EJERCICIOS MATRICES

1) Calcular, triangulando la matriz, el valor del determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3) Sean los vectores $\overrightarrow{v_1} = (2,1,a,2)$, $\overrightarrow{v_2} = (5,3,2a+a,a)$ y $\overrightarrow{v_3} = (a,0,a,9)$,

   a) Calcular el rango de la matriz formada por los tres vectores
   b) Para a=3, determinar las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $< \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} >$ y una base del mismo
   c) Para a=0, determinar las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $< \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} >$ y una base del mismo

4) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ determinar cuál es la matriz X que verifica

   a) $2A + X = B$
   b) $AB^t - 2X = C$
   c) $CX + AB^t = BB^t$

5) Estudiar si el conjunto de las matrices $Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix} \,/ a, b \in R \right\}$ es un subespacio vectorial

6) Calcular utilizando Gauss, la inversa de las matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

7) Simplificar al máximo la siguiente expresión sabiendo que A y B son simétricas $[A(A-B)^t]^t + (AB)^t - (B^2)^t$

8) Calcular el valor del determinante de las siguientes matrices, desarrollándolos por adjuntos

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

9) Calcular el rango de las siguientes matrices para los distintos valores de los parámetros reales *a* y *b*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ a & 4 & -a \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & a & b & a+b \\ a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ a+b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1) -4

2) a) 2 b) 3 c) 3 d) 3

3) a) Si $a \neq 3 \rightarrow rg = 3$ Si $a = 3 \rightarrow rg = 2$

b) $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \end{cases}$ base: $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$

c) $2x - 4y + z = 0$ base: $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$

4) a) $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} -4/7 & 10/7 \\ 1/7 & -34/7 \end{pmatrix}$

5) Si es un subespacio vectorial

6)

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7/3 & -1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 4/9 & -1/9 & -4/9 & 1/9 \\ -1/9 & -2/9 & 1/9 & 2/9 \\ -5/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

7) $A^2 - B^2$

8) a) 80 b) -260

9) a) Si $a = 2 \rightarrow rg = 1$
Si $a \neq 2 \rightarrow rg = 2$

b) Si $a \neq \pm b \rightarrow rg = 3$

Si $a = b \rightarrow \begin{cases} Si\ a \neq 0 \rightarrow rg = 1 \\ Si\ a = 0 \rightarrow rg = 0 \end{cases}$

Si $a = -b \rightarrow \begin{cases} Si\ a \neq 0 \rightarrow rg = 2 \\ Si\ a = 0 \rightarrow rg = 0 \end{cases}$

c) Si $a \neq 0\ y\ b \neq 0\ y\ a + b \neq 1 \rightarrow rg = 4$

Si $a = 0 \rightarrow \begin{cases} Si\ b = 0 \rightarrow rg = 1 \\ Si\ b = 1 \rightarrow rg = 2 \\ Si\ b \neq 0\ y\ b \neq 1 \rightarrow rg = 3 \end{cases}$

Si $b = 0 \rightarrow \begin{cases} Si\ a \neq 1 \rightarrow rg = 3 \\ Si\ a = 1 \rightarrow rg = 2 \end{cases}$

Si $a + b = 1 \rightarrow rg = 3$