EJERCICIOS TEMA 5: DIAGONALIZACION DE ENDOMORFISMOS

1) Hallar los valores de los parámetros reales a y b para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En esos casos diagonalizar la matriz A.

2) Sea f un endomorfismo de R^4 cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} a+2 & 2a+4 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 0 & -a-1 \\ -2 & -a-3 & a & -a+1 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$ donde $a \in R$. Hallar los valores de a para los que f es diagonalizable. Calcular en esos casos una base de R^4 en la que la matriz asociada a f sea diagonal.

3) Dada la matriz $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$, ¿qué relaciones deben verificarse entre los parámetros a, b y c para que la matriz tenga un valor propio triple?

4) Dadas las aplicaciones lineales
   a) $f(x,y,z) = (x+4z, 2x-y-4z, 3z)$
   b) $f(x,y,z) = (-5x-4y+3z, x+2y-z, -7x-4y+5z)$
   estudiar si para cada una de ellas existe una base de R^3 tal que la matriz asociada a f en dicha base sea una matriz diagonal. Determinar esa base y la matriz diagonal.

5) Estudiar para que valores de los parámetros reales son diagonalizables las siguientes matrices:
   a) $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 2b & 0 & 2c \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6) Hallar la matriz de orden 3 cuyos valores propios son -1, 1 y 2 y sus vectores propios asociados $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (1,0,-1)\ y\ \vec{v}_3 = (1,0,0)$ respectivamente.

7) Diagonalizar las siguientes matrices simétricas, hallando una base de vectores ortogonal

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8) Sea la aplicación lineal $f: R^3 \rightarrow R^3$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es simétrica y de la que se conoce que

- $f(2,1,0) = (8,6,4)$
- $f(1,1,0) = (5,4,2)$
- $\vec{v} = (2,1,2)$ es un autovector de f

a) Hallar dicha matriz

b) Determinar la base ortonormal respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal

<u>Soluciones</u>

1) Si $a = b$ No diagonlizable

Si $a \neq b$ Diagonalizable; $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b-a \end{pmatrix}$

2) Si $a \neq -1$ No diagonlizable

Si $a = -1$ Diagonalizable

Valores propios: -1 (orden de multiplicidad 3) y 1 (orden de multiplicidad 1)

Base $\{(0,0,1,0),(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(1,0,-1,0)\}$

3) a) b=0 o c=0   b) λ=1 ; m=3

4) a) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \{(1,1,0),(0,1,0),(2,0,1)\}$ b) $\nexists$ base

5) a) Diagonalizable si $\begin{cases} a \neq 1 \ \forall b \\ a \neq 2 \ \forall b \\ a = 1 \ y \ b = 0 \\ a = 2 \ y \ b = 0 \end{cases}$ No diagonalizable si $\begin{cases} a = 1 \ y \ b \neq 0 \\ a = 2 \ y \ b \neq 0 \end{cases}$

b) Nunca diagonalizable

c) Diagonalizable si $\begin{cases} a \neq 1 \ y \ a \neq 3 \\ a = 1 \ y \ b = 0 \end{cases}$ No diagonalizable si $\begin{cases} a = 1 \ y \ b \neq 0 \\ a = 3 \end{cases}$

d) Diagonalizable si $a = b = c = 0$, resto de casos no diagonalizable

e) Diagonalizable si $a = b = 0$, resto de casos no diagonalizable

6) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) a) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

8) a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = \left\{\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$