EJERCICIOS ESPACIOS VECTORIALES

1) Indicar si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que se indican en cada apartado
   a) $W_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \ / \ x = z\}$ de R^3
   b) $W_2 = \{(x, y, z) \in R^3 \ / \ x^2 + y^2 - z = 0\}$ de R^3
   c) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in R^4 \ / \ x + y - t = 1 \ ; \ x + y + 2z = 2\}$ de R^4
   d) $W_4 = \{(x, y, z) \in R^3 \ / \ x = y \ ; 2x + z = 0\}$ de R^3

2) Determinar en el espacio vectorial R^4, sin utilizar los vectores de la base canónica, una base que
   a) Contenga al vector $\overrightarrow{v_1} = (1,2,1,1)$
   b) Contenga a los vectores $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0,2)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1, -1,2,0)$
   c) Contenga a los vectores $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,0,2,2)$ y $\overrightarrow{v_3} = (0,2,3,0)$

3) Dados los subespacios vectoriales
   $V_1 = \{(x, y, z, t) \in R^4 \ / \ 2x = y \ ; \ 2z = t\}$
   $V_2 = \{(x, y, z, t) \in R^4 \ / \ x + y + z + t = 0\}$
   $V_3 = \{(x, y, z, t) \in R^4 \ / \ x = y = z = t\}$
   a) Calcular los subespacios vectoriales $V_1 + V_2$, $V_1 + V_3$ y $V_2 + V_3$
   b) Calcular los subespacios vectoriales $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_3$ y $V_2 \cap V_3$
   c) ¿Son suplementarios V_1 y V_2? ¿Y V_2 y V_3?

4) Sea el subespacio vectorial de R^4
   $V = \{(x, y, z, t) = (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha - \beta + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \gamma) \ / \ \alpha, \beta, \gamma \in R\}$
   Calcular las ecuaciones implícitas del subespacio

5) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1} = (1,2,0,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,2,3,4)$ y $\overrightarrow{v_3} = (3,6,0,0)$
   a) Hallar el subespacio vectorial $< \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} >$
   b) Obtener una base de dicho subespacio y su dimensión

6) Sea el sistema de vectores $A = \{(6, -2,0, -1), (-1,0,0, -2)\}$ de R^4. Calcular qué valor tiene que tomar el parámetro k parara que el vector $\vec{x} = (2,2,0, k)$ sea combinación lineal de los vectores de A.

7) Dados los subespacios vectoriales de R^4
   $A =< (1,2,1,1), (-1,0,1,0), (2,2,0,1) >$
   $B = \{(x, y, z, t) \in R^4 \ / \ 2x - 2y + 2z - t = 0\}$
   a) Obtener una base de cada uno de ellos
   b) Hallar una base de $A \cap B$
   c) Obtener las ecuaciones implícitas o cartesianas de $A + B$

8) Dados los subespacios vectoriales de R^3

   $W_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \in R^3 / y - z = 0\}$

   a) Calcular $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$
   b) Determinar cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de R^3
   c) Comprobar si se verifica que $W_1 \oplus W_2 = R^3$

9) Dados los subespacios vectoriales de R^3

   $W_1 =< (1,0,1), 2,1,0) >$

   $W_2 = \{(a, a + b, -a) \in R^3, a, b \in R\}$

   $W_3 = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z, y = 0\}$

   a) Estudiar si el vector $\vec{v} = (2,0,2)$ pertenece a alguno de estos subespacios
   b) Obtener una base de cada uno de ellos
   c) Determinar las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de cada una de las bases de los subespacios halladas en el apartado anterior

10) Sea $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\}$ y sea $\vec{v} = (2, -1, -1) \in W$. Se pide

   a) Comprobar que $B = \{(-1,0,1), (-1,3, -2)\}$ es una base de W
   b) Hallar las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B
   c) Hallar las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base A de R^3 dada por

      $A = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,0,1)\}$

11) Dado el subespacio vectorial $P_4(x)$ de los polinomios de grado menor o igual a 4, se pide

   a) Demostrar que $B = \{1, x, 2x^2, x^2 + x^3, x^4\}$ es una base de $P_4(x)$
   b) Calcular las coordenadas de $q(x) = 2x + 3x^2 - 5x^3 + x^4$ respecto de la base B

SOLUCIONES

1) $W_1 \to$ si, $W_2 \to$ no, $W_3 \to$ no y $W_4 \to$ si

2) Cada uno tendréis una base diferente

3) a) $V_1 + V_2 = R^4$ y $V_2 + V_3 = R^4$,
$V_1 + V_3 = \{(\alpha+\gamma, 2\alpha+\gamma, \beta+\gamma, 2\beta+\gamma) \ / \alpha, \beta, \gamma \in R\}$
b) $V_1 \cap V_2 = \{\alpha(-1,-2,1,2) \ / \alpha \in R\}$, $V_1 \cap V_3 = \{\vec{0}\}$, $V_2 \cap V_3 = \{\vec{0}\}$
c) $V_1 \ y \ V_2 \to$ si, $V_2 \ y \ V_3 \to$ no

4) $V = \{(x, y, z, t) \in R^4 \ / \ x - y - 2z + t = 0\}$

5) a) $\{(x, y, z, t) \in R^4 / \ y = 2x, 4z = 3t\}$
b) $B = \{(1,2,0,0), (0,0,3,4)\} \ dim = 2$

6) $k = 15$

7) a) Base de A: $B_1 = \{(1,2,1,1), (-1,0,1,0)\}$
Base de A: $B_2 = \{(1,0,0,2), (0,1,0,-2), (0,0,1,2)\}$
b) Base de $A \cap B$: $B_3 = \{(-1,0,1,0)\}$
c) R^4

8) a) $W_1 + W_2 = R^3$, $W_1 \cap W_2 = \{(\alpha, -\alpha, -\alpha)\}$
b) Los dos son subespacios vectoriales
c) No se verifica

9) a) pertenece a W_1 y W_3 y no pertenece a W_2
b) Base de $W_1 \to$ B_1=$\{(1,0,1), (2,1,0)\}$, Base de $W_2 \to$ B_2=$\{(1,0,-1), (0,1,0)\}$,
Base de $W_3 \to$ B_3=$\{(0,1,0)\}$
c) $\vec{v} = (2,0)_{B_1}$ $\vec{v} = (2)_{B_3}$

10) b) $\vec{v} = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)_B$
c) $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)_B$

11) b) $(0,2,4,-5,1)_B$