajuste de una distribución teórica a unos datos

32. DISTRIBUCIÓN GAMMA

- esperanza matemática (media):

$$\boxed{\mu = E[X] = \frac{k}{\lambda}}$$

- varianza:

$$\boxed{\sigma^2 = Var[X] = \frac{k}{\lambda^2}}$$

- desviación típica:

$$\boxed{\sigma = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}}$$

32. DISTRIBUCIÓN GAMMA

Caracterización

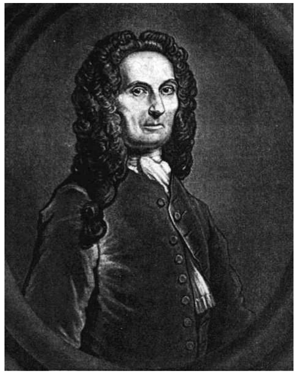
- sea $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ una v.a. discreta que cuenta el número de éxitos en un determinado período de tiempo
  - el tiempo, T, que pasa entre el k-ésimo éxito y el $k+r$ es es una v.a. que sigue una distribución $T \sim Gamma(r;\lambda)$:

- sean X_1, X_2, … , X_n v.a. independientes que siguen una distribución $X_i \sim \varepsilon(\lambda)$ (i=1,2, …, n)
  - sea la variable: $X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$
  - en este caso: $X \sim Gamma(n;\lambda)$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

RESEÑA HISTÓRICA

▶ Abraham de Moivre (1667-1754)



http://es.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre

- refugiado protestante francés en Londres
- trabajaba junto a una casa de apuestas calculando las probabilidades de las apuestas hechas en los diferentes juegos de azar
- presenta la distribución normal (por primera vez, en 1733) como aproximación de la distribución binomial para valores grandes de *n*

▶ Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

- amplía el resultado y lo utiliza en el análisis de errores de experimentos

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

RESEÑA HISTÓRICA

► Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- justificación y formulación
- la distribución lleva su nombre ya que la usó en gran medida en sus estudios astronómicos

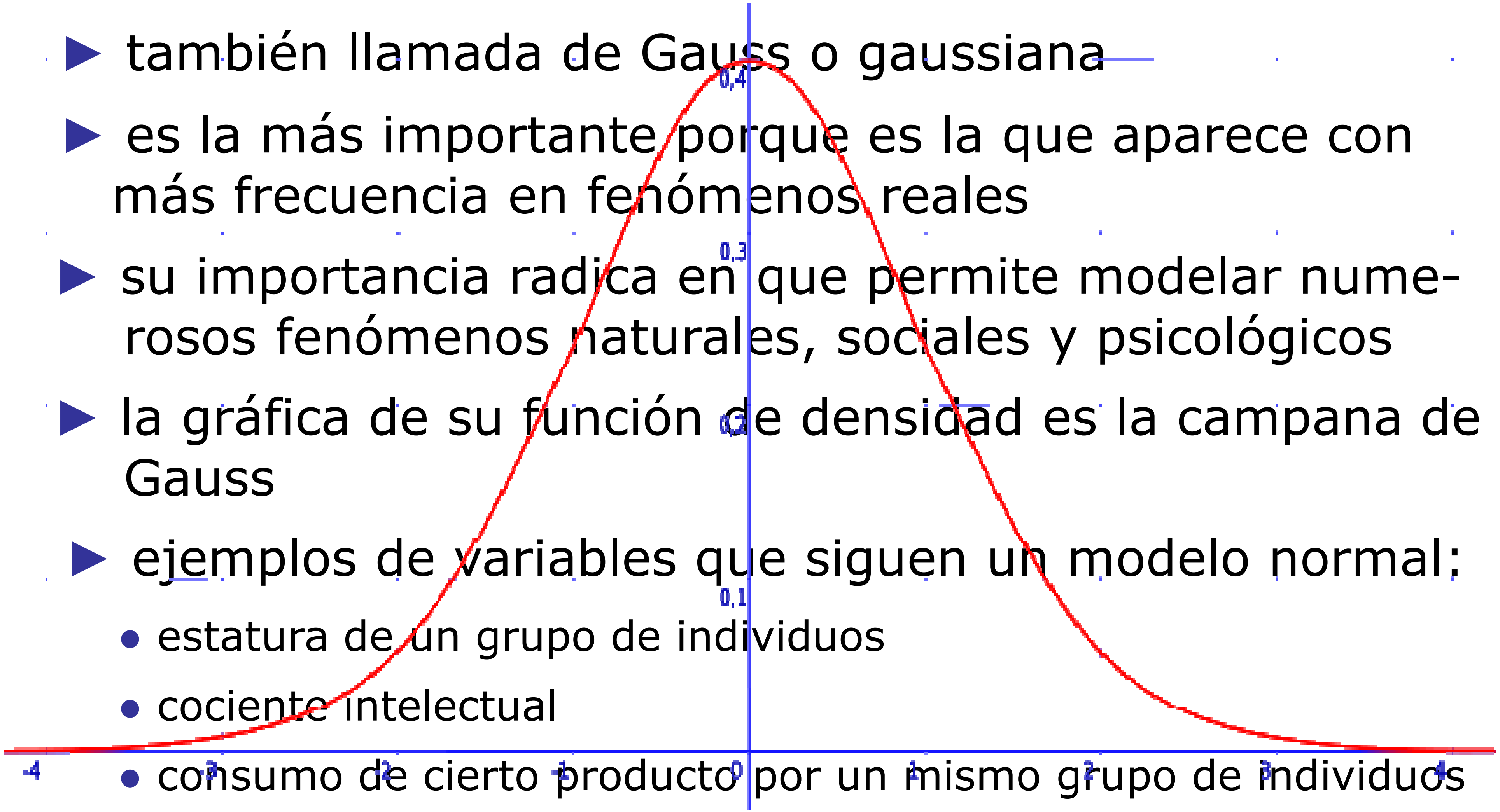
http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

► Peirce, Galton y Lexis

- asignan de forma independiente el término de distribución normal
- se debe a la gran frecuencia de su uso en cualquier ámbito científico y tecnológico ya que muchos fenómenos tienen comportamientos que se asemejan a esta distribución

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

INTRODUCCIÓN



- ▶ también llamada de Gauss o gaussiana
- ▶ es la más importante porque es la que aparece con más frecuencia en fenómenos reales
- ▶ su importancia radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos
- ▶ la gráfica de su función de densidad es la campana de Gauss
- ▶ ejemplos de variables que siguen un modelo normal:
  - estatura de un grupo de individuos
  - cociente intelectual
  - consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

INTRODUCCIÓN

► muchas variables aleatorias presentan funciones de densidad cuya gráfica tiene forma de campana; se debe a que hay muchas variables asociadas con fenómenos naturales y reales cuyas características son compatibles con el modelo aleatorio normal:

- caracteres morfológicos de individuos (personas, animales, plantas, ...) de una especie: tallas, pesos, diámetros, ...
- caracteres fisiológicos: efecto de una misma dosis de un fármaco, de una misma cantidad de abono, ...
- caracteres sociológicos: consumo de un producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de exámenes, ...
- caracteres psicológicos: cociente intelectual, grado de adaptación a un medio

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

INTRODUCCIÓN

- en general, cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores independientes halla en la distribución normal un modelo adecuado
- existe otra razón más práctica para su extendido uso
  - sus propiedades matemáticas son inmejorables
  - por tanto, casi siempre se trata de *forzar* al modelo normal como modelo para cualquier variable aleatoria
  - ésto, en ocasiones, puede conducir a errores importantes en aplicaciones prácticas
  - también, son frecuentes las aplicaciones en la que los datos no siguen una distribución normal en cuyo caso puede ser objeto de estudio la pérdida de normalidad

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Función densidad de probabilidad

- una v.a. continua *X* que puede tomar cualquier valor real sigue una distribución **normal** ó **gaussiana** de parámetros *μ y* σ si su **función de densidad** es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in R$$

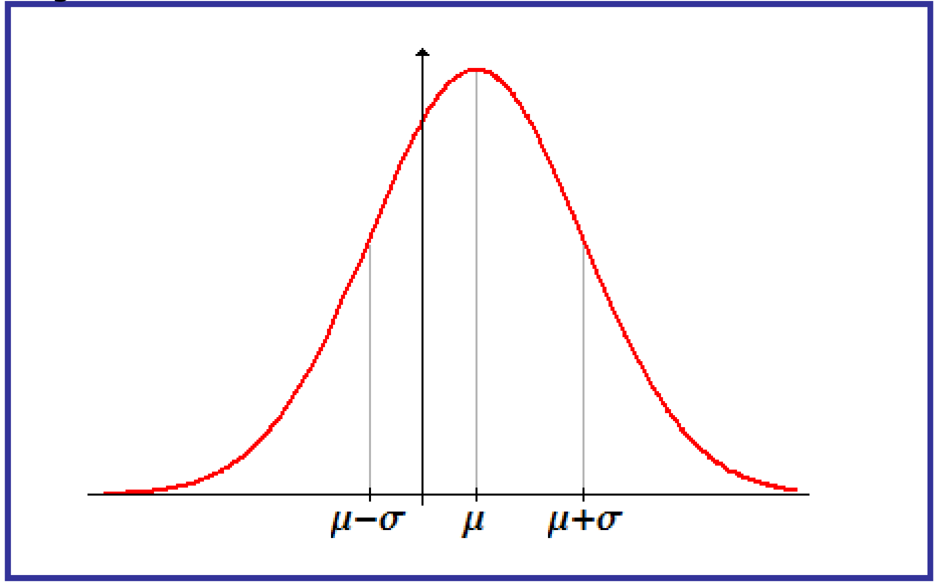
$x \in (-\infty, \infty)$

- **notación:** $X \sim N(\mu;\sigma)$
- **parámetros:**
  - media: $\mu \in R$
  - desviación típica: $\sigma > 0$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

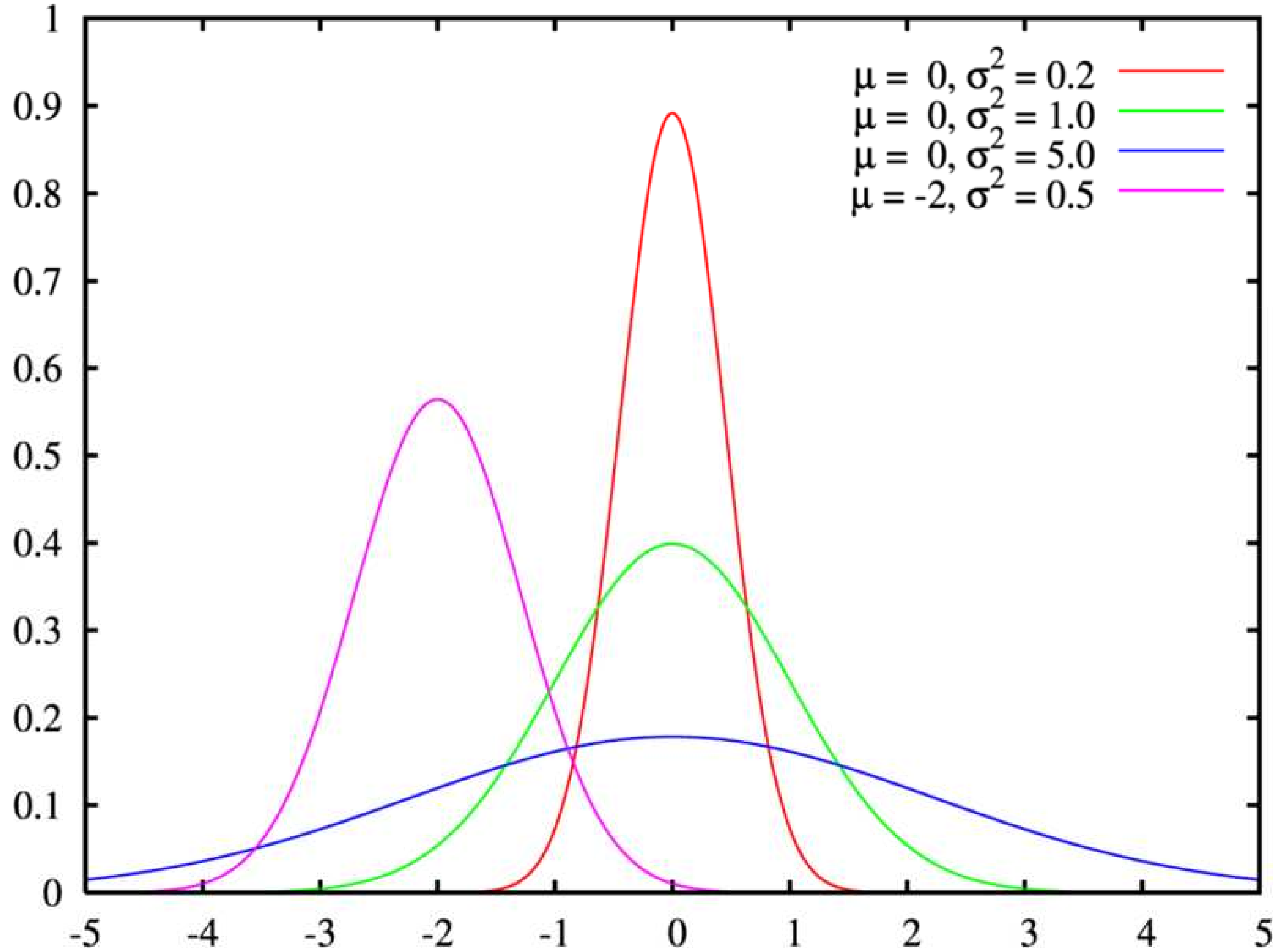
Representación gráfica: campana de Gauss

- la función de densidad de la distribución normal:
  - presenta **simetría** respecto de su media, μ
  - la media, la mediana y la moda son iguales
  - presenta dos **puntos de inflexión** en $\mu-\sigma$ y en $\mu+\sigma$
  - es **asintótica** respecto al eje horizontal
  - **máximo**: $\boxed{\left(\mu, \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\right)}$



33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

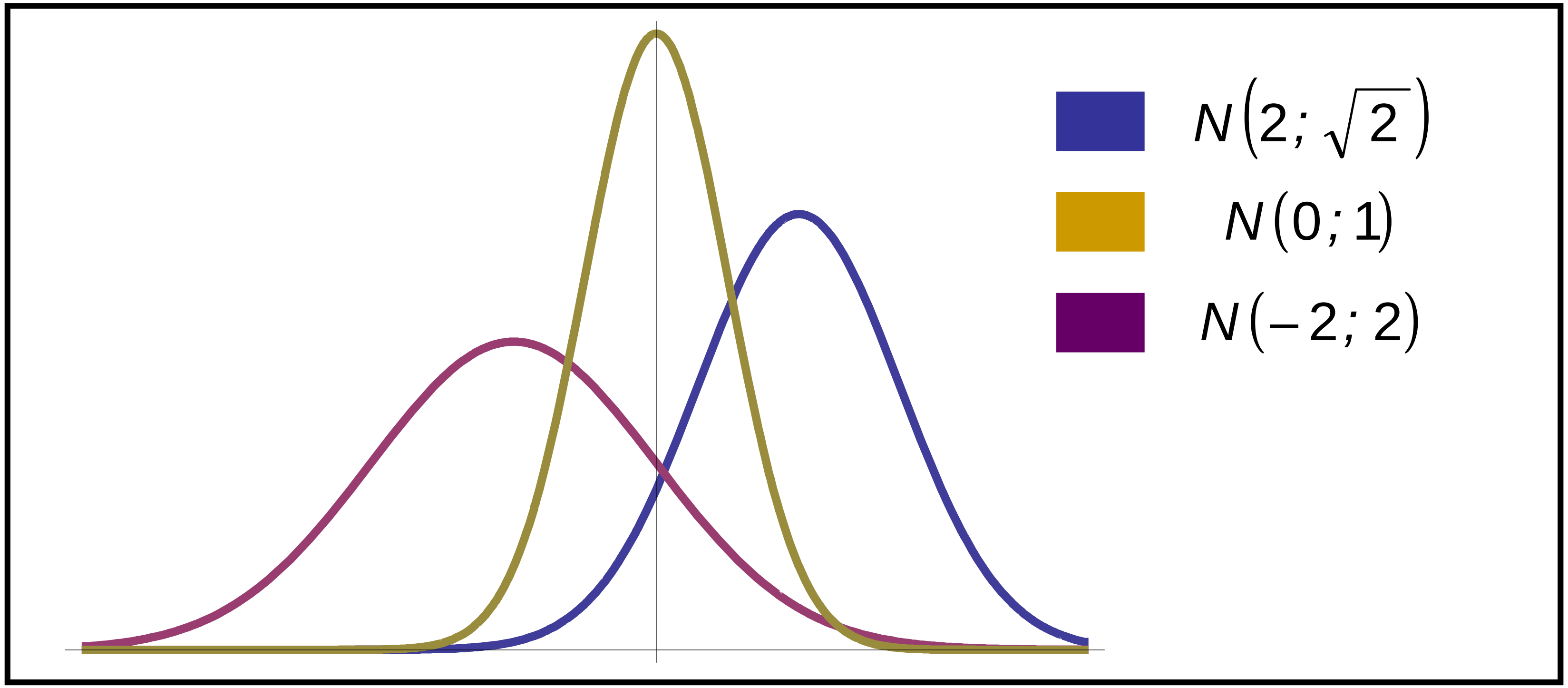
Representación gráfica: campana de Gauss



http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

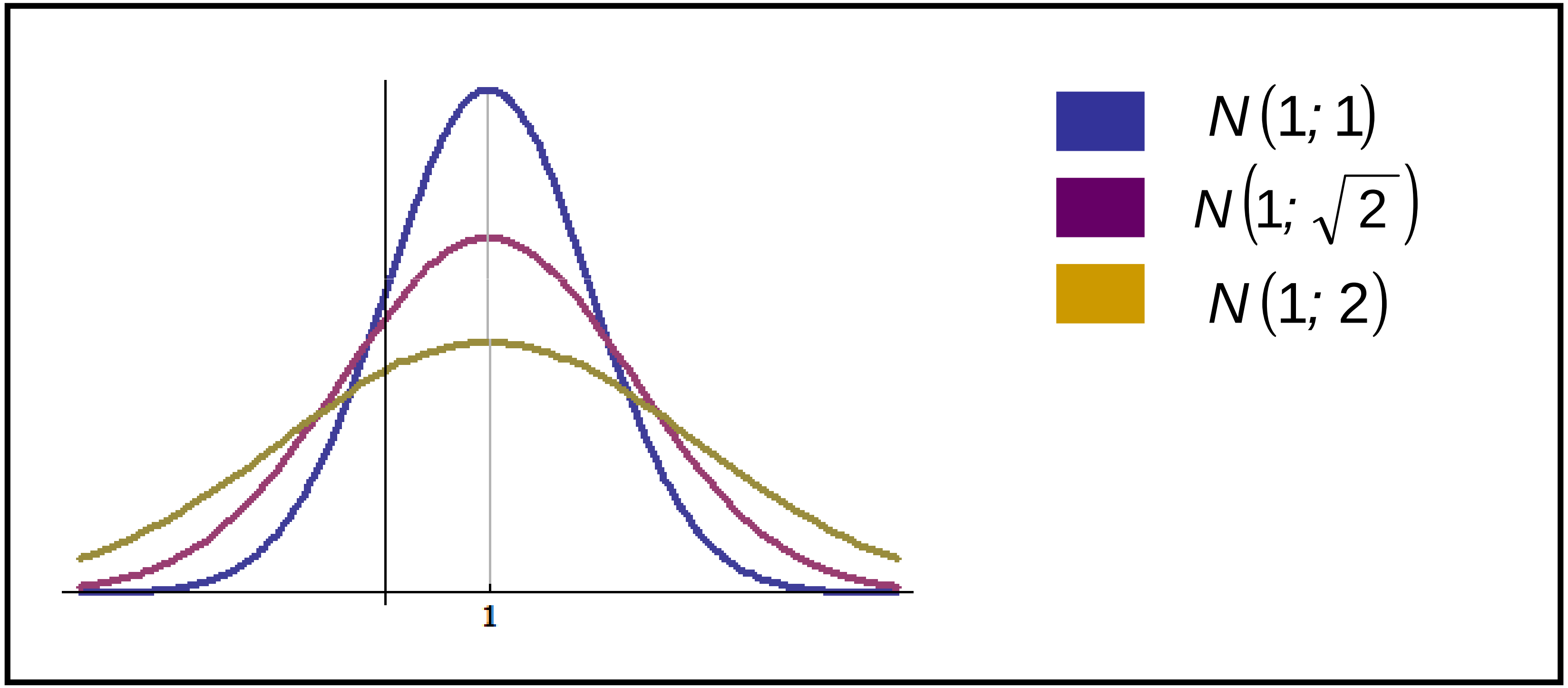
Representación gráfica: campana de Gauss



► las curvas se hacen más planas a medida que crece la desviación típica σ

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Representación gráfica: campana de Gauss

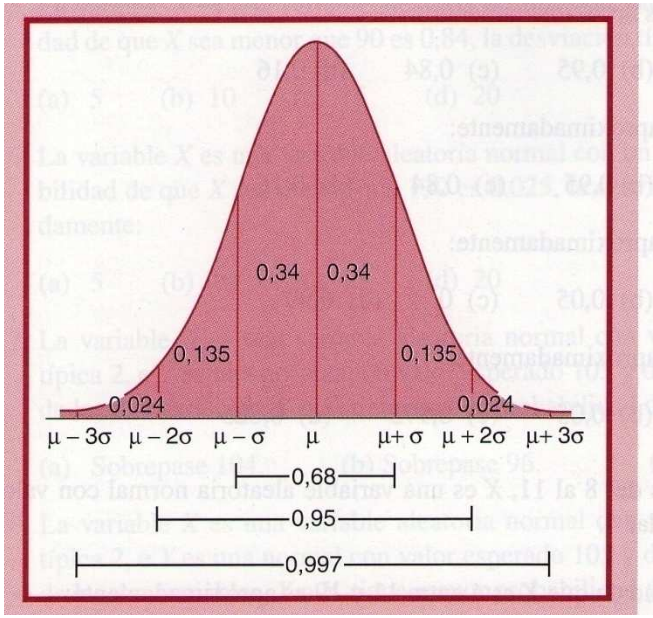


► las curvas se hacen más planas a medida que crece la desviación típica σ

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Regla de aproximación

- una v.a. continua normal con media μ y desviación típica σ se encuentra en el intervalo:
  - $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ con una probabilidad aproximada de 0.6826
  - $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$ con una probabilidad aproximada de 0.9545
  - $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ con una probabilidad aproximada de 0.997



Ross, M.S.; Introducción a la Estadística; Ed. Reverté S.A. (2005)

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Función de distribución de probabilidad

► no tiene interés ya que no se puede calcular una primitiva de la función de densidad mediante métodos elementales; sólo pueden aproximarse mediante métodos numéricos

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

► existen infinitas distribuciones normales aunque sólo se necesita una tabla para calcular las probabilidades de todas ellas; es la correspondiente a la denominada distribución normal estándar

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Distribución normal estándar

► es una distribución normal cuyos parámetros son:

$$\boxed{\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}}$$

► notación: $\boxed{Z \sim N(0;1)}$

► función de densidad:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall x \in R}$$

► función de distribución (notación): $\boxed{\Phi(x) = P(Z \leq x)}$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Tipificación de la distribución normal

► si X es una v.a. normal con media μ y desviación típica σ entonces la variable

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$ sigue una distribución normal estándar

$$X \approx N(\mu;\sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \approx N(0;1)$$

► <u>aplicación</u>: si se quiere calcular la probabilidad de que una variable $X\sim N(\mu;\sigma)$ esté en el intervalo $[a,b]$

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

TABLA DE LA NORMAL ESTÁNDAR, *Z*

Tabla 6.1 Probabilidades de la normal estándar.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

El valor representado en la tabla es $P\{Z < x\}$.

Ross, M.S.; Introducción a la Estadística; Ed. Reverté S.A. (2005)

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

TABLA DE LA NORMAL ESTÁNDAR, *Z*

► la tabla anterior contiene, únicamente, los valores que toma la función de distribución de la distribución normal estándar, *Z*, para ciertos valores positivos; es decir:

$$\Phi\left(z_0\right) = P\left(Z \leq z_0\right) \quad donde \quad z_0 > 0$$

► **ejemplo**:

$$\Phi\left(0{,}91\right) = P\left(Z \leq 0{,}91\right) = 0{,}8186$$

$$P\left(Z > 0{,}91\right) = 1 - \Phi\left(0{,}91\right) = 1 - P\left(Z \leq 0{,}91\right) = 0{,}1814$$

Ross, M.S.; Introducción a la Estadística; Ed. Reverté S.A. (2005)

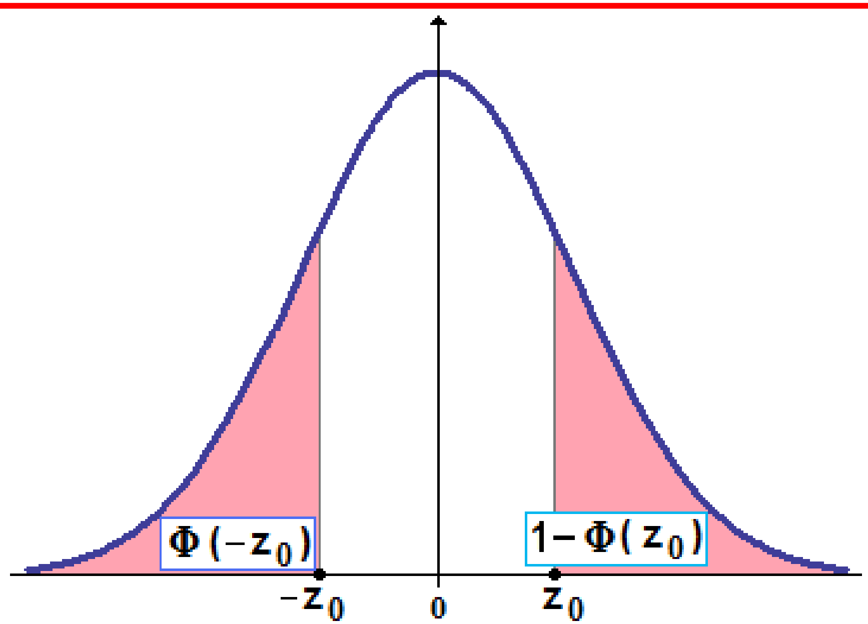
x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

TABLA DE LA NORMAL ESTÁNDAR, *Z*

- cálculo de: $\Phi(-z_0) = P(Z \le -z_0) \quad donde \quad z_0 > 0$
  - usando la simetría de la distribución normal:

$$\boxed{\Phi(-z_0) = P(Z \le -z_0) = P(Z \ge z_0) = 1 - P(Z \le z_0) = 1 - \Phi(z_0)}$$



33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

TABLA DE LA NORMAL ESTÁNDAR, *Z*

► cálculo de: $\Phi(-z_0) = P(Z \le -z_0) \quad donde \quad z_0 > 0$

► **ejemplo**:

$$\Phi(-0,91) = P(Z \le -0,91) = 1 - P(Z \le 0,91) = 1 - \Phi(0,91) = 0,1814$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485

Ross, M.S.; Introducción a la Estadística; Ed. Reverté S.A. (2005)

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJEMPLO: tipificación y tablas

► **Ejemplo.** Si una v.a. X se distribuye normalmente con media 7 y desviación típica 2, calcular $P(5<X<10)$

Nota. Tipificación y estandarización es lo mismo

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{a=5 \quad b=10 \quad \mu=7 \quad \sigma=2}$$

$$\Downarrow$$

$$P(5<X<10)=\Phi(1.5)-\Phi(-1)=\Phi(1.5)-[1-\Phi(1)]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(5<X<10)=0.9332+0.8413-1=0.7745}$$

Ross, M.S.; Introducción a la Estadística; Ed. Reverté S.A. (2005)

x	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413

x	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192
1,5	0,9332

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Teorema central del límite

- se consideran las n v.a. aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$
  - independientes
  - idénticamente distribuidas, es decir, con la misma distribución de probabilidad de media μ y desviación típica σ
- sea la v.a.: $\boxed{Y = \sum_{i=1}^{i=n} X_i}$
- Teorema central del límite. Cuando n tiende a infinito (para valores elevados de n) la v.a. Y tiende a una distribución normal:

$$\boxed{Y \approx N\left(n \cdot \mu; \sqrt{n} \cdot \sigma\right)}$$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Teorema central del límite

- de acuerdo con este teorema, la distribución normal surge siempre que los resultados de un experimento son debidos a un conjunto muy grande de causas independientes que actúan sumando sus efectos, de forma que cada efecto tiene poca importancia con respecto al conjunto

- Teorema central del límite. Si se tipifica la variable Y:

$$\boxed{Z = \frac{Y - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \approx N(0; 1)}$$

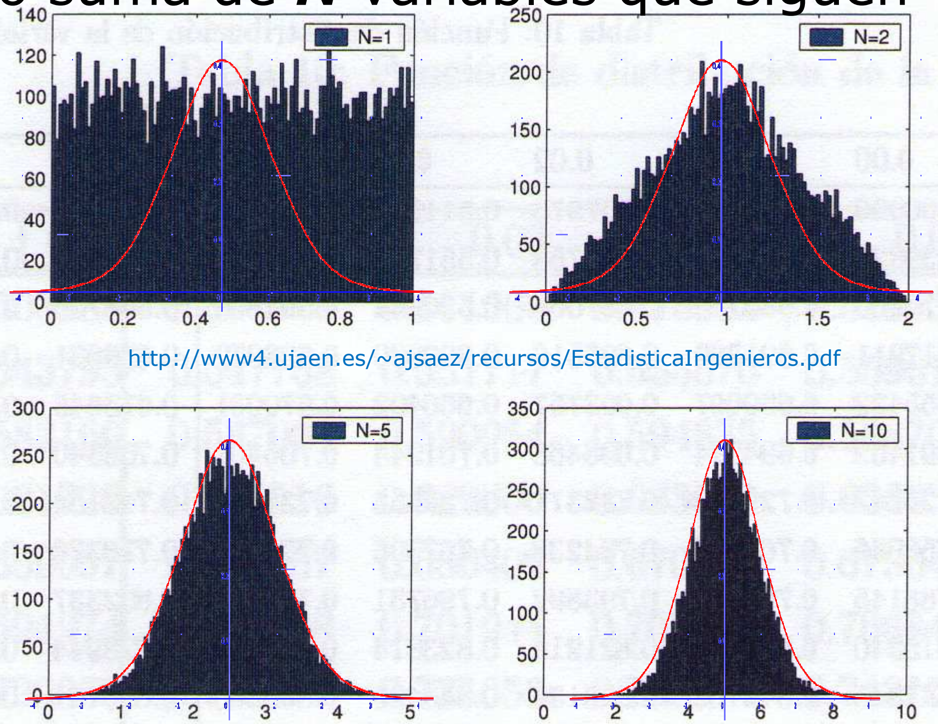
33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Teorema central del límite

- <u>Ejemplo</u>
  - una variable se obtiene como suma de ***N*** variables que siguen una distribución uniforme *UC*[0;1]
  - según el teorema:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} X_i = X \approx N\left(\frac{N}{2};\sqrt{\frac{N}{12}}\right)}$$

  - se simula una muestra de 10.000 datos
  - a medida que crece ***N*** el histograma se asemeja a una densidad gaussiana



http://www4.ujaen.es/~ajsaez/recursos/EstadisticaIngenieros.pdf

Figura 4.15: Ilustración del Teorema Central del Límite.

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aproximación a la binomial

► cuando se tiene una distribución binomial, *B*(*n*;*p*), a medida que *n* crece, es difícil hacer uso de las tablas y/o de las fórmulas

► **<u>ejemplo</u>:** si se lanza un dado 100 veces, calcular la probabilidad de obtener entre 20 y 33 cincos (inclusive)

- *S*: "sacar 5" : $P(S) = \frac{1}{6}$
- *F*: "no sacar 5" : $P(F) = \frac{5}{6}$
- *X*: "número de éxitos (cincos)" : $\boxed{P(20 \leq X \leq 33)}$
- <u>tablas</u>: inviable (se repite el experimento 100 veces)
- <u>fórmula</u>: inviable a mano $P(X = 32) = \binom{100}{32} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{32} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{68} = 7.42 \times 10^{-5}$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aproximación a la binomial

- la distribución normal puede usarse, bajo ciertas condiciones, como aproximación de la binomial
  - sea una v.a. $X \sim B(n;p)$
  - cuando n se hace muy grande ($n \to \infty$) la distribución binomial X puede aproximarse mediante la distribución normal:

$$\boxed{Y \approx N\left(n \cdot p;\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)}$$

- aproximación válida para valores grandes de n:
  - $n \geq 30$
  - $n \cdot p \geq 5$
  - $n \cdot q \geq 5$

$$\left.\begin{array}{l} n \geq 30 \\ n \cdot p \geq 5 \\ n \cdot q \geq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B\,(n;\,p) \xrightarrow{n \to \infty} N\left(n \cdot p;\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)}$$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aproximación a la binomial

- ► en caso de realizar la aproximación debe tenerse en cuenta lo siguiente:
  - son distribuciones diferentes
  - se pasa de una variable discreta (binomial) a otra continua (normal)
  - se deben hacer determinados ajustes para que la aproximación realizada sea lo más precisa posible
- ► el ajuste se denomina **corrección por continuidad**

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aproximación a la binomial

CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

$$X \approx B(n;p) \xrightarrow{\begin{cases} n \to \infty \\ np \geq 5 \\ nq \geq 5 \end{cases}} Y \approx N\left(n \cdot p; \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)$$

► $\boxed{P(X=k)}$

- $P(Y=k)=0$: aproximación no válida
- tomar un pequeño intervalo de longitud 1 en torno al valor *k* y calcular la probabilidad

$$\boxed{P(k-0.5 \leq Y \leq k+0.5)}$$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aproximación a la binomial

CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

$$X \approx B\,(n;\,p) \xrightarrow{\begin{cases} n \to \infty \\ np \geq 5 \\ nq \geq 5 \end{cases}} Y \approx N\left(n \cdot p;\, \sqrt{n \cdot p \cdot q}\,\right)$$

► razonamiento análogo con probabilidades acumuladas en la binomial

- $\boxed{P(X < k)} \xrightarrow{\textit{aproximación}} \boxed{P(Y \leq k - 0.5)}$
- $\boxed{P(X \leq k)} \xrightarrow{\textit{aproximación}} \boxed{P(Y \leq k + 0.5)}$

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aproximación a la binomial

CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

► **<u>ejemplo</u>:** si se lanza un dado 100 veces, calcular la probabilidad de obtener entre 20 y 33 cincos (inclusive)

$$X \approx B\left(100; \tfrac{1}{6}\right) \xrightarrow{\begin{cases} n=100>30 \\ np=16.67 \geq 5 \\ nq=83.33 \geq 5 \end{cases}} Y \approx N(16.67; 3.73)$$

$$\begin{cases} \mu = 16.67 \\ \sigma = 3.73 \end{cases}$$

corrección por continuidad

tipificación

$$P(20 \leq X \leq 33) \approx P(20-0.5 \leq Y \leq 33+0.5) = P\left(\frac{19.5-16.67}{3.73} \leq Z \leq \frac{33.5-16.67}{3.73}\right) =$$

$$= P(0.76 \leq Z \leq 4.51) = P(Z \leq 4.51) - P(Z \leq 0.76) = 1 - 0.7764 = 0.2236$$

tablas

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aproximación a la distribución de Poisson

► la distribución normal resulta, también, una buena aproximación de la distribución de Poisson

- sea una v.a. $X \sim P(\lambda)$
- cuando λ es muy grande ($\lambda \to \infty$) la distribución de Poisson X puede aproximarse mediante la distribución normal:

$$\boxed{Y \approx N\left(\lambda; \sqrt{\lambda}\right)}$$

► aproximación válida para valores grandes de λ:

- $\lambda \geq 10$ ➡ $$\boxed{X \approx P\left(\lambda\right) \xrightarrow{\lambda \geq 10} Y \approx N\left(\lambda; \sqrt{\lambda}\right)}$$

NOTA. Las consideraciones relativas a la corrección por continuidad son aplicables, también, en este caso

33. DISTRIBUCIÓN NORMAL