Sea una matriz A de orden siete asociada a un endomorfismo f definido en el espacio vectorial $\left[\left(\mathbf{R}^7,+\right),\left(\mathbf{R},+,\times\right),\circ\right]$ cuya ecuación característica está dada por $\left(-\lambda+5\right)^3\left(\lambda-2\right)^4=0$.

Se sabe que del valor propio $\lambda_1=2$ se obtienen tres vectores propios y del $\lambda_2=5$ un vector propio.

Calcular la matriz o forma reducida o canónica de Jordan que caracteriza al endomorfismo f.

Como existen dos valores propios distintos la matriz de Jordan es una matriz cuadrada de orden dos $J=\begin{pmatrix}(J_1) & (0)\\ (0) & (J_2)\end{pmatrix}$

Se calculan las celdas de Jordan:

$$\text{Para } \lambda_1=2 \Rightarrow 1+\dim\left(N_1\right)=1+3=4$$

$$J_1=\begin{pmatrix}2 & \cancel{0} & 0 & 0\\ 0 & 2 & \cancel{0} & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cancel{1}\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda_2=5 \Rightarrow 1+\dim\left(N_2\right)=1+1=2$$

$$\left(J_2\right)=\begin{pmatrix}5 & \cancel{1} & 0\\ 0 & 5 & \cancel{1}\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

La matriz de Jordan es

$$J=\begin{pmatrix}(J_1) & (0)\\ (0) & (J_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

Calcular los polinomios característico y mínimo de la matriz $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

1. POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE C

$$\left|C-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)^3-\left(1-\lambda\right)=1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3-1+\lambda=-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda$$

Se iguala a cero y se hallan las raíces de la llamada ecuación característica.

$$-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda=0$$

$$\lambda\left(-\lambda^2+3\lambda-2\right)=0\ ,\ \lambda=0\ \text{y}\ -\lambda^2+3\lambda-2=0\ ,\ \lambda^2-3\lambda+2=0$$

$$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=2\ \text{y}\ 1$$

Raíces de la ecuación:

$$\lambda_1=0\rightarrow\left(\alpha_1=1\right),\ \lambda_2=1\rightarrow\left(\alpha_2=1\right),\ \lambda_3=2\rightarrow\left(\alpha_3=1\right)$$

El polinomio característico descompuesto factorialmente es

$$-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda=-\lambda\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)=\lambda\left(\lambda-1\right)\left(2-\lambda\right)$$

2. POLINOMIO MÍNIMO DE C

1. Se comprueba si se cumple: $C=k_0I_3$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=k_0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_0&0&0\\0&k_0&0\\0&0&k_0\end{pmatrix}$$

A simple vista se observa que ambos miembros de la expresión anterior son distintos.

2. Se comprueba si se cumple: $C^2=k_0I_3+k_1C$

$$C^2=C\times C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}=k_0\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_0+k_1&0&k\\0&k_0+k_1&0\\k&0&k_0+k_1\end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de ambas matrices $(\mathrm{I})\begin{cases} 2 = k_0 + k_1 & (1) \\ 1 = k_0 + k_1 & (2) \end{cases}$

Restando: $(1)-(2)$: $1=0 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$ el sistema (1) es incompatible. Entonces no se cumple el apartado 2.

3. Se comprueba si se verifica: $C^3 = k_0 I_3 + k_1 C + k_2 C^2$

$$C^3 = C^2 \times C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = k_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 + k_1 + 2k_2 & 0 & k_1 + 2k_2 \\ 0 & k_0 + k_1 + k_2 & 0 \\ k_1 + 2k_2 & 0 & k_0 + k_1 + 2k_2 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de ambas matrices $\begin{cases} 4 = k_0 + k_1 + 2k_2 & (1) \\ 1 = k_0 + k_1 + k_2 & (2) \\ 4 = k_1 + 2k_2 & (3) \end{cases}$

$$\begin{aligned} &\text{De } (1)\text{: } k = 4 - k_1 - 2k_2 \\ &\text{De } (2)\text{: } 1 = 4 - k_1 - 2k_2 + k_1 + k_2 \text{ , } -3 = -k_2 \ \rightarrow\ k_2 = 3 \\ &\text{De } (3)\text{: } 4 = k_1 + 2(3) \text{ , } 4 = k_1 + 6 \ \rightarrow\ k_1 = -2 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad k_0 = 4 - (-2) - 2(3) = 0 \end{aligned}$$

Polinomio mínimo de C: $\lambda^3 - k_2\lambda^2 - k_1\lambda - k_0 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$

Se iguala a cero el polinomio mínimo y se obtienen las raíces de la ecuación

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = 0 \text{ , } \lambda = 0 \text{ y } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ , } \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \text{ y } 1$$

El polinomio mínimo de la matriz C es $P_m(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)$

Si se multiplica por (-1) el polinomio mínimo

$\lambda(2-\lambda)(\lambda-1) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$ coincide con el polinomio característico.

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

1. **Estudiar si es diagonalizable.**
2. **Si no lo es, calcular la matriz reducida o canónica de Jordan**
3. **La matriz P que relaciona A con J**

1. POLINOMIO CARACTERÍSTICO

$$P_c(\lambda =)\left|A-\lambda I\right| = \begin{vmatrix}0-\lambda & -4 & -2\\ 1 & 4-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda)+4(2-\lambda)$$

Ecuación característica

$$-\lambda(4-\lambda)(2-\lambda)+4(2-\lambda)=0$$

$$(2-\lambda)\left[4-\lambda(4-\lambda)\right]=0\ ,\ (2-\lambda)\left(4-4\lambda+\lambda^2\right)=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda-2)^2=0$$

Raíces de la ecuación característica

$$\lambda_1=2\ \wedge\ \alpha_1=3\ \text{(raíz triple)}$$

El polinomio característico es $P_c(\lambda)=(\lambda-2)^3$

Comprobamos la condición de diagonalización: Rango $(A-\lambda I)=n-\alpha_i$

$$\text{Rango}(A-\lambda I)=A=\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1$$

Rango $(A-\lambda I)=1\neq n-\alpha_1=3-3=0 \Rightarrow$ A no es diagonalizable por semejanza

2. POLINOMIO MÍNIMO

1. Se comprueba si $A=k_0I_3$.

$$\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=k_0\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_0 & 0 & 0\\ 0 & k_0 & 0\\ 0 & 0 & k_0\end{pmatrix}$$

Luego $A\neq k_0I_3$

2. Se comprueba si se verifica $A^2=k_1A+k_0I$.

$$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -16 & -8 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -16 & -8 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & -4k_1 & -2k_1 \\ k_1 & 4k_1 + k_0 & k_1 \\ 0 & 0 & 2k_1 + k_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -16 & -8 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & -4k_1 & -2k_1 \\ k_1 & 4k_1 + k_0 & k_1 \\ 0 & 0 & 2k_1 + k_0 \end{pmatrix}$$

Igualando elementos de ambas matrices

$$\left\{\begin{matrix} -4 = k_0 \\ -16 = -4k_1 \\ -8 = -2k_1 \\ 4 = k_1 \\ 12 = 4k_1 + k_0 \\ 4 = k_1 \\ 4 = 2k_1 + k_0 \end{matrix}\right\} \quad k_0 = -4 \ \ , \ \ k_1 = 4$$

Estas soluciones verifican las siete ecuaciones del sistema, por tanto, es un sistema de ecuaciones lineales compatible y determinado.

El polinomio mínimo es

$$P_m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Se iguala a cero a cero el polinomio mínimo y se hallan las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \ , \ \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \ \text{(raíz doble)}$$

El polinomio mínimo factorizado es $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

Dado que el exponente del polinomio mínimo es 2 existe un bloque de Jordan de orden 2. Los restantes bloques son de orden 1.

$$(J_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \ , \ \ (J_2) = (2)$$

La matriz de Jordan es

$$(J) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matriz P que relaciona A con J

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} \quad , \quad A \cdot P = P \cdot J$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4p_{21} - 2p_{31} & -4p_{22} - 2p_{32} & -4p_{23} - 2p_{33} \\ p_{11} + 4p_{21} + p_{31} & p_{12} + 4p_{22} + p_{32} & p_{13} + 4p_{23} + p_{33} \\ 2p_{31} & 2p_{32} & 2p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_{11} & p_{11} + 2p_{12} & 2p_{13} \\ 2p_{21} & p_{21} + 2p_{22} & 2p_{23} \\ 2p_{31} & p_{31} + 2p_{32} & 2p_{33} \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de ambas matrices resulta el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -4p_{21} - 2p_{31} = 2p_{11} & (1) \\ -4p_{22} - 2p_{32} = p_{11} + 2p_{12} & (2) \\ -4p_{23} - 2p_{33} = 2p_{13} & (3) \\ p_{11} + 4p_{21} + p_{31} = 2p_{21} & (4) \\ p_{12} + 4p_{22} + p_{32} = 2p_{21} + 2p_{22} & (5) \\ p_{13} + 4p_{23} + p_{33} = 2p_{23} & (6) \\ 2p_{31} = 2p_{31} & (7) \\ 2p_{32} = p_{31} + 2p_{32} & (8) \\ 2p_{33} = 2p_{33} & (9) \end{array} \right\}$$

De $(8): p_{31} = 2p_{32} - 2p_{32} = 0$

De $(1): -p_{21} = 2p_{11}$ sustituyendo en $(2): -4p_{22} - 2p_{32} = -2p_{21} + 2p_{12}$

$$-2p_{22} - p_{32} = -p_{21} + p_{12}$$

De $(2): -4p_{22} - 2p_{32} = p_{11} + p_{12}$, $-4p_{22} - 2p_{32} = -2p_{21} + 2p_{12}$

$$-4p_{22} - 2p_{32} = -2p_{21} + 2p_{12} \ , \ 2p_{12} - 2p_{21} + 4p_{22} + 2p_{32} = 0$$

$$p_{12} - p_{21} + 2p_{22} + p_{32} = 0 \ (2)$$

De $(3): 2p_{13} + 4p_{23} + 2p_{33} = 0$, $p_{13} + 2p_{23} + p_{33} = 0 \ (3)$

De $(5): p_{12} + 4p_{22} + p_{32} = p_{21} + 2p_{22}$

$$p_{12} - p_{21} + p_{22} + p_{32} = 0 \ (5)$$

De $(6): p_{13} + p_{23} + p_{33} = 2p_{23}$

$$p_{13} + 2p_{23} + p_{33} = 0 \ (6)$$

Resulta el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{cases} p_{12}-p_{21}+p_{22}+p_{32} & =0 \ \ (2) \\ p_{13}+2p_{23}+p_{33} & =0 \ \ (3) \\ p_{12}-p_{21}+2p_{22}+p_{32} & =0 \ \ (5) \\ p_{13}+2p_{23}+p_{33} & =0 \ \ (6) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

Sistema compatible e indeterminado

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} p_{12}-p_{21}+p_{22}+p_{32} & =0 \ \ (2) \\ p_{13}+2p_{23}+p_{33} & =0 \ \ (3) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} p_{12}-p_{21}+p_{22}=-p_{32} \\ p_{13}+2p_{23}=-p_{33} \end{cases}\right\}$$

Se dan valores arbitrarios a las incógnitas:

$$p_{12}=1\ ,\ p_{21}=1\ ,\ p_{13}=0\ ,\ p_{23}=1\ ,\ p_{22}=0$$

De aquí resultan los valores siguientes para

$$p_{33}=-2\ ,\ p_{32}=0\ ,\ p_{11}=-2p_{21}=-2$$

La matriz que relaciona A con J es

$$P=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan de una matriz A cuadrada de orden cuyo polinomio mínimo es $P_m(\lambda)=(\lambda-5)^2$

Se tendrán en cuenta las siguientes prescripciones teóricas:

- Existe al menos un bloque de Jordan (J_i) de orden m_i, el resto son de orden $\leq m_i$.

  Para $\lambda_1=5 \Rightarrow m_1=2$. Por lo menos un bloque de Jordan es de orden 2

- Todos los elementos de la diagonal tienen que ser igual a 5 (debido a que este es el único valor propio), debe aparecer 5 veces por ser el orden de la matriz A.

  Todas las posibles formas canónicas son

$$J_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 5 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 5 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad J_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 5 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular los polinomios característico y mínimo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

El polinomio característico es $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

2. POLINIMIO MÍNIMO DE A

1. Se comprueba si $A = k_0 I_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que $A \neq k_0 I_3$.

2. Se comprueba que se cumple: $A^2 = k_0 I_3 + k_1 A$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 + k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_0 + 2k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 + 3k_1 \end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices.

$$(\mathrm{I})\begin{cases}1=k_0+\quad k_1 & (1)\\ 4=k_0+2k_1 & (2)\\ 9=k_0+3k_1 & (3)\end{cases}$$

De $(1): k_0=1-k_1$

De $(2): 4=1-k_1+2k_1\ ,\ 3=k_1\ ,\ k_0=1-k_1=1-3=-2$

Sustituyendo en (3): $9=-2+3(3)=7\ ,\ 9\neq 7\Rightarrow$ Sistema incompatible

Los valores $k_0=-2$ y $k_1=3$ no verifican la ecuación (3), por tanto, el sistema (I) es incompatible. En consecuencia, no se cumple que $A^2=k_0I_3+k_1A$

3. Se comprueba si se cumple: $A^3=k_0I_3+k_1A+k_2A^2$

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&27\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&27\end{pmatrix}=k_0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}k_0+k_1+k_2&0&0\\0&k_0+2k_1+4k_2&0\\0&0&k_0+3k_1+9k_2\end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices

$$(\mathrm{II})\begin{cases}1=\ k_0+\ k_1+\ k_2 & (1)\\ 8=\ k_0+2k_1+4k_2 & (2)\\ 27=k_0+3k_1+9k_2 & (3)\end{cases}$$

De $(1): k_0=1-k_1-k_2$

De $(2): 8=1-k_1-k_2+2k_1+4k_2\ ,\ k_1+3k_2=7\ ,\ k_1=7-3k_2$

De $(3): 27=1-k_1-k_2+3(7-3k_2)+9k_2 1-(7-3k_2)-k_2+3(7-3k_2)+9k_2$

$27=1-7+3k_2-k_2+21-9k_2+9k_2\ ,\ 12=2k_2\ ,\ k_2=6$

$k_1=7-3(6)=-11\ ,\ k_0=1-(-11)-6=6$

El sistema (II) es compatible y determinado.

El polinomio mínimo de A es $\lambda^3-k_0+k_1\lambda+k_2\lambda^2=\lambda^3-6+11\lambda-6\lambda^2$

Se iguala a cero a cero el polinomio mínimo y se hallan las raíces de la ecuación

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Aplicando el algoritmo de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \\ 2 & & 2 & -6 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Descomposición factorial del polinomio mínimo.

$$P_m(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

En este caso ambos polinomios mínimo y característico son coincidentes

Calcular los polinomios característico y mínimo de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE B

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)$$

Descomposición factorial del polinomio característico $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (2-\lambda)(1-\lambda)$

2. POLINOMIO MÍNIMO DE LA MATRIZ B

1. Se comprueba si se cumple $D = k_0 I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{pmatrix} \Rightarrow B \neq k_0 I_2$$

2. Se comprueba si se verifica $B^2 = k_0 I_2 + k_1 B$.

$$D^2 = D \times D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 + 2k_1 & k_1 \\ 0 & k_0 + k_1 \end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices.

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} 4 = k_0 + 2k_1 & (1) \\ 3 = \quad\quad k_1 & (2) \\ 1 = k_0 + \ k_1 & (3) \end{cases}$$

Restando $(1)-(3): 3 = k_1$

De $(3): k_0 = 1 - k_1 = 1 - 3 = -2$. El sistema (I) es compatible.

El polinomio mínimo de B es.

$$\lambda^2 - k_0 - k_1\lambda = \lambda^2 - (-2) - 3\lambda = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Para factorizar el polinomio mínimo se iguala a cero y se hallan las raíces de la ecuación.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \ , \ \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \ \mathrm{y} \ 1$$

El polinomio mínimo es $P_m(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$

Obtener los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Planteamiento del sistema de ecuaciones lineales $A(\vec{x}) = \lambda(\vec{x})$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \ \left\{ \begin{aligned} 2x - 2y + 3z &= \lambda x \\ x + \ y + \ z &= \lambda y \\ x + 3y \ - z &= \lambda z \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x - \quad 2y + \quad 3z = 0 \\ \quad x + (1-\lambda)y + \quad z = 0 & (1) \\ \quad x + \quad 3y + (-1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

CÁLCULO DE LOS VALORES PROPIOS

Polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)-2+9-3(1-\lambda)-3(2-\lambda)+2(-1-\lambda)=$$

$$=\left(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2\right)(-1-\lambda)-2+9-3+3\lambda-6+3\lambda-2-2\lambda=$$

$$=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2-2+9-3+3\lambda-6+3\lambda-2-2\lambda=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$$

$$p(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$$

Ecuación característica $p(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6=0$

.

Para hallar las raíces enteras, si las tiene, se aplica el algoritmo de Ruffini. Las posibles raíces son los divisores del término independiente: $1,-1,2,-2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & 5 & -6 \\ -2 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & -1 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

$-\lambda^2+4\lambda-3=0$, $\lambda^2-4\lambda+3=0$, $\lambda=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm2}{2}=3$ y 1

VALORES PROPIOS: $\lambda_1=-2$ (raíz simple), $\lambda_2=3$ (raíz simple), $\lambda_3=1$ (raíz simple)

El orden de la matriz A es tres, el número de valores propios también es tres.

CÁLCULO DE LOS VECTORES PROPIOS

Se sustituyen en cada uno de los tres valores propios hallados en el sistema (1) y se resuelve en cada caso el sistema de ecuaciones lineales planteado.

1. Para **λ_1 = -2**

$$\left\{\begin{array}{r} 4x-2y+3z=0 \\ x+3y+\ \ z=0 \\ x+3y+\ \ z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x-2y+3z=0 \\ x+3y+\ \ z=0 \end{array}\right\}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales homogéneo se calculan así

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{y}{-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}}=k \quad , \quad x=-11k \ , \ y=-1k \ , \ z=14k$$

El subespacio solución de este sistema es $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11k\\ -k\\ 14k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ -1\\ 14\end{pmatrix}k=\vec{v}_1$

Vector propio asociado a $\lambda_1=-2:\ \vec{v}_1=\begin{pmatrix}-11\\ -1\\ 14\end{pmatrix}$

2. Para $\boldsymbol{\lambda_2=3}$

$\left\{\begin{array}{r}-x-2y+3z=0\\ x-2y+\ \ z=0\\ x+3y-4z=0\end{array}\right\}$ $(A)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow$ Rango $(A)=2$

$$\left\{\begin{array}{r}-x-2y+3z=0\\ x-2y+\ \ z=0\end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix} \Rightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{y}{-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=k \Rightarrow x=4k \ , \ y=4k \ , \ z=4k$$

El subespacio solución de este sistema es $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4k\\ 4k\\ 4k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}k=\vec{v}_2$

Vector propio asociado a $\lambda_2=3:\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

3. Para $\boldsymbol{\lambda_3=1}$

$\left\{\begin{array}{l}x-2y+3z=0\\ x+0y+\ \ z=0\\ x+3y-2z=0\end{array}\right\}$ $(A)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow$ Rango $(A)=2$

$\left\{\begin{array}{l}x-2y=-3z\\ x \qquad\ =-z\end{array}\right\}$

Restando m.a.m. las dos ecuaciones: $-2y=-2z$, $y=z$, $x=-z$

El subespacio solución de este sistema es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z = \vec{v}_3$

Vector propio asociado a $\lambda_3 = 1$: $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

RESUMEN

Los valores propios de la matriz A son: $\boldsymbol{\lambda_1 = -2}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$, $\boldsymbol{\lambda_3 = 1}$, que originan los vectores propios asociados:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{14} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Hallar los valores y vectores propios asociados a la matriz A**

Se plantea el sistema de ecuaciones lineales $A(\vec{x}) = \lambda(\vec{x})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \left\{\begin{array}{ll} 2x & = \lambda x \\ 3x + y & = \lambda y \\ -x \quad + z & = \lambda z \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{lll} (2-\lambda)x & & = 0 \\ 3x + & (1-\lambda)y & = 0 \\ -x + & (1-\lambda)z & = 0 \end{array}\right. \quad (2)$$

CÁLCULO DE LOS VALORES PROPIOS

Polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) \quad , \quad p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)$$

Ecuación característica

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \quad , \quad (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \quad , \quad (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

VALORES PROPIOS: $\lambda_1 = 1$ (raíz doble) , $\lambda_2 = 2$ (raíz simple).

El orden de la matriz A es tres, el número de valores propios también es tres.

CÁLCULO DE LOS VECTORES PROPIOS

Se sustituyen en cada uno de los tres valores propios hallados en el sistema (2) y se resuelve en cada caso el sistema de ecuaciones lineales planteado.

1. Para $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{cases} (2-1)\,x & & & = 0 \\ 3x + & (1-1)\,y & & = 0 \\ -x + & & (1-1)\,z & = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} x & = 0 \\ 3x + 0y & = 0 \\ -x + \;\; 0z & = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x & = 0 \\ 3x & = 0 \\ -x & = 0 \end{cases}\right\} \;,\;\; x = 0 \;,\; \forall y \;,\; \forall z$$

El subespacio solución de este sistema es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Vectores propios asociados a $\lambda_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Para $\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{cases} (2-2)\,x & & & = 0 \\ 3x + & (1-2)\,y & & = 0 \\ -x + & & (1-2)\,z & = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 0x & = 0 \\ 3x - y + \; 0z & = 0 \\ -x + 0y - z & = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 3x - y & = 0 \\ -x - \quad z & = 0 \end{cases}\right\} \;,\;\; x = -z \;,\; y = 3x = -3z \;,\; \forall z$$

El subespacio solución de este sistema es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} z = \vec{v}_3$

Vector propio asociado a $\lambda_2 = 2$: $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se observa que los valores de los vectores propios se reemplazan en el sistema que les originó, verifican todas las ecuaciones que lo forman.

RESUMEN

Los valores propios de la matriz A son: $\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2}$, que originan los vectores propios asociados:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Planteamiento del sistema de ecuaciones lineales $A(\vec{x}) = \lambda(\vec{x})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \left\{ \begin{array}{r} 2x + y \quad = \lambda x \\ 2y \quad = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} (2-\lambda)x + & y & & = 0 \\ & (2-\lambda)y & & = 0 \\ & & (2-\lambda)z & = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

CÁLCULO DE LOS VALORES PROPIOS

Polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = (2-\lambda)^3 \quad , \quad p(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

Ecuación característica

$p(\lambda) = (2-\lambda)^3 = 0 \quad , \quad \lambda = 2$ (raíz triple).

VALOR PROPIO: $\lambda_1 = 2$ (raíz triple)

CÁLCULO DE LOS VECTORES PROPIOS

Se sustituyen en cada uno de los tres valores propios hallados en el sistema (3) y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo planteado.

1. Para $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$

$$\left\{\begin{array}{rr} 0x + y & = 0 \\ 0y & = 0 \\ 0z & = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{y = 0\} \qquad y = 0 \, , \, \forall x \, , \, \forall z \, .$$

El subespacio solución de este sistema es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

RESUMEN

El valor propio de la matriz A es: $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$, que origina los vectores propios asociados:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calcular los valores propios de A.
2. Hallar los vectores propios de A y determinar si A admite forma diagonal.
3. Obtener una matriz de Jordan que sea semejante a A

1. VALORES PROPIOS DE A

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow\geq \left\{\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= \lambda x_1 \\ 3x_3 + \ \ x_4 &= \lambda x_2 \\ 2x_3 + 4x_4 &= \lambda x_3 \\ x_3 + 2x_4 &= \lambda x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$(\mathrm{I}) \ \left\{\begin{aligned} (4-\lambda)x_1 + 2x_2 + \quad 6x_3 \quad + 2x_4 &= 0 \\ -\lambda x_2 + \quad 3x_3 \quad + \ x_4 &= 0 \\ (2-\lambda)x_3 + \quad 4x_4 &= 0 \\ x_3 + (2-\lambda)x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Polinomio característico

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[-\lambda(2-\lambda)^2 + 4\lambda\right]$$

$$P(\lambda) = (4-\lambda)\left[4\lambda - \lambda\left(4 - 4\lambda + \lambda^2\right)\right] = (4-\lambda)\left(4\lambda - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3\right)$$
$$P(\lambda) = (4-\lambda)\left(4\lambda^2 - \lambda^3\right) = (4-\lambda)\lambda^2(4-\lambda) = \lambda^2(4-\lambda)^2$$

Ecuación característica

$$\lambda^2(4-\lambda)^2 = 0 \to \lambda = 0 \ (\text{raíz doble})$$
$$(4-\lambda)^2 = 0 \to \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \ , \ \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4 \ (\text{raíz doble})$$

Valores propios

$$\lambda_1 = 0 \wedge \alpha_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 4 \wedge \alpha_2 = 2$$

2. VECTORES PROPIOS DE A: DETERMINAR LA EXISTENCIA DE D

1. Para $\lambda_1 = 0 \wedge \alpha_1 = 2$.

Sustituyendo en (I) el valor de $\lambda_1 = 0$.

$$\left\{\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_3 + \ \ x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 &= 0 \\ 3x_3 + \ \ x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} 3x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ \ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a la segunda ecuación por (-3) y sumando a la primera resulta.

$$x_4 - 6x_4 = 0 \ , \ -5x_4 = 0 \ , \ x_4 = 0 \ , \ x_3 = 0$$

Valores que sustituidos en la primera ecuación.

$$4x_1 + 2x_2 = 0 \ , \ x_2 = -2x_1$$

Vector propio

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -2x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_1$$

$$\overleftarrow{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Subespacio propio asociado

$$S_{\lambda_1=0} = \left\{ \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_1 \, / \, \forall x_1 \in \mathbf{R} \right\}, \ \dim\left(S_{\lambda_1=0}\right) = d_1 = 1 \neq \alpha_1 = 2 \ \text{no cumple.}$$

2. Para $\lambda_2 = 4 \wedge \alpha_2 = 2$.

Sustituyendo en (I) el valor de $\lambda_2 = 4$.

$$\begin{cases} 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ -2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 0 & (1) \\ -4x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 0 & (2) \\ x_3 - 2x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

Restando $(1)-(2)$: $6x_2 = 0$, $x_2 = 0$

$$\begin{cases} (1): \ \ 3x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ -3(3): -3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \text{Sumando: } 7x_4 = 0 \ , \ x_4 = 0 \ , \ x_3 = 0 \ , \ \forall x_1$$

Vector propio

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_1$$

$$\overleftarrow{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Subespacio propio asociado

$$S_{\lambda_2=4} = \left\{ \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_1 \, / \, \forall x_1 \in \mathbf{R} \right\} \ , \ \dim\left(S_{\lambda_2=4}\right) = d_2 = 1 \neq \alpha_2 = 2 \ \text{no cumple}.$$

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 \ , \ 4 = 2 + 2 = 4 \ \text{cumple}$$

La matriz A <u>no</u> es <u>diagonalizable</u> por semejanza

3. FORMA DE JORDAN DE A

Dado que existen dos valores propios diferentes $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 4$, la matriz J tiene dos cajas de Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} (J_1) & (0) \\ (0) & (J_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda_1 = 0 \Rightarrow 1 + \dim(N_1) = 1 + 1 = 2$$

$$(J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda_2 = 4 \Rightarrow 1 + \dim(N_2) = 1 + 1 = 2$$

$$(J_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz de Jordan es } J = \begin{pmatrix} (J_1) & (0) \\ (0) & (J_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz A asociada al endomorfismo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Hallar los valores propios de A.
2. Calcular los vectores propios de la matriz A.
3. Comprobar si existe la forma diagonal de A.
4. Determinar la forma reducida o canónica de Jordan de la matriz A asociada al endomorfismo f.

1. CÁLCULO DE VALORES PROPIOS

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \ , \ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ , \ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = \lambda x_1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = \lambda x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-\lambda_1)x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + (-2-\lambda)x_2 + 6x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + (0-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Polinomio característico

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ 4 & -2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)\lambda + 4\lambda = (2-\lambda)(-2\lambda-\lambda^2) + 4\lambda$$

$$P_C(\lambda) = -4\lambda - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 + \lambda^3 + 4\lambda = \lambda^3$$

Ecuación característica

$$\lambda^3 = 0$$
$$\lambda = 0 \text{ (raíz triple)}$$

Vectores Propios

$$\lambda_1 = 0 \wedge \alpha_1 = 3$$

2. CÁLCULO DE VECTORES PROPIOS

Para $\lambda_1 = 0 \wedge \alpha_1 = 3$.

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -0x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \{2x_1 - x_2 = -3x_3\} \to x_2 = 2x_1 + 3x_3$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Vectores propios

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Subespacio propio

$$S_{(\lambda_1=0)} = \{(1,2,0),(0,3,1)\}\ ,\ \dim\left[S_{(\lambda_1=0)}\right] = d_1 = 2 \neq \alpha_1 = 3 \Rightarrow \text{no cumple}$$

3. COMPROBACIÓN DE LA FORMA DIAGONAL DE A

La matriz A no admite forma diagonal por semejanza.

4. FORMA REDUCIDA O CANÓNICA DE JORDAN

Existe una base $B \in \mathbf{R}^3$ respecto de la cual la matriz A asociada a f es la (J) o matriz de Jordan.

La matriz asociada al endomorfismo f es $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El cuadrado de la matriz A, es $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El método para hallar la matriz de Jordan J consiste en calcular la dimensión de los subespacios vectoriales.

$$N_1 = N(f)$$
$$N_2 = N(f^2)$$

En Algebra Lineal se estudia que

$$\dim\left[N(f)\right]+\dim\left[\mathrm{Im}(f)\right]=\dim(E) \text{ ó } \dim\left[N(f)\right]=\dim(E)-\mathrm{Rango}(A)$$

Entonces $n_1=\dim\left[N_1(f)\right]=3-1=2$

Sea la aplicación lineal $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$

$$f(\vec{x})=f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-46x_1-3x_2+26x_3-48x_4,70x_1+4x_2-39x_3,+76x_4,$$
$$-40x_1-3x_2+23x_3-41x_4,18x_1+x_2-10x_3+19x_4)$$

Determinar la forma reducida o canónica de Jordan de la matriz A asociada al endomorfismo f.

Existe una base $B\in\mathbf{R}^4$ respecto de la cual la matriz A asociada a f es la J o matriz de Jordan.

La matriz asociada al endomorfismo f es

$$A=\begin{pmatrix} -46 & -3 & 26 & -48 \\ 70 & 4 & -39 & 76 \\ -40 & -3 & 23 & -41 \\ 18 & 1 & -10 & 19 \end{pmatrix}$$

Se hallan las potencias A^2, A^3 y A^4

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -12 & -1 & 7 & -13 \\ -28 & -2 & 16 & -30 \\ -16 & -1 & 9 & -17 \end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix} -16 & -1 & 9 & -17 \\ -32 & -2 & 18 & -34 \\ -32 & -2 & 18 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El método para hallar la matriz de Jordan J consiste en calcular la dimensión de los subespacios vectoriales.

$$N_1 = N(f)$$
$$N_2 = N\left(f^2\right)$$
$$N_3 = N\left(f^3\right)$$

En Algebra Lineal se estudia que

$$\dim\left[N(f)\right] + \dim\left[\mathrm{Im}(f)\right] = \dim(E) \quad \text{ó} \quad \dim\left[N(f)\right] = \dim(E) - \mathrm{Rango}(A)$$
$$\mathrm{Rango}(A) = 3$$

Sea el endomorfismo en $\mathbf{R}^3$ definido por:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

1. Obtener la matriz asociada A al endomorfismo f.
2. Calcular su polinomio característico y su espectro.
3. Comprobar si el endomorfismo admite forma diagonal.

1. Matriz asociada A

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,1,1) \ , \ f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (1,1,1) \ , \ f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (1,1,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Polinomio característico

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_3 \end{Bmatrix}$$

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{Bmatrix} (1-\lambda) x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda) x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda) x_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)$$

$$P(\lambda) = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 3 + 3\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2$$

La ecuación característica es

$$P(\lambda)=0 \Rightarrow -\lambda^3+3\lambda^2=0\ ,\ \lambda^3-3\lambda^2=0\ ,\ \lambda^2(\lambda-3)=0$$

Soluciones de la ecuación característica

$$\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0\ (\text{raíz doble})$$

$$\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=3\ (\text{raíz simple})$$

VALORES PROPIOS

$$\lambda_1=0 \wedge \alpha_1=2 \quad , \quad \lambda_2=3 \wedge \alpha_2=1$$

Espectro de la matriz A o equivalentemente del endomorfismo f

$$\sigma(f)=\{0,3\}$$

3. Comprobación si el endomorfismo admite forma diagonal

Hay que comprobar si se cumple la igualdad

$$\text{Rango }(A-\lambda_i I)=n-\alpha_i$$

1. Para $\lambda_1=0 \wedge \alpha_1=2$.

$$(A-\lambda_1 I)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{Rango }\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=1 \Rightarrow \text{Rango }(A-\lambda_1 I)=1=n-\alpha_1=3-2=1 \Rightarrow \text{CUMPLE.}$$

2. Para $\lambda_2=3 \wedge \alpha_2=1$.

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\text{Rango }\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}=2 \Rightarrow \text{Rango}(A-\lambda_2 I)=2=n-\alpha_2=3-1=2 \Rightarrow \text{CUMPLE.}$$

En conclusión, la matriz A admite forma diagonal D, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$