EJERCICIOS TEMA 4: APLICACIONES LINEALES

1) Dadas las aplicaciones lineales $f: R^3 \to R^2$ y $g: R^2 \to R^4$ definidas por $f(x,y,z) = (2x+y, y+z)$ y $g(x,y) = (x, 0, x+y, -y)$, calcular las ecuaciones de la aplicación lineal $g°f$.

2) Sea la aplicación lineal $f(x,y,z,t) = (x+2y+z, 2x-t, 3z)$ de R^4 en R^3 y sean las bases

$U = \{\overrightarrow{u_1} = (1,-1,0,0), \overrightarrow{u_2} = (1,1,0,0), \overrightarrow{u_3} = (0,0,1,-1), \overrightarrow{u_4} = (0,0,1,1)\}$ de R^4 y $V = \{\overrightarrow{v_1} = (1,-1,1), \overrightarrow{v_2} = (1,0,-1), \overrightarrow{v_3} = (-1,1,0)\}$ de R^3,

Hallar las matrices

a) $(f)_{C,C}$ b) $(f)_{C,V}$ c) $(f)_{U,C}$ d) $(f)_{U,V}$

3) Estudiar las siguientes aplicaciones son o no lineales
   a) $f: R^2 \to R^3$ / $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$
   b) $f: R^2 \to R^2$ / $f(x_1, x_2) = (x_1 . x_2, x_1 - 2x_2)$
   c) $f: R^3 \to R^4$ / $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, x_2, 0)$
   d) $f: R^4 \to R^3$ / $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, x_1 + x_2, x_3 + x_4)$

4) Sea la aplicación lineal $f: R^2 \to R^3$ donde $f(-1,2) = (1,3,-2)$ y $f(1,4) = (1,-2,5)$, hallar $f(0,6)$ y $f(2,2)$

5) Sea $f: R^3 \to R^3$ una aplicación lineal definida por $f(x,y,z) = (x-y+z, 4y-z, x+y+5z)$, y sea $B = \{(1,2,1), (3,1,0), (-1,3,1)\}$ una base de R^3 y sea $\vec{v} \in R^3$ un vector que tiene por coordenadas $(-1,1,1)$ en la base *B*
   a) Calcular las componentes del vector $f(\vec{v})$
   b) Calcular las componentes del vector $f(\vec{v})$ en la base *B*

6) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $U = \{(2,1), (1,1)\}$ una base de R^2 y $V = \{(0,1,1), (1,1,1), (-1,-2,0)\}$ una base de R^3. Hallar
   a) Ecuaciones de la aplicación lineal cuya matriz asociada está referida a las bases canónicas
   b) Ecuaciones de la aplicación lineal cuya matriz asociada está referida a la base *U* de R^2 y a la base canónica de R^3

c) Ecuaciones de la aplicación lineal cuya matriz asociada está referida a la base canónica de R^2 y a la base *V* de R^3

d) Ecuaciones de la aplicación lineal cuya matriz asociada está referida a la base *U* de R^2 y a la base *V* de R^3

7) Sean $U = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $V = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ dos bases de R^3 y sea la aplicación lineal $f: R^3 \to R^3$ tal que $\begin{cases} f(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) = 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} \\ f(2\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{3v_2} \\ f(-\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_3}) = 5\overrightarrow{v_3} \end{cases}$.

Determinar la matriz asociada a *f* respecto de las bases *U* y *V*.

8) Determinar para las siguientes aplicaciones lineales los subespacios vectoriales núcleo e imagen así como su base y dimensión

a) $f: R^2 \to R^2 \ / \ f(x, y) = (2x, x + y)$

b) $f: R^2 \to R^3 \ / \ f(x, y) = (x, y, x + y$

c) $f: R^3 \to R^4 \ / \ f(x, y, z) = (2x, x + y, y, 0)$

9) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, una matriz asociada a una aplicación lineal f y sea $A = \{(2,1,0), (-1,0,1), (0,1,1)\}$ una base de R^3 y $B = \{(1,-2), (0,3)\}$ una base de R^2,

a) Determinar los subespacios *Núcleo(f)* e *Imag(f)*

b) Clasificar la aplicación

c) Hallar las ecuaciones de la aplicación considerando la base *A* en R^3 y la base *B* en R^2

Soluciones

1) $g°f(x, y, z) = (2x + y, 0, 2x + 2y + z, -y - z)$

2) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3) a) Si b) No c) Si d) No

4) $f(0,6)=(2,1,3)$ $\quad$ $f(2,2)=(0,-5,7)$

5) a) $(-1,8,3)$ $\quad$ b) $(1,0,2)$

6) a) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 2x_2 \\ y_3 = -2x_1 + x_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 5x_2 \\ y_2 = -2x_1 + 4x_2 \\ y_3 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = 5x_1 + 3x_2 \\ y_3 = x_1 + 5x_2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 \\ y_3 = -4x_1 + 9x_2 \end{cases}$

7) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ -5 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & -12 \end{pmatrix}$

8) a) $N(f)=\{\vec{0}\}$; $dimN(f)=0$; $Base\ N(f)=\{\vec{0}\}$

$Imag(f)=R^2$; $\dim Imag(f)=2$; $Base\ Imag(f)=\{(1,0),(0,1)\}$

b) $N(f)=\{\vec{0}\}$; $dimN(f)=0$; $Base\ N(f)=\{\vec{0}\}$; $Imag(f)=(\alpha,\beta,\alpha+\beta)$;

$\dim Imag(f)=2$;$Base\ Imag(f)=\{(1,0,1),(0,1,1)\}$

c) $N(f)=\{(0,0,\alpha)\}$; $dimN(f)=1$; $Base\ N(f)=\{(0,0,1)\}$; $Imag(f)=\left(\alpha,\frac{\alpha}{2}+\beta,\beta,0\right)$; $\dim Imag(f)=2$; $Base\ Imag(f)=\{(2,1,0,0),(0,2,1,0)\}$

9) a) $Núcleo(f)=\{(-\alpha+2\beta,\alpha,\beta)\}$; $\quad Imag(f)=<(1,-1)=\{(\alpha,-\alpha)\}$

b) Homomorfismo

c) $\begin{cases} y_1 = 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 \\ y_2 = -20x_1 + 35x_2 - 25x_3 \end{cases}$