UNIDAD TEMÁTICA 3
TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

ENUNCIADO 1

Una caja contiene 2n helados, n de los cuales son de naranja y el resto de fruta. De un grupo de 2n personas 0 < a < n prefieren el helado de naranja, 0 < b < n prefieren el helado de fruta, y el resto no tiene preferencia. Si se distribuyen los helados al azar entre todas las personas, calcula la probabilidad de que se respeten las preferencias de todas las personas.

Resolución:

Se va a calcular la probabilidad pedida según el modelo clásico de Laplace $P = \frac{n_f}{n_\Omega}$, siendo n_f el número de casos favorables y n_Ω es el número total de casos posibles que se hallan en el espacio muestral, Ω.

Así, existen $n_\Omega = \binom{2n}{n}$ maneras diferentes de repartir los dos sabores. Lo que equivale a repartir un grupo de n en 2n lugares sin importar el orden al interior del grupo. Para que todos estén felices hay "a" personas que deben recibir helado de naranja y "b" personas que deben recibir de fruta.

Por otra parte, hay que repartir (n - a) helados de naranja en un grupo de (2n - a - b) personas que no tienen preferencias, o lo que es lo mismo (n - b) helados de fruta entre (2n - a - b) personas. En ambos casos esto se logra de:

$$n_f = \binom{2n-a-b}{n-a} = \binom{2n-a-b}{n-b}$$

Una vez hecho esto, hay un sola manera de completar el resto de las preferencias.

Entonces, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-a-b)!(n!)^2}{(n-a)!(n-b)!(2n)!}$$

ENUNCIADO 2

En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas. Suponiendo que las personas se bajan en cualquier piso con igual probabilidad y sin importar lo que haga el resto de los pasajeros, calcula:

(1) La probabilidad de que m_1 personas se bajen en el primer piso, m_2 en el segundo y así respectivamente con $m_i \in \{0, 1, ..., m\}$, $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ y $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$

(2) La probabilidad de que todas las personas se bajen en pisos diferentes.
(3) La probabilidad de que solo dos personas se bajen en un mismo piso.

Resolución:

(1) El número total de agrupaciones posibles de personas en los pisos es n^m (variaciones con repetición). Para obtener la configuración (m_1, ..., m_n) se puede escoger $\binom{m}{m_1}$ grupos diferentes de m_1 personas para que se bajen en el primer piso. De los que no se bajaron se escogen $\binom{m-m_1}{m_2}$ grupos de m_2 personas para que se bajen en el segundo piso. Repitiendo este argumento piso por piso, se concluye la configuración deseada:

$$\binom{m}{m_1}\binom{m-m_1}{m_2}\times\cdots\times\binom{m-\sum_{i=1}^{n-1}m_i}{m_n}=\frac{m!}{m_1!(m-m_1)!}\cdot\frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_1-m_2)!}\times\cdots\times\frac{\left(m-\sum_{i=1}^{n-1}m_i\right)!}{m_n!}$$

Simplicando:

$$\frac{m!}{m_1!m_2!\cdots m_n!}$$

maneras de obtener dicha configuración. Por otra parte, sendo todo equiprobable la respuesta solicitada es

$$P_1=\frac{1}{n^m}\frac{m!}{m_1!m_2!\cdots m_n!}$$

(2) Para que todos se puedan bajar en pisos diferentes es necesario que $m \le n$ (en otras palabras la probabilidad es 0 si $m > n$). En este caso las configuraciones útiles son 1 bloque de unos de tamaño m y 1 bloque de ceros de tamaño (n - m). Entonces, hay exactamente $\binom{n}{m}$ bloques que se pueden obtener de m! maneras. Luego la respuesta es:

$$P_2 = \frac{\binom{n}{m}.m!}{n^m}$$

(3) Ahora se puede escoger el piso donde se bajarán exactamente que escoger dos personas de n formas diferentes. Hay que escoger (m – 2) pisos distintos para bajar a las (m – 2) personas restantes. Hay $\frac{\text{m!}}{2}$ maneras de obtener estas agrupaciones. Finalmente, la probabilidad pedida es:

$$P_3 = \frac{n\binom{n-1}{m-2}\frac{m!}{2}}{n^m}$$