eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
The University of the Basque Country

E.U.I.T.I. Bilbao

Asignatura:
MÉTODOS ESTADÍSTICOS
DE LA INGENIERÍA

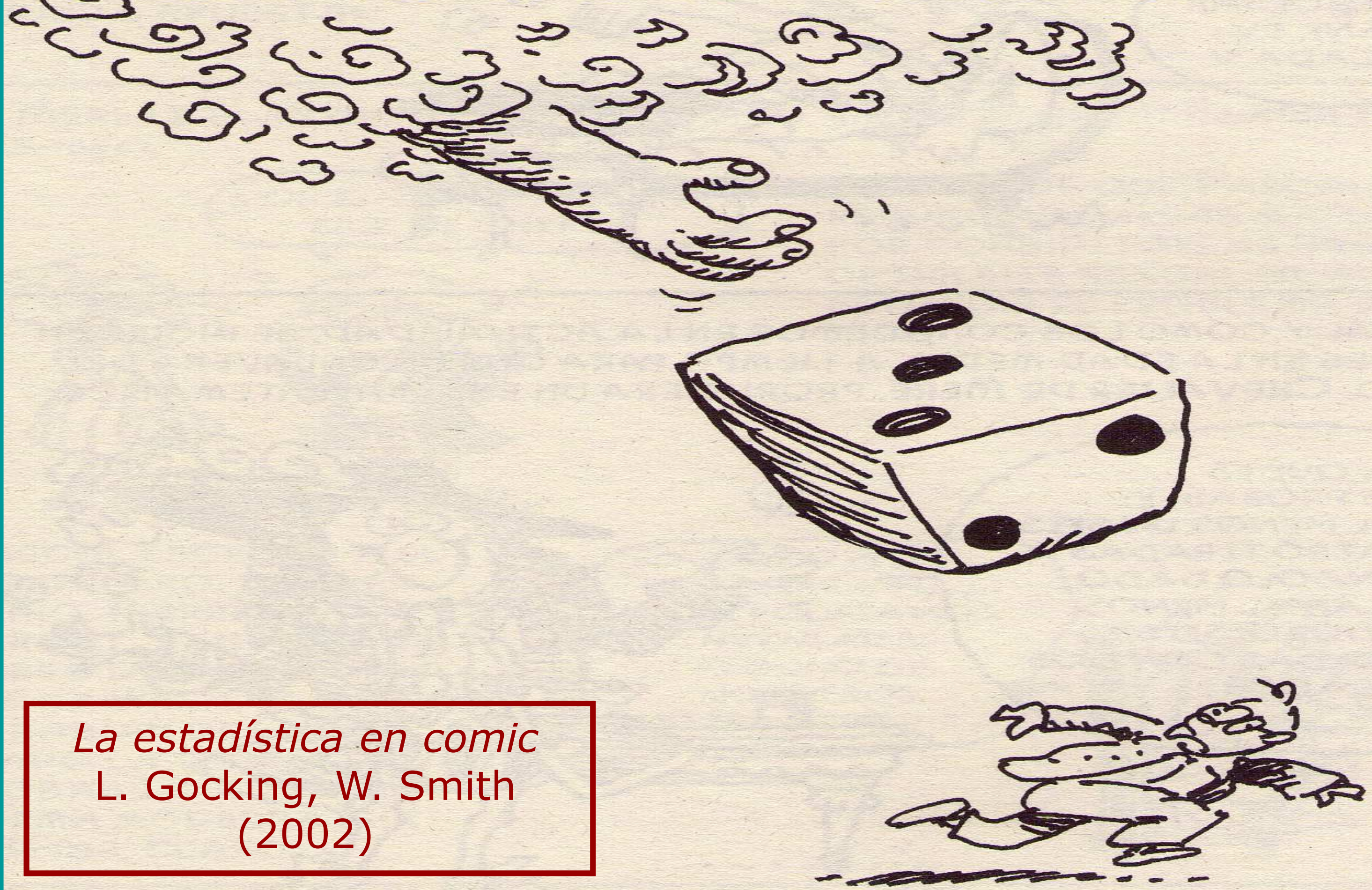
E.U.I.T.I. Bilbao

Asignatura:
MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA

TEMA 3: PROBABILIDAD

LA PROBABILIDAD

EN LA VIDA, NADA ES SEGURO. EN TODAS NUESTRAS ACCIONES, CALCULAMOS SIEMPRE LAS POSIBILIDADES DE UN BUEN RESULTADO, TANTO EN EL MUNDO DE LOS NEGOCIOS COMO EN LA MEDICINA O EL CLIMA. SIN EMBARGO, EN LA HISTORIA DE LA HUMANIDAD, LA **PROBABILIDAD**, EL ESTUDIO FORMAL DE LAS LEYES DEL AZAR, SE HA UTILIZADO PARA UNA SOLA COSA: **EL JUEGO**.



La estadística en comic
L. Gocking, W. Smith
(2002)

Vemos que la teoría de la probabilidad, en el fondo, es sentido común reducido a cálculo; nos hace apreciar con exactitud lo que las mentes razonables toman por un tipo de instinto, incluso sin ser capaces de darse cuenta [...] Es sorprendente que esta ciencia, que surgió del análisis de los juegos de azar, llegara a ser el objeto más importante del conocimiento humano [...] Las principales cuestiones de la vida son, en gran medida, meros problemas de probabilidad.

Pierre Simon Laplace
Marqués de Laplace

http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace

1. RESUMEN

Tratamiento de experimentos, cuyos resultados no se pueden predecir con certeza, a través del concepto de probabilidad.

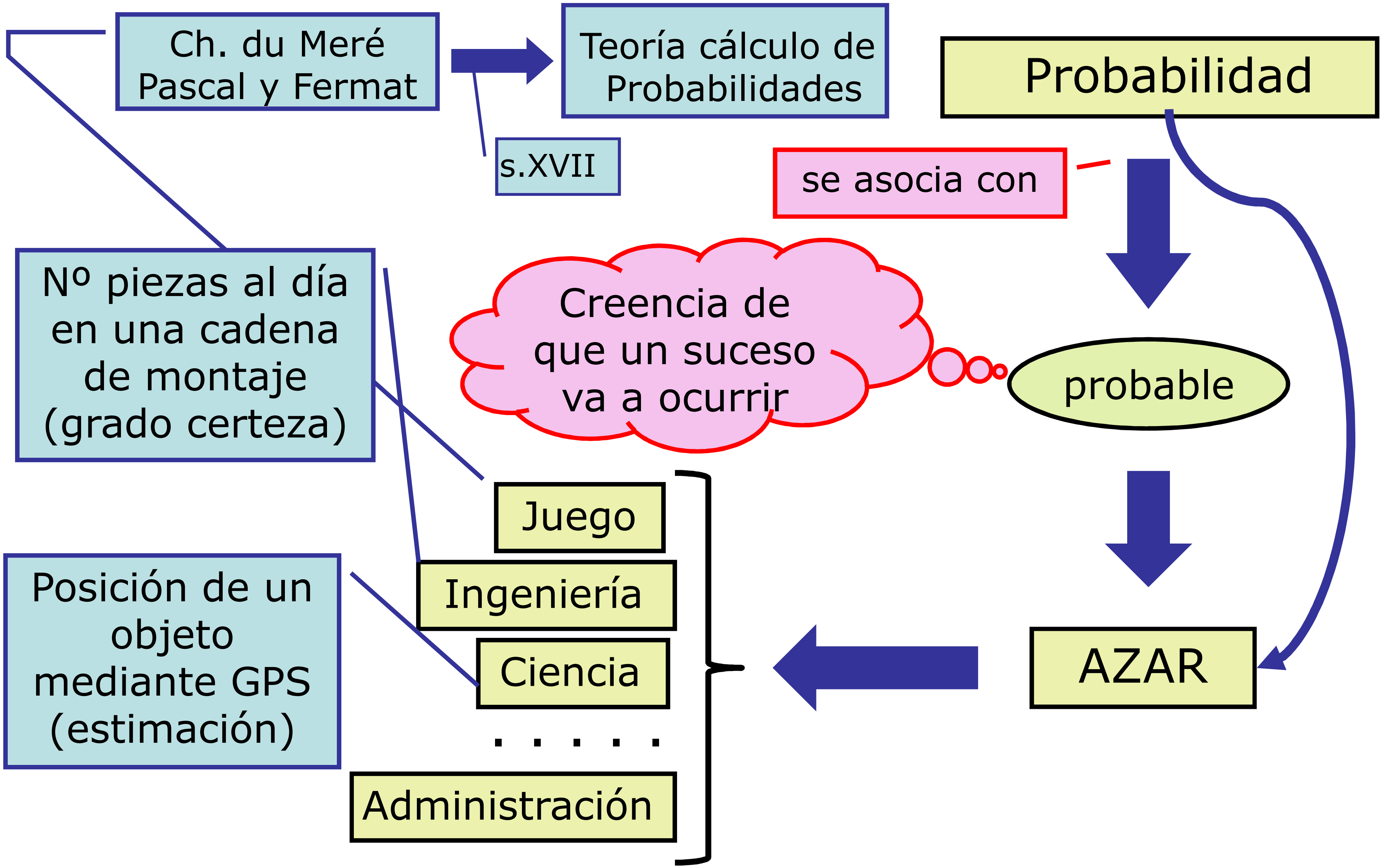
Palabras clave:

- experimento aleatorio y experimento determinístico
- espacio muestral
- suceso
- probabilidad
- probabilidad condicionada
- independencia de sucesos

2. ÍNDICE DEL TEMA

2. ÍNDICE DEL TEMA

2. INTRODUCCIÓN



2. INTRODUCCIÓN

<u>Experimento aleatorio</u>: aquél del que se conocen todos sus posibles resultados y que, repetido en las mismas condiciones, no siempre proporciona los mismos resultados

- irregularidad en cada experiencia aislada (no es predecible el resultado exacto)
- regularidad en los resultados medios cuando se repiten muchas veces la experiencias
- <u>ejemplo</u>: lanzamiento de un dado

<u>Experimento determinístico</u>: aquél en el que las mismas condiciones aseguran la obtención de los mismos resultados

2. INTRODUCCIÓN

<u>Objetivo del Cálculo de Probabilidades</u>: encontrar una medida de la incertidumbre o la certidumbre que se tiene de todos los posibles resultados ya que jamás (o muy difícilmente) se puede conocer, a priori, el resultado de un experimento donde aparezca el azar.

- ► esa medida de la incertidumbre es lo que se llama **probabilidad**
- ► la Teoría de la Probabilidad es una herramienta útil e importante en diversas ramas del conocimiento
  - ingeniería, ciencia, administración, ...
  - en general, en cualquier fenómeno o actividad en la que intervenga el azar

2. INTRODUCCIÓN

► **EJEMPLO**. ¿Qué número de unidades se producen en una cadena de montaje a diario?

- no es un número conocido a priori
- hay un conjunto de valores que pueden darse
- cada uno de ellos tiene un determinado grado de certeza

AZAR
- averías
- bajas
- accidentes

3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

<u>Probabilidad</u>: rama de las Matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios y las cuestiones relacionadas con la incertidumbre y el azar

- ► mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) cuando se lleva a cabo un experimento aleatorio

- ► con la Estadística se pretende realizar inferencias de una población, a partir de una muestra
  - la muestra no proporciona información exacta de la población de la que se extrajo (hay un margen de error)
  - el proceso inductivo está sujeto a dudas e incertidumbre, su medida es la probabilidad

4. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Experimento aleatorio: aquél del que se conocen todos sus posibles resultados y que, repetido en las mismas condiciones, no siempre proporciona los mismos resultados

- irregularidad en cada experiencia aislada (no es predecible el resultado exacto)
- regularidad en los resultados medios cuando se repiten muchas veces la experiencias
- ejemplo: lanzamiento de un dado

4. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Espacio muestral: conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio

- notación: **Ω**
- puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable
- ejemplo: lanzamiento de un dado

$$\boxed{\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}}$$

- ejemplo: lanzamiento de dos dados y obtención de la suma de las dos caras que salen

$$\boxed{\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}}$$

4. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Suceso (ó evento): cualquier subconjunto de un espacio muestral

- ejemplo: en el lanzamiento de una dado, obtener
  - un número par
  - un número impar
  - 1, 2 ó 3
- ejemplo: en el lanzamiento de dos dados sumando los números que aparecen en las dos caras, obtener
  - un valor par
  - un valor impar
  - 10, 11 ó 12

4. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

<u>Suceso elemental (ó ensayo)</u>: cada uno de los resultados que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio

- no puede descomponerse en elementos más simples
- <u>ejemplo</u>: en el lanzamiento de una dado, obtener 4
- <u>ejemplo</u>: en el lanzamiento de dos dados sumando las dos caras, obtener 11

5. ESPACIO MUESTRAL

Espacio muestral: conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio

- no tiene por qué ser único, depende de lo que se quiera observar en el experimento aleatorio
- <u>Clasificación</u>
  - **<u>discreto</u>**: está formado por un conjunto finito o infinito numerable de sucesos elementales
  - **<u>continuo</u>**: está formado por un conjunto no numerable de sucesos elementales

5. ESPACIO MUESTRAL

Ejemplo

- experimento: lanzamiento de un dado
  - **espacio muestral**: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ DISCRETO
  - **sucesos elementales**:

    $\{x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=6\}$
  - **sucesos**: $\{1, 2\}$ {par} {mayor que 3}
  - **otro espacio muestral**: $\Omega=\{par, impar\}$

5. ESPACIO MUESTRAL

Ejemplo

► experimento en Biología: extraer peces de un río hasta sacar un pez de la especie que se quiere estudiar

- **espacio muestral**: número de peces que hay que extraer hasta conseguir el ejemplar deseado

$$\Omega=\{1, 2, 3, \dots\}$$

DISCRETO (numerable)

- posibles **sucesos** de interés: $\{1, 2, 3\}$ $\{\text{mayor o igual que } 3\}$

- **otro espacio muestral**: si sólo se está interesado en saber si hacen falta más de cinco extracciones hasta obtener la especie deseada

$$\Omega=\{>5, \leq 5\}$$

5. ESPACIO MUESTRAL

Ejemplo

- experimento: elegir, absolutamente al azar, un número entre 0 y 1
  - **espacio muestral**: $\Omega=[0, 1]$ — CONTINUO (no numerable)
  - **sucesos** : {menor que 0.3} {mayor o igual que 0.5}
  - **otro espacio muestral**: observar el valor decimal mayor más cercano

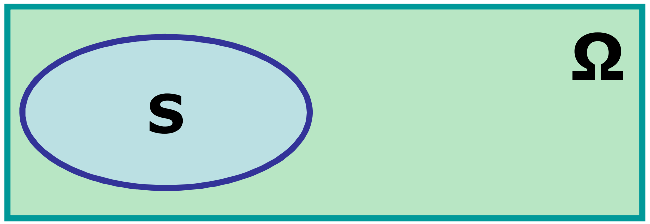
$$\Omega=\{0.1, 0.2, 0.3, \ldots 1\}$$

6. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Álgebra: rama de las Matemáticas que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades

Álgebra de conjuntos: define las operaciones, reglas y propiedades que podemos aplicar con los conjuntos

- ► Un espacio muestral, Ω, puede caracterizarse como un conjunto
- ► Los sucesos elementales son sus elementos
- ► Un suceso, S, constituye un subconjunto de Ω

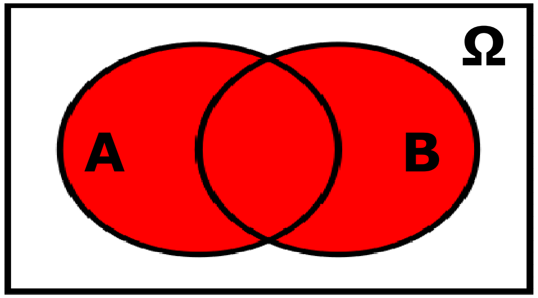


6. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Unión de dos conjuntos A y B ($A \bigcup B$): es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A ó a B

- Notación: $\boxed{A \bigcup B = \left\{ x \in \Omega \ / \ x \in A \vee x \in B \right\}}$

- Representación gráfica (diagramas de Venn):

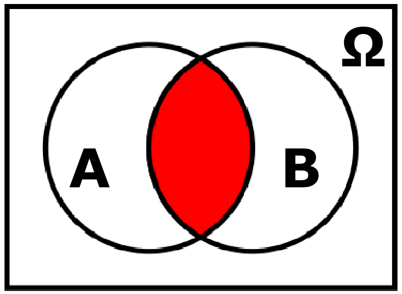


- La unión de dos sucesos A y B, $A \bigcup B$, se verifica cuando ocurre cualquiera de los sucesos, A ó B, ó ambos simultáneamente

6. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Intersección de dos conjuntos A y B ($A \cap B$): es el conjunto formado por los elementos comunes de A y B

- Notación: $\boxed{A \cap B = \{x \in \Omega \ / \ x \in A \wedge x \in B\}}$
- Representación gráfica:

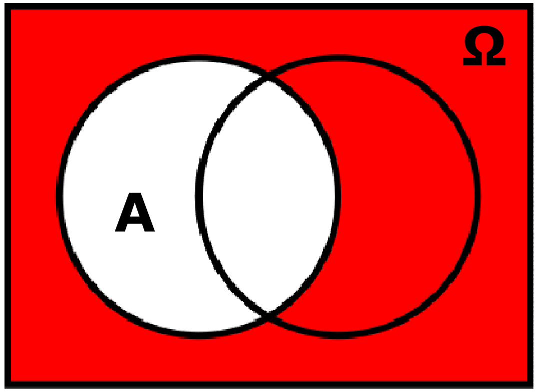


- Conjuntos disjuntos, mutuamente excluyentes o incompatibles: $\boxed{A \cap B = \varnothing}$
- La intersección de dos sucesos A y B, $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando ocurren los sucesos A y B simultáneamente

6. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Complementario del conjunto A ($A^c = \overline{A}$): es el conjunto formado por todos los elementos de Ω (universo) que no pertenecen a A

- Notación: $\boxed{A^c = \overline{A} = \{x \in \Omega \;/\; x \notin A\}}$
- Representación gráfica:

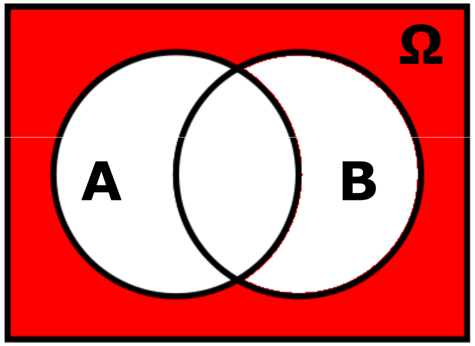


- El suceso, $A^c = \overline{A}$, se verifica cuando no ocurre el suceso A

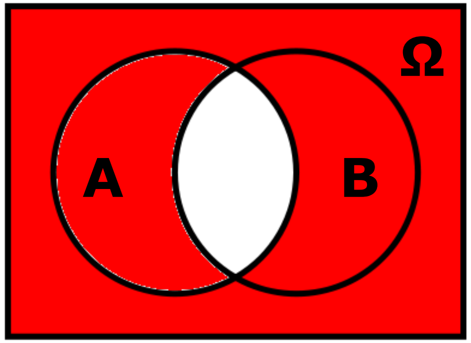
6. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes de Morgan

- Ley 1: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Representación gráfica:



- Ley 2: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Representación gráfica:



7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

<u>Función de probabilidad</u>: dado un espacio muestral, Ω, es la operación que hace corresponder a todos los sucesos de Ω uno y sólo un valor real perteneciente al intervalo [0,1]

$$\boxed{P:\Omega \longrightarrow [0,1] \subset R}$$

- <u>Otras denominaciones</u>: distribución de probabilidad, medida de probabilidad
- **<u>Axiomas</u>** que satisface la función:
  - $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \Omega}$
  - $\boxed{P(\Omega) = 1}$
  - <u>regla de la suma para sucesos incompatibles</u>:

$A_i \in \Omega \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$ *tales que* $A_i \cap A_j = \varnothing \;\; \forall i \neq j$

$$\boxed{P\left[\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{i=n} P[A_i]}$$

Proposición tan clara y evidente que se admite sin necesidad de demostración

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

- Puede definirse más de una función de probabilidad asociada al mismo espacio muestral

- **Ejemplo**
  - experimento: lanzamiento de una moneda
  - espacio muestral: $\Omega=\{cara, cruz\}$
  - número infinito no numerable de medidas de probabilidad, asociadas a cada elección:

$$\boxed{\begin{cases} P[cara]=p \\ P[cruz]=1-p \end{cases} \quad \forall\, p\in[0,1]}$$

  - si la moneda no está trucada se considera: $\boxed{p=\frac{1}{2}}$

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

- **Ejemplo**

  - experimento: lanzamiento de un dado
  - espacio muestral: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
  - si el dado no está trucado se define la función de probabilidad:

$$\boxed{P[i]=\frac{1}{6} \quad \forall\, i \;(i=1,2,3,4,5,6)}$$

  - cálculo de la probabilidad de un suceso:

$$P[\{par\}]=P[\{2,4,6\}]=P[2]\cup P[4]\cup P[6]$$

$$P[\{par\}]=P[2]+P[4]+P[6]=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

PROPIEDADES

- de la definición de función de probabilidad se deducen las siguientes propiedades

  - regla de la resta: $\boxed{P\left[A^c\right]=1-P\left[A\right]}$

útil cuando la probabilidad que se calcula es complicada

demostración

$$1=P(\Omega)=P\left(\boxed{A\cup A^c}\right)=\boxed{P(A)+P\left(A^c\right)}$$

A, A^c : excluyentes

$$A\cap A^c=\varnothing$$

$$\boxed{P\left(A^c\right)=1-P(A)}$$

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

PROPIEDADES

► de la definición de función de probabilidad se deducen las siguientes propiedades

- propiedad del suceso imposible: $\boxed{P(\emptyset)=0}$
- $\boxed{P\left(A\cap B^{c}\right)=P(A)-P(A\cap B)}$
- regla general de la suma:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

dibujar diagramas de Venn puede resultar muy útil

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

EJERCICIO

El espacio muestral de un experimento es: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

A_i: suceso consistente en la obtención del resultado individual i

Además, se suponen las siguientes probabilidades:

- $P(A_1)=0.1$
- $P(A_2)=0.2$
- $P(A_3)=0.15$
- $P(A_4)=0.15$
- $P(A_5)=0.1$
- $P(A_6)=0.3$

Sean los sucesos: $E=\{1,3,5\}$
$F=\{2,4,6\}$
$G=\{1,4,6\}$

7. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Calcular:

1. La probabilidad de los sucesos E, F y G
2. $P(E \cup F)$
3. $P(E \cup G)$
4. $P(F \cup G)$
5. $P(E \cup F \cup G)$
6. $P(E \cap F)$
7. $P(F \cap G)$
8. $P(E \cap G)$
9. $P(E \cap F \cap G)$

8. INTERPRETACIÓN DE PROBABILIDAD

Interpretación frecuentista

- la más común
- tiene que ver con los promedios de ocurrencia de los sucesos del experimento considerado
- **EJEMPLO:** lanzamiento de una moneda
  - se supone que P(*cara*)=0.5
  - se entiende que si se lanza la moneda un gran número de veces, el número de caras será más o menos la mitad

Nº de lanzamientos	10	100	250	500	750	1000
Número de caras	4	46	124	244	379	501
Nº caras/nº lanzamientos	0.4	0.46	0.496	0.488	0.5053	0.501

8. INTERPRETACIÓN DE PROBABILIDAD

Interpretación frecuentista

- generalizando el proceso, se puede determinar la probabilidad de un suceso A como:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

n_A: nº de ocurrencias de A en *n* ensayos del experimento

- interpretación eminentemente práctica ya que permite una aproximación física al concepto de probabilidad
- inconvenientes
  - complicada definición como límite en el infinito
  - un experimento no puede repetirse un gran número de veces

8. INTERPRETACIÓN DE PROBABILIDAD

<u>**Interpretación frecuentista**</u>

- esta interpretación permite estimar o inferir lo que se puede llamar frecuencia esperada
  - siendo P(A) la probabilidad de un suceso A, si se repite el experimento aleatorio *n* veces *<u>lo más esperable</u>* es que el número de veces que suceda el suceso sea:

$$\boxed{n \cdot P(A)}$$

matizar con más rigor

- **<u>EJEMPLO</u>:** lanzamiento de una moneda
  - si se lanza 620 veces, el número esperable de caras es:

$$620 \times 0.5 = 310$$

8. INTERPRETACIÓN DE PROBABILIDAD

Interpretación subjetiva ó bayesiana

- ► vinculación del concepto de probabilidad con el grado de incertidumbre que se tiene sobre las cosas

- ► **EJEMPLO.** Probabilidad de que llueva mañana: 45%
  - en términos *frecuentistas* no tiene sentido pensar en que se puede repetir el experimento "día de mañana" muchas veces y contar "cuántos días" llueve
  - como el día de mañana es único, tampoco se puede pensar que "si hubiera muchos días como mañana aproximadamente llovería el 45% de ellos

8. INTERPRETACIÓN DE PROBABILIDAD

Interpretación subjetiva ó bayesiana

- el resultado de un experimento aleatorio es incierto
  - la probabilidad de un resultado del experimento la indica la creencia que yo tengo en la ocurrencia de ese resultado
  - el grado de creencia es personal y, por tanto, subjetivo pero debe estar acorde con la información que se tiene sobre el experimento

9. RESULTADOS EQUIPROBABLES

- se considera el espacio muestral discreto finito:

$$\boxed{\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \cdots , \omega_n \}}$$

- con independencia de las probabilidades asociadas a los distintos sucesos elementales del espacio Ω, dichas probabilidades deben verificar los axiomas:
  - $\boxed{P(\omega_i) \geq 0 \quad \forall i}$
  - $\boxed{\sum_i P(\omega_i) = 1}$

- otro punto de vista para tratar la asignación de probabilidad a sucesos de un experimento es considerar que no hay motivos para pensar que uno de ellos sea *más probable* que otro y asig-narles la misma probabilidad (ej.: 50% cara y 50% cruz)

9. RESULTADOS EQUIPROBABLES

Regla de Laplace

- se considera el espacio muestral discreto finito:

$$\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \cdots , \omega_n \}$$

n resultados posibles

- se supone que los *n* sucesos elementales tienen la misma probabilidad (**equiprobables**)

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n} \quad \forall\, i \; (i = 1, 2, 3, \cdots , n)$$

9. RESULTADOS EQUIPROBABLES

Regla de Laplace

► en este caso, la **regla de Laplace** permite calcular las probabilidades de los sucesos elementales que están asociados al experimento aleatorio

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

n_A: nº de casos favorables a la ocurrencia del suceso *A*

$$P(A) = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles}$$

La **combinatoria** es útil para el recuento de los casos posibles y favorables

regla sólo aplicable cuando los sucesos elementales son **equiprobables**

9. RESULTADOS EQUIPROBABLES

Regla de Laplace

- la fórmula ó regla de Laplace es eminentemente práctica
  - por ejemplo, permite deducir la probabilidad de que salga cara en el lanzamiento de una moneda sin tener que lanzar la moneda un gran número de veces

$$P(cara) = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{1}{2}$$

- inconvenientes
  - el espacio muestral debe ser finito
  - todos los sucesos elementales deben ser equiprobables

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

- introducción intuitiva: pensar en la probabilidad como medida de la creencia en la ocurrencia de los sucesos
  - en un experimento aleatorio, P(A) es la creencia que se tiene del grado de ocurrencia de un suceso A
  - en el experimento ocurre el suceso B que modifica el grado de creencia en el suceso A
  - el nuevo grado de creencia del suceso A, **P(A|B)**, se conoce como **probabilidad de A condicionada a B** ó probabilidad de A conocido B

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

- EJEMPLO
  - <u>suceso A</u>: hoy va a llover (previsión meteorológica)
  - <u>suceso B</u>: hoy está nublado
  - <u>suceso C</u>: hoy hace sol
  - el hecho de que esté nublado aumenta la creencia de que hoy va a llover; por tanto, $P(A)<P(A|B)$
  - si hace sol se piensa que es menos probable que hoy llueva; entonces, $P(A)>P(A|C)$

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

► EJEMPLO. Diferentes probabilidades con la definición clásica

- experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española
- suceso A: obtener un rey
- suceso B_1: obtener una figura
- suceso B_2: obtener una carta de oros

  ◇ probabilidad de obtener un rey

$$\boxed{P(A) = \frac{4\ reyes}{40\ cartas} = \frac{1}{10} = 0.1}$$

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

► EJEMPLO. Diferentes probabilidades con la definición clásica

- experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española
- suceso A: obtener un rey
- suceso B_1: obtener una figura
- suceso B_2: obtener una carta de oros

◇ probabilidad de obtener un rey si la carta extraída es una figura (condicionada)

$$P\left(A \mid B_1\right) = \frac{4\ \textit{reyes}}{\boxed{12\ \textit{figuras}}} = \frac{1}{3} = 0.\widehat{3}$$

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

▶ EJEMPLO. Diferentes probabilidades con la definición clásica

- experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española
- suceso A: obtener un rey
- suceso B_1: obtener una figura
- suceso B_2: obtener una carta de oros

◇ probabilidad de obtener un rey si la carta extraída es de oros (condicionada)

$$\boxed{P\left(A \mid B_2\right) = \frac{1\,\text{rey de oros}}{10\,\text{oros}} = \frac{1}{10} = 0.1}$$

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

▶ EJEMPLO. Diferentes probabilidades con la definición clásica

- comparación de los resultados

$$P(A) = \frac{4\ reyes}{40\ cartas} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$P(A \mid B_1) = \frac{4\ reyes}{12\ figuras} = \frac{1}{3} = 0.\widehat{3}$$

$$P(A \mid B_2) = \frac{1\ rey\ de\ oros}{10\ oros} = \frac{1}{10} = 0.1$$

B_1 modifica la probabilidad a priori (sabiendo que la carta extraída es una figura aumenta la probabilidad de obtener un rey)

B_2 no modifica la probabilidad a priori (sabiendo que la carta extraída es de oros la probabilidad de obtener un rey es la misma)

A y *B_2* son **independientes**

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

La **probabilidad condicionada** representa cómo la probabilidad de un suceso puede cambiar si se sabe de la ocurrencia de otro suceso diferente

- **notación** de la probabilidad de un suceso A condicionada por el suceso B: $\boxed{P(A|B)}$

- **cálculo de P(A|B)**: es el cociente de la probabilidad de A y B (intersección) entre la probabilidad de B

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \Rightarrow \boxed{P(B) \neq 0}$$

NOTA. Una función de probabilidad condicionada es una función de probabilidad por lo que cumple todas sus propiedades

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

- la idea de probabilidad condicionada es utilizar la información que da un suceso conocido sobre la ocurrencia de otro suceso diferente
- cuando un suceso no aporta información sobre la ocurrencia de otro se dice que son independientes

Dos sucesos, A y B, se dicen **independientes** si:

$$\boxed{P(A|B)=P(A)} \quad \textbf{ó} \quad \boxed{P(B|A)=P(B)}$$

- regla de la multiplicación para dos sucesos, A y B, independientes: la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sucesos independientes

► **Nota.** No deben confundirse sucesos independientes y sucesos incompatibles (mutuamente excluyentes)

- incompatibles: $\boxed{A \cap B = \varnothing} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0}$
- independientes: $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$
- las diferencias son evidentes aunque si no se conoce si dos sucesos son independientes debe suponerse que no lo son (se supone que son dependientes) hasta que se demuestre lo contrario

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sucesos independientes

► **Ejemplo.** Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado

- suceso A: obtener cara
- suceso B: obtener un 6

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

► **Ejemplo.** Se lanza un dado dos veces consecutivas

- suceso A: en la primera tirada sale impar
- suceso B: en la segunda tirada sale impar

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

10. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Ejemplo

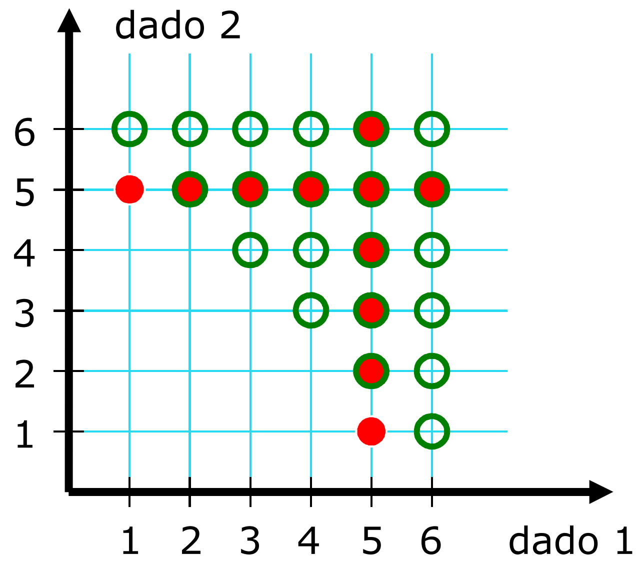
Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados. Calcular la probabilidad de obtener al menos un 5 sabiendo que la suma de ambos dados es mayor que 6.

Solución

A: "obtener, al menos, un 5" (●)

B: "la suma de ambos dados es mayor que 6" (○)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx 0.4286$$



11. PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN

Caso general
(sucesos no necesariamente independientes)

- De la definición de probabilidad condicionada:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)} \quad \textbf{ó} \quad \boxed{P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)}$$

- La probabilidad de que ocurran simultáneamente tres sucesos A, B y C

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)}$$

11. PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN

Caso general
(sucesos no necesariamente independientes)

- **Fórmula producto** (por inducción): si A_1, A_2, … , A_n son sucesos no necesariamente independientes de un espacio muestral, se verifica:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \cdots \cdot$$
$$\cdot \cdots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

11. PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN

<u>Ejemplo: ejercicio 2</u>

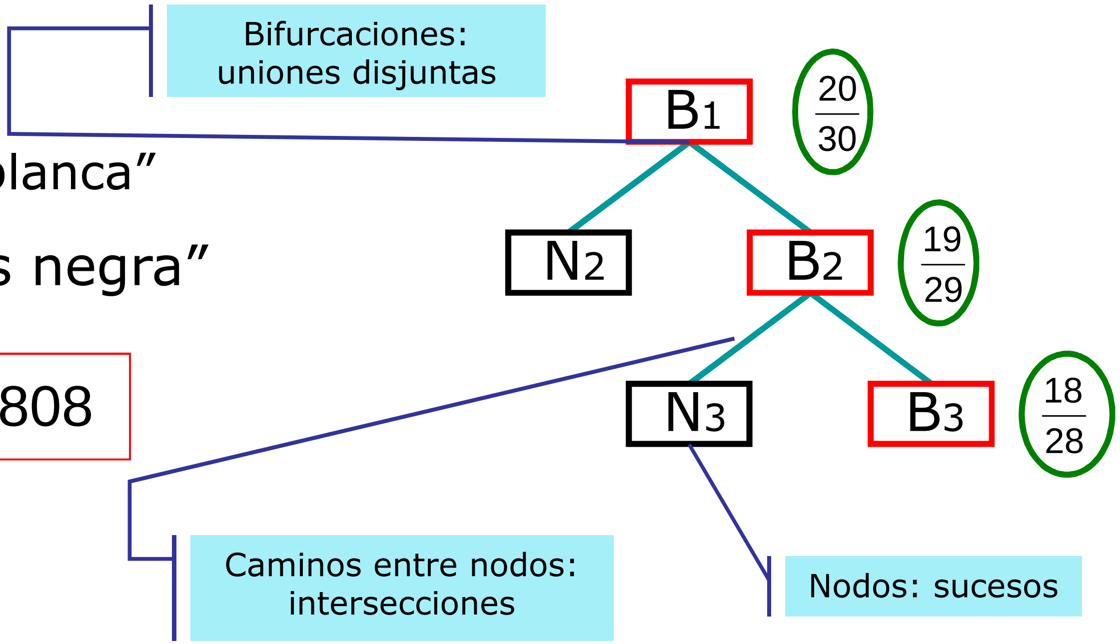
En una urna hay 20 bolas blancas y 10 bolas negras. Se realizan tres extracciones sin devolución a la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean blancas?

<u>Solución</u>

B_i: "la bola *i*-ésima es blanca"

N_i: "la bola *i*-ésima es negra"

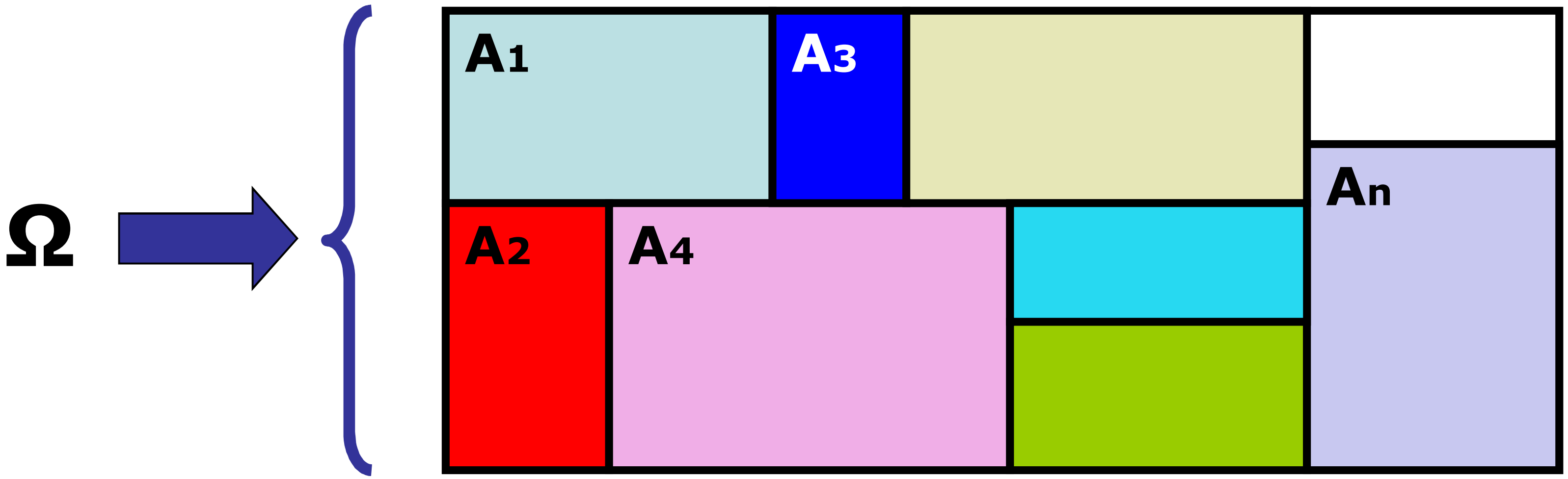
$$\boxed{P\left(B_1 \cap B_2 \cap B_3\right) \approx 0.2808}$$



12. TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL

<u>Partición de un espacio muestral</u>. Una colección de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición del espacio muestral Ω si:

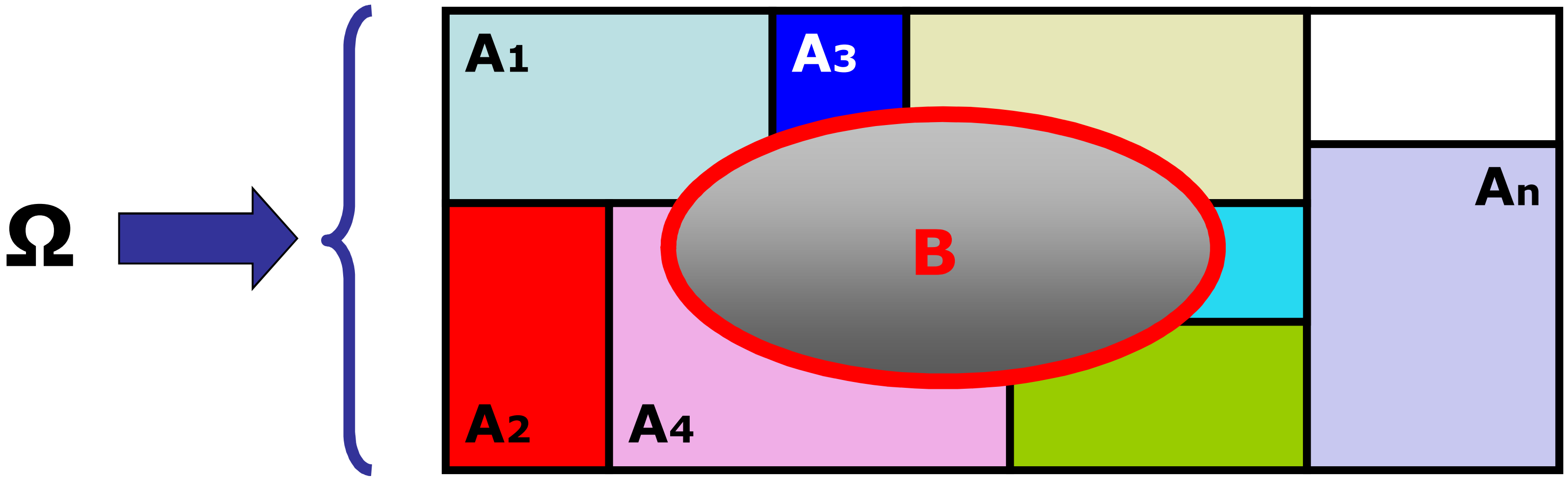
- son incompatibles dos a dos $\quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$
- su unión es el suceso seguro $\quad \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = \Omega$



12. TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL

<u>Teorema</u>. Sea P una función de probabilidad definida en un espacio muestral Ω y sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una partición de Ω.
Si B es un suceso cualquiera de Ω entonces se verifica:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}$$



12. TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL

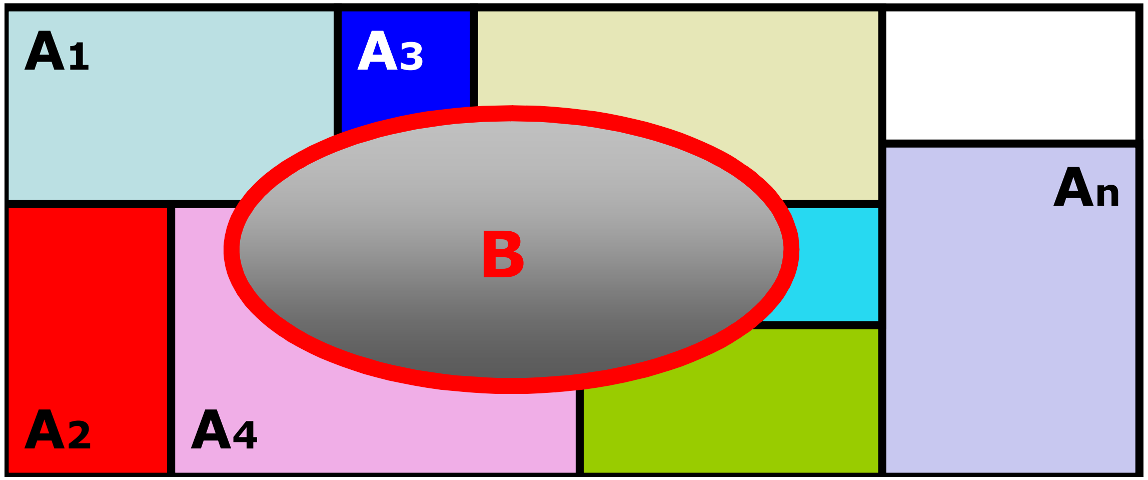
Demostración

$$B = \bigcup_{i=1}^{i=n} B \cap A_i = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ \cdots \ \cup (B \cap A_n)$$

- $\underbrace{(B \cap A_i) \text{ y } (B \cap A_j)}$ son sucesos incompatibles dos a dos

$$P\left((B \cap A_i) \cup (B \cap A_j)\right) = P(B \cap A_i) + P(B \cap A_i)$$

$$\boxed{(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing}$$



12. TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL

Demostración

$$B = \bigcup_{i=1}^{i=n} B \cap A_i = \left(B \cap A_1\right) \cup \left(B \cap A_2\right) \cup \cdots \cup \left(B \cap A_n\right)$$

$$P(B) = P\left(B \cap A_1\right) + P\left(B \cap A_2\right) + \cdots + P\left(B \cap A_n\right)$$

$$P(B) = \boxed{P\left(A_1\right) \cdot P\left(B \mid A_1\right)} + P\left(A_2\right) \cdot P\left(B \mid A_2\right) + \cdots + P\left(A_n\right) \cdot P\left(B \mid A_n\right)$$

13. TEOREMA DE BAYES

<u>Teorema</u>. Sea P una función de probabilidad definida en un espacio muestral Ω y sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una partición de Ω.

Si B es un suceso cualquiera de Ω entonces se verifica:

$$P\left(A_j \mid B\right) = \frac{P\left(A_j\right) \cdot P\left(B \mid A_j\right)}{\sum_{i=1}^{i=n} P\left(A_i\right) \cdot P\left(B \mid A_i\right)}$$

13. TEOREMA DE BAYES

Demostración

- de la definición de probabilidad condicionada

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i) = P(B) \cdot \boxed{P(A_i|B)}$$

$$\boxed{P(A_i|B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

- del teorema de la probabilidad total: $P(B) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$$\boxed{P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}}$$

13. TEOREMA DE BAYES

Ejemplo. Se dispone de tres urnas: U_1 con tres bolas rojas y cinco negras, U_2 con dos bolas rojas y una negra y U_3 con dos bolas rojas y tres negras.
Se escoge una urna al azar y se extrae una bola. Si la bola resulta ser roja, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna U_1?

Solución

U_i: suceso "escoger urna i" $\Rightarrow$ $P(U_i) = \frac{1}{3} \quad (i = 1, 2, 3)$

R: suceso "sacar bola roja"

$$P(U_1 | R) = \frac{P(U_1) \cdot P(R | U_1)}{\sum_{i=1}^{i=3} P(U_i) \cdot P(R | U_i)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{45}{173} = 0.2601$$

~26%

13. TEOREMA DE BAYES

Ejemplo: ejercicio 6

Las plantas de una especie pueden tener flores rojas homocigóticas (*RR*), flores rojas heterocigóticas (*Rr*) ó blancas (*rr*). Aproximadamente, el 70 % de las plantas con flores rojas son heterocigóticas.
Se quiere diagnosticar si una planta con flores rojas es homocigótica o no; para ello, se cruza con una planta de flores blancas. Del cruce se obtienen cinco plantas, todas con flores rojas.
¿Cuál es la probabilidad de que sea homocigótica?

Nota. Consulténse los conceptos básicos de genética

13. TEOREMA DE BAYES

Ejemplo: ejercicio 6

Solución

- una célula es homocigótica para un gen en particular cuando alelos idénticos del gen están presentes en ambos cromosomas homólogos
- un individuo *homocigótico dominante* para una característica particular posee dos copias del alelo que codifica para la característica dominante
- el *alelo dominante*, se representa con una letra mayúscula (*R*); cuando un organismo es homocigótico dominante para una característica particular, el genotipo está representado por una duplicación del símbolo de ese rasgo (*RR*)
- el *alelo recesivo*, se representa generalmente por la forma minúscula de la letra utilizada para el rasgo dominante (*r*)

13. TEOREMA DE BAYES

Ejemplo: ejercicio 6

Solución

RR: *"planta con flores rojas homocigóticas"*

Rr: *"planta con flores rojas heterocigóticas"*

si la planta tiene flores rojas →
$$\begin{cases} P(RR) = 0.30 \\ P(Rr) = 0.70 \end{cases}$$

Es lógico suponer que la planta sea heterocigótica

5 plantas con flores rojas

cruce →
- flores rojas: R x → xr: flores ?
- flores blancas: r r → Rr: flores rojas

x=R: flores rojas
x=r: flores blancas

13. TEOREMA DE BAYES

Ejemplo: ejercicio 6

Solución

RR: "*planta con flores rojas homocigóticas*"

Rr: "*planta con flores rojas heterocigóticas*"

De forma intuitiva, el hecho de que las plantas resultantes del cruce sean todas de flores rojas hace cambiar la percepción de inicio; aunque no es seguro, parece que la planta debe ser RR

B: "*todas las plantas resultantes del cruce tienen flores rojas*"

$$P(RR|B) = \frac{P(RR)\cdot P(B|RR)}{P(RR)\cdot P(B|RR) + P(Rr)\cdot P(B|Rr)} \approx 0.932$$

$$P(B|RR) = 1^5 \qquad P(B|Rr) = (0.5)^5$$

14. REGLAS ÚTILES

- el teorema de la probabilidad total resulta útil cuando es fácil calcular $P(A_i)$ y $P(B|A_i)$ y se quiere calcular $P(B)$

- el teorema Bayes
  - sirve para invertir las probabilidades condicionadas
  - muy útil y muy simple
  - en el cálculo del denominador, $P(B)$, se usa la regla de la probabilidad total

- la regla de la multiplicación es muy útil en los experimentos aleatorios que pueden separarse en varias etapas

14. EJEMPLO LÚDICO

Ejemplo

Si en una habitación hay 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas no hayan nacido el mismo día del año?

Solución

Suceso N: "no hay dos personas que hayan nacido el mismo día del año"

Cada persona puede haber nacido en cualquiera de los 365 días del año (se omite el 29 de febrero), del principio generalizado se deduce que existen el siguiente número de resultados posibles

$$365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot 365 = (365)^4 = 1.775 \times 10^{10}$$

14. EJEMPLO LÚDICO

Ejemplo

Si en una habitación hay 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas no hayan nacido el mismo día del año?

Solución

Para determinar el número de resultados en los que no existen dos personas que hayan nacido el mismo día del año se considera que la primera persona ha nacido un día cualquiera de los 365 días del año, la segunda ha nacido un día cualquiera de los 364 restantes, la tercera un día de los 363 restantes y la última ha nacido cualquier día de los restantes 362. Por el principio de recuento generalizado existe el siguiente número de resultados posibles:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 = 1.746 \times 10^{10}$$

14. EJEMPLO LÚDICO

Ejemplo

Si en una habitación hay 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas no hayan nacido el mismo día del año?

Solución

Si todos los resultados posibles son equiprobables la probabilidad de que ningún par de personas haya nacido el mismo día es:

$$P(N) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot 365} = \frac{1.746 \times 10^{10}}{1.775 \times 10^{10}} = 0.983644$$

14. EJEMPLO LÚDICO

Ejemplo

Si en una habitación hay 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas no hayan nacido el mismo día del año?

Solución

Suceso S: "sí hay dos personas, al menos, que hayan nacido el mismo día del año"

$$P(S) = 1 - P(N) = 1 - 0.983644 = 0.016356 \xrightarrow{\times 100} \approx 1.6\%$$

14. EJEMPLO LÚDICO

Ejemplo

A tenor de los resultados anteriores, en un aula, ¿qué probabilidad hay de que dos personas hayan nacido el mismo día del año?

HAGAN SUS APUESTAS