EJERCICIOS DE GEOMETRIA ANALITICA

Sea el sistema de referencia $\left[O,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,e_3\}\right]$ **del espacio afín** $\mathbf{R}^3$**.**
Hallar las ecuaciones en forma implícita de la variedad lineal afín $\vec{F}+D$**, donde** $\vec{F}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}=\{\lambda(\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3),\mu(-2\vec{e}_2-\vec{e}_3)\}$ **y** $D(-2,2,1)$

$\vec{F}+D$ es el conjunto de puntos que se obtienen al sumar a los vectores que definen $\vec{F}$ con el punto $D(-2,2,1)$.

$$X=(x_1,x_2,x_3)=\vec{v}_1+\vec{v}_2+D=\lambda(\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3)+\mu(-2\vec{e}_2-\vec{e}_3)+(-2,2,1)=$$
$$=\left[\lambda(1,0,0)+\lambda(0,2,0)+\lambda(0,0,-3)\right]+\left[\mu(0,-2,0)+\mu(0,0,-1)\right]+(-2,2,1)=$$
$$=(\lambda,2\lambda,-3\lambda)+(0,-2\mu,-\mu)+(-2,2,1)$$

$$\vec{F}+D/\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\qquad \vec{F}+D/\left\{\begin{matrix}x_1=-2+\lambda\\x_2=2+2\lambda-2\mu\\x_3=1-3\lambda-\mu\end{matrix}\right\}\text{ con }\lambda,\mu\in\mathbf{R}$$

En el espacio afín $\mathbf{R}^3$ **con el sistema de referencia** $\left[O,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,e_3\}\right]$**.**
Calcular las ecuaciones paramétricas e implícita del plano afín α **que contiene al punto** $D(1,-2,3)$ **y tiene por espacio vectorial director** $\vec{F}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\{\lambda(2\vec{e}_1+\vec{e}_2),$
$,\mu(\vec{e}_2-3\vec{e}_3)\}$**.**

$\vec{F}+D$ es el conjunto de puntos que se obtienen al sumar a los vectores que definen $\vec{F}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ con el punto $D(1,-2,3)$.

$$X=(x_1,x_2,x_3)=\vec{v}_1+\vec{v}_2+D=\lambda(2\vec{e}_1+\vec{e}_2)+\mu(\vec{e}_2-3\vec{e}_3)+(1,-2,3)=$$
$$=\left[\lambda(2,0,0)+\lambda(0,1,0)\right]+\left[\mu(0,1,0)+\mu(0,0,-3)\right]+(1,-2,3)=$$
$$=(2\lambda,\lambda,0)+(0,\mu,-3\mu)+(1,-2,3)$$

$$\vec{F}+D/\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\qquad \vec{F}+D/\left\{\begin{matrix}x_1=1+2\lambda\\x_2=-2+\lambda+\mu\\x_3=3-3\mu\end{matrix}\right\}\text{ con }\lambda,\mu\in\mathbf{R}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Las ecuaciones anteriores de $\vec{F}+D$ equivalen a

$$\text{Rango}(A)=\text{Rango}\begin{pmatrix}x_1-1 & 2 & 0\\ x_2+2 & 1 & 1\\ x_3-3 & 0 & -3\end{pmatrix}=2$$

Anteriormente se ha hallado que $\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ significa que son linealmente independientes, entonces dado que el $\text{Rango}(A)=2$, la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, luego

Ecuación implícita de α

$$\begin{vmatrix}x_1-1 & 2 & 0\\ x_2+2 & 1 & 1\\ x_3-3 & 0 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$-3(x_1-1)+2(x_3-3)+6(x_2+2)=-3x_1+3+2x_3-6+6x_2+12=0$$

$$\alpha / 3x_1-6x_2-2x_3-9=0$$

Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r:\begin{cases}x & =t\\ y & =2-t\\ z & =1+3t\end{cases}\quad s:\begin{cases}x & =2+2s\\ y & =-2s\\ z & =7+6s\end{cases}$$

De las ecuaciones dadas se obtienen los puntos y vectores directores de las rectas:

$A_r(0,2,1),\ \vec{u}_r=(1,-1,3),\ A_s(2,0,7),\ \vec{u}_s=(2,-2,6)$
De donde
$\overrightarrow{A_rA_s}=(2,-2,6)$
Como $rg(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=1$ y $rg(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=1$, las rectas son coincidentes.

Estudiar la posición relativa de los planos
$\alpha : x + y - 5z \quad = -4$
$\beta : 3x - y + 25z \quad = 1$

Como el rg(M)=rg(M')=2, el sistema formado por los planos es un sistema compatible. Los dos planos se cortan en una recta, que es la recta de solución del sistema. Un vector director de la recta es el determinado por el producto vectorial de los vectores normales de los planos α y β:

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = 3\vec{i} - 17\vec{j} - 4\vec{k}$$

Por último para obtener la ecuación de la recta basta con tomar un punto cualquiera de la intersección de ambos planos. Si la variable z vale 5, se resuelve un pequeño sistema lineal del que se obtiene damos los valores $x = 3$ e$y = 18$. Sólo falta por escribir la recta solución en forma continua:

$$r : \frac{x-3}{3} = \frac{y-18}{-17} = \frac{z-5}{-4}$$

Estudiar según los valores del parámetro real $\boldsymbol{a}$ las posiciones relativas del plano $\boldsymbol{x + ay - z = 1}$ y la recta $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y - z - 1 = 0} \\ \boldsymbol{x - y - z - a + 1 = 0} \end{cases}$

Formamos el sistema

$$r \cap \alpha : \begin{cases} x + ay - z - 1 = 0 \\ 2x + y - az - 2 = 0 \\ x - y - z - a + 1 = 0 \end{cases}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -a & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(M) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0$$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$ $\rightarrow$ $rg(M) = 3 = rg(M')$ la recta y el plano se cortan en un punto
- Si $a = 2$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

  $rg(M) = 2 = rg(M')$ la recta está contenida en el plano
- Si $a = -1$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

  $rg(M) = 2 \neq rg(M') = 3$ la recta y el plano son paralelos