APLICACIONES LINEALES CON MATHEMATICA

Sea la aplicación lineal cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Encontrar una base de su núcleo
b. Calcular la imagen mediante la aplicación de los vectores (1, -2, 1, 0, 3) y (-3, -2, -6, 7, 7)
c. Hallar la imagen de la aplicación y su dimensión

```
a = {{0, 1, 2, 1, 1}, {-2, 1, 3, 2, 0}, {1, 1, -2, -1, 0}};
```

```
MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado a

```
nuc = NullSpace[a]
```

```
{{-5, -1, -3, 0, 7}, {2, -1, -3, 7, 0}}
```

dos vectores en la base del núcleo → dimensión 2

Apartado b

```
f[x_] = a.x
```

```
{{0, 1, 2, 1, 1}, {-2, 1, 3, 2, 0}, {1, 1, -2, -1, 0}}.x
```

```
f[{1, -2, 1, 0, 3}]
```

```
{3, -1, -3}
```

```
f[{-3, -2, -6, 7, 7}]
```

```
{0, 0, 0}
```

Apartado c

ecuaciones de la imagen

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5}
```

```
{x1, x2, x3, x4, x5}
```

```
y = {y1, y2, y3}
```

```
{y1, y2, y3}
```

```
y = a.x
```

```
{x2 + 2 x3 + x4 + x5, -2 x1 + x2 + 3 x3 + 2 x4, x1 + x2 - 2 x3 - x4}
```

dimensión imagen = rango de la matriz de la aplicación

```
MatrixRank[a]
```

```
3
```

la dimensión de la imagen es 3

otra forma: dim esp.vect - dim núcleo = 5-2=3

Sea la aplicación lineal f : U -> V definida por f (a, b, c) = (a + b, b + c, a + c) ∀ (a, b, c) ϵ U
Hallar la matriz asociada a la aplicación f

```
Clear["Global`*"]
```

```
f[{a_, b_, c_}] = {a + b, b + c, a + c}
```

```
{a + b, b + c, a + c}
```

```
fe1 = f[{1, 0, 0}]
```

```
{1, 0, 1}
```

```
fe2 = f[{0, 1, 0}]
```

```
{1, 1, 0}
```

```
fe3 = f[{0, 0, 1}]
```

```
{0, 1, 1}
```

```
Transpose[{fe1, fe2, fe3}]
```

```
{{1, 1, 0}, {0, 1, 1}, {1, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea la aplicación lineal $f : R^3 \to R^2$ dada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ referida a las bases canónicas y sea $U = \{(2, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 2)\}$ una base de R^3 y $V = \{(1, 0), (3, 1)\}$ una base de R^2.
Indicar la matriz de la aplicación respecto a las bases U y V.

```
Clear["Global`*"]
```

```
u1 = {2, 0, 1}; u2 = {1, -1, 0}; u3 = {0, 0, 2}; v1 = {1, 0}; v2 = {3, 1};
```

```
mat = {{1, 1, 0}, {0, 2, 2}};
```

```
y1 = mat.u1
```

```
{2, 2}
```

```
Solve[y1 == a * v1 + b * v2, {a, b}]
```

```
{{a → -4, b → 2}}
```

```
y1v = {-4, 2}
```

```
{-4, 2}
```

```
y2 = mat.u2
```

```
{0, -2}
```

```
Solve[y2 == a * v1 + b * v2, {a, b}]
```

```
{{a → 6, b → -2}}
```

```
y2v = {6, -2}
```

```
{6, -2}
```

```
y3 = mat.u3
```

```
{0, 4}
```

```
Solve[y3 == a * v1 + b * v2, {a, b}]
```

```
{{a → -12, b → 4}}
```

```
y3v = {-12, 4}
```

```
{-12, 4}
```

```
matuv = Transpose[{y1v, y2v, y3v}] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dados los vectores $\overrightarrow{u_1}$=(1,-1,0,2,0), $\overrightarrow{u_2}$=(0,0,-1,0,1), $\overrightarrow{u_3}$=(1,-1,1,1,0) y $\overrightarrow{u_4}$=(0,0,m,1,1), discutir su dependencia o independencia lineal en función del parámetro real m

```
Clear["Global`*"]
```

```
u1 = {1, -1, 0, 2, 0}; u2 = {0, 0, -1, 0, 1}; u3 = {1, -1, 1, 1, 0}; u4 = {0, 0, m, 1, 1};
```

```
Reduce[a * u1 + b * u2 + c * u3 + d * u4 == {0, 0, 0, 0, 0}, m]
```

```
(d == 0 && c == 0 && b == 0 && a == 0) || (c == d && b == -d && a == -d && d ≠ 0 && m == -2)
```

cuando m!=-2 los vectores son linelamente independientes y cuando m=-2 son linealmente dependientes

vamos a ver cuál es su dependencia lineal cuando m=-2

```
u4 = u4 /. m → -2
```

```
{0, 0, -2, 1, 1}
```

```
Solve[u1 == a * u2 + b * u3 + c * u4, {a, b, c}]
```

```
{{a → -1, b → 1, c → 1}}
```

u1 = -u2 + u3 + u4

En el espacio vectorial R^4 hallar una base del subespacio S={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ / $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$}, calculando también su dimensión

```
Clear["Global`*"]
```

definimos un vector x genérico de R^4 y lo expresamos
según la ecuación que cumple por pertenecer al subespacio S

```
x = {x1, x2, x3, x4};
```

```
s = Solve[x1 + x2 == x3 + x4, {x1, x2, x3, x4}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

```
{{x1 → -x2 + x3 + x4}}
```

```
x = x /. Flatten[s]
```

```
{-x2 + x3 + x4, x2, x3, x4}
```

A partir de esta expresión hallamos un sistema de vectores sacando factor común de los valores x2 x3 y x4

```
v1 = x /. {x2 → 1, x3 → 0, x4 → 0}
```

```
{-1, 1, 0, 0}
```

```
v2 = x /. {x2 → 0, x3 → 1, x4 → 0}
```

```
{1, 0, 1, 0}
```

```
v3 = x /. {x2 → 0, x3 → 0, x4 → 1}
```

```
{1, 0, 0, 1}
```

demostramos que el sistema de vectores es libre

```
Solve[a * v1 + b * v2 + c * v3 == {0, 0, 0, 0}, {a, b, c}]
```

```
{{a → 0, b → 0, c → 0}}
```

demostramos que el sistema de vectores es generador

```
Solve[a * v1 + b * v2 + c * v3 == x, {x1, x2, x3, x4}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

```
{{x2 → a, x3 → b, x4 → c}}
```

el sistema de vectores {v1,v2,v3} es libre y generador -> forma base del subespacio S cuya dimensión es 3

En R^4 el vector $\vec{x}$ en la base U={$\vec{u_1}$,$\vec{u_2}$,$\vec{u_3}$,$\vec{u_4}$}tiene por coordenadas (3,1,2,6). Calcular sus coordenadas en la base V={$\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$,$\vec{v_3}$,$\vec{v_4}$} sabiendo que: $\vec{v_1}=\vec{u_1}+\vec{u_2}$, $\vec{v_2}=\overrightarrow{-u_1}+2\vec{u_4}$, $\vec{v_3}=\vec{u_2}-\vec{u_3}$, $\vec{v_4}=\overrightarrow{2\,u_1}-\vec{u_2}$.

```
Clear["Global`*"]
```

Método 1

```
matriz = {{1, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 2}, {0, 1, -1, 0}, {2, -1, 0, 0}}
```

```
{{1, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 2}, {0, 1, -1, 0}, {2, -1, 0, 0}}
```

```
matrizcambio = Transpose[matriz]
```

```
{{1, -1, 0, 2}, {1, 0, 1, -1}, {0, 0, -1, 0}, {0, 2, 0, 0}}
```

```
MatrixForm[matrizcambio]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aplicamos la fórmula del cambio de coordenadas de un vector al pasar de una base a otra :

Paso de la base U a la base V $\rightarrow$ $x_U = \text{matrizcambio}_{(V,U)}\, x_V$

```
xu = {3, 1, 2, 6}
```

```
{3, 1, 2, 6}
```

```
xv = {x1, x2, x3, x4}
```

```
{x1, x2, x3, x4}
```

```
s = Solve[xu == matrizcambio.xv, xv]
```

```
{{x1 → 4, x2 → 3, x3 → -2, x4 → 1}}
```

```
xv = xv /. Flatten[s]
```

```
{4, 3, -2, 1}
```

Método 2

```
v1 = {1, 1, 0, 0}; v2 = {-1, 0, 0, 2}; v3 = {0, 1, -1, 0}; v4 = {2, -1, 0, 0};
```

```
vector = {a, b, c, d}
```

```
{a, b, c, d}
```

```
s = Solve[{3, 1, 2, 6} == a * v1 + b * v2 + c * v3 + d * v4, {a, b, c, d}]
```

```
{{a → 4, b → 3, c → -2, d → 1}}
```

```
vector = vector /. s[[1]]
```

```
{4, 3, -2, 1}
```

Sea la aplicación lineal f entre los subespacios U y V definida por: f($\overrightarrow{u_1}$) = $\overrightarrow{v_1}$- $\overrightarrow{v_2}$; f($\overrightarrow{u_2}$) = $\overrightarrow{v_2}$- $\overrightarrow{v_3}$; f($\overrightarrow{u_3}$) = $\overrightarrow{v_3}$- $\overrightarrow{v_4}$
donde {$\overrightarrow{u_1}$,$\overrightarrow{u_2}$,$\overrightarrow{u_3}$} es una base de U y {$\overrightarrow{v_1}$,$\overrightarrow{v_2}$,$\overrightarrow{v_3}$,$\overrightarrow{v_4}$} es una base de V. Hallar la matriz asociada a la aplicación f y la imagen del vector (1, 1, 2) respecto a la aplicación

```
f[u1] = {1, -1, 0, 0}
```

```
{1, -1, 0, 0}
```

```
f[u2] = {0, 1, -1, 0}
```

```
{0, 1, -1, 0}
```

```
f[u3] = {0, 0, 1, -1}
```

```
{0, 0, 1, -1}
```

```
mat = Transpose[{f[u1], f[u2], f[u3]}]
```

```
{{1, 0, 0}, {-1, 1, 0}, {0, -1, 1}, {0, 0, -1}}
```

```
mat // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
mat.{1, 1, 2}
```

```
{1, 0, 1, -2}
```

Dada la aplicación lineal f:U→V definida por : f(a,b,c)=(a,0,c,0) ∀ (a,b,c) de U
a) Hallar la matriz asociada a la aplicación f
b) Hallar su núcleo y su dimensión
c) Hallar su imagen y su dimensión

Apartado A

```
f[{a_, b_, c_}] = {a, 0, c, 0}
```

```
{a, 0, c, 0}
```

```
fe1 = f[{1, 0, 0}]
```

```
{1, 0, 0, 0}
```

```
fe2 = f[{0, 1, 0}]
```

```
{0, 0, 0, 0}
```

```
fe3 = f[{0, 0, 1}]
```

```
{0, 0, 1, 0}
```

```
mat = Transpose[{fe1, fe2, fe3}]
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, 0}}
```

```
MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado b

```
x = {x1, x2, x3}
```

```
{x1, x2, x3}
```

```
Solve[f[{x1, x2, x3}] == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

```
{{x1 → 0, x3 → 0}}
```

```
x = x /. {x1 -> 0, x3 -> 0}
```

```
{0, x2, 0}
```

los vectores del núcleo son de la forma (0,x2,0)

```
v = x /. {x2 -> 1}
```

```
{0, 1, 0}
```

dimensión del núcleo 1

otra forma de hallar el núcleo

```
basenuc = NullSpace[mat]
```

```
{{0, 1, 0}}
```

```
Length[basenuc]
```

```
1
```

la dimensión del núcleo es 1 -> a partir del vector que forma la base, calculo el núcleo

```
{x1, x2, x3} = p * Flatten[basenuc]
```

```
{0, p, 0}
```

los vectores del núcleo son de la forma (0,p,0)

Apartado C

```
Clear[x1, x2, x3]
```

```
y = {y1, y2, y3, y4}
```

```
{y1, y2, y3, y4}
```

```
x = {x1, x2, x3}
```

```
{x1, x2, x3}
```

```
y == mat.x
```

```
{y1, y2, y3, y4} == {x1, 0, x3, 0}
```

los vectores de la imagen son de la forma (x1,0,x3,0)

```
MatrixRank[mat]
```

```
2
```

dimensión de la imagen = 2

otra forma de calcular la dimensión de la imagen

```
Minors[mat, 3]
```

```
{{0}, {0}, {0}, {0}}
```

todos los menores de orden 3 son 0 -> rango (mat) < 3

```
Minors[mat, 2]
```

```
{{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

existe algún menor de orden 2 distinto de 0 → rango (mat)=2 → dim imag=2

Dadas las aplicaciones siguientes:
f : $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ / f (x, y, z, t) = (x - y + y, 2 x + 4 z - t, x + y, x + y - 2 z + t).
g : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ / g (x, y, z) = (x + 2 y, z, x + y, x + y + z, x + 1).
l : $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ / l (x, y, z, t) = (x + y, z + t).
h : $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ / f (x, y, z, t) = (x + z + t, y + z + t, - x + z - t, - y - z + t).
1. Averiguar cuáles de las aplicaciones "f" , "g" y "l" son aplicaciones lineales.
2. Calcular las matrices asociadas a las aplicaciones "f" y "l" respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$.
3. Hallar la imágen f (1 , 2 , 1 , 0), utilizando la matriz asociada a la aplicación lineal y comprobarla directamente.
4. Sea la base B = { (1 ,1 , 1 , 1) , (1 , 1 , 1, 0) , (1 , 1 , 0 , 0) , (1 , 0 , 0 , 0) }. Hallar (f) $_{U,U}$ y calcular f (1 , 2 , 1 , 0).
5. Calcular una base de N (h) y otra de Im (h). ¿ La apliacación "h" es un isomorfismo ?.
6. Determinar las matrices asociadas a: "3 · h", "f + h" y a "l ∘ h"

Apartado a

```
Clear["Global`*"]
```

```
f[x_, y_, z_, t_] := {x - y + t, 2 * x + 4 * z - t, x + y, x + y - 2 * z + t}
```

```
g[x_, y_, z_] := {x + 2 * y, z, x + y, x + y + z, x + 1}
```

```
l[x_, y_, z_, t_] := {x + y, z + t}
```

```
h[x_, y_, z_, t_] := {x + z + t, y + z + t, -x + z - t, -y - z + t}
```

(* Se comprueba si se cumple $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$ la igualdad $f(\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}) = \alpha\, f(\vec{x}) + \beta\, f(\vec{y})$ *)

```
Expand[f[α * x1 + β * x2, α * y1 + β * y2, α * z1 + β * z2, α * t1 + β * t2]] ===
 Expand[α * f[x1, y1, z1, t1] + β * f[x2, y2, z2, t2]]
```

```
True
```

```
Expand[g[α * x1 + β * x2, α * y1 + β * y2, α * z1 + β * z2, α * t1 + β * t2]] ===
 Expand[α * g[x1, y1, z1, t1] + β * g[x2, y2, z2, t2]]
```

```
False
```

```
Expand[l[α * x1 + β * x2, α * y1 + β * y2, α * z1 + β * z2, α * t1 + β * t2]] ===
 Expand[α * l[x1, y1, z1, t1] + β * l[x2, y2, z2, t2]]
```

```
True
```

```
Expand[h[α * x1 + β * x2, α * y1 + β * y2, α * z1 + β * z2, α * t1 + β * t2]] ===
 Expand[α * h[x1, y1, z1, t1] + β * h[x2, y2, z2, t2]]
```

```
True
```

(* Las aplicaciones f, l y h son lineales y la aplicación g no lo es *)

Apartado b

(* Para calcular $(f)_{C,C}$ con C la base canónica de $\mathbb{R}^4$, hay que calcular las imágenes de los vectores de la base canónica que ordenados serán las
columnas de $(f)_{C,C}$. *)

```
MatfCC = Transpose[{f[1, 0, 0, 0], f[0, 1, 0, 0], f[0, 0, 1, 0], f[0, 0, 0, 1]}];
MatfCC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
MatlCC = Transpose[{l[1, 0, 0, 0], l[0, 1, 0, 0], l[0, 0, 1, 0], l[0, 0, 0, 1]}];
MatlCC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
MathCC = Transpose[{h[1, 0, 0, 0], h[0, 1, 0, 0], h[0, 0, 1, 0], h[0, 0, 0, 1]}];
MathCC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Apartado c

```
MatfCC.{1, 2, 1, 0}
```

```
{-1, 6, 3, 1}
```

```
f[1, 2, 1, 0]
```

```
{-1, 6, 3, 1}
```

```
MatfCC.{1, 2, 1, 0} == f[1, 2, 1, 0]
```

```
True
```

Apartado d

(* Se usa la fórmula siguiente $(f)_{U,U} = (C)_U \cdot (f)_{C,C} \cdot (U)_C$ donde: $(C)_U$ es la matriz de cambio de base C respecto a U,
$(U)_C$ es la matriz de cambio de base de U respecto a C. En la matriz $(U)_C$ aparecen los vectores de la base U ordenados en
columnas. Para calcular $(C)_U$ se aplica la propiedad $(C)_U = (U)_C^{-1}$. *)

```
UC = Transpose[{{1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 0}, {1, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}}];
UC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
CU = Inverse[UC]; CU // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
CU.MatfCC.UC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(* Esta última matriz obtenida es (f) $_{U,U}$. Con ella se calculará f (1 , 2 , 1 , 0) que serán las coordenadas de la imagen del vector
(1 , 2 , 1 , 0) por la aplicación lineal "f" referidas a la base canónica. *)

(* Se calculan las coordenadas del vector (1 , 2 , 1 , 0) en la base U aplicando la definición de base *)

```
Solve[{1, 2, 1, 0} == a * {1, 1, 1, 1} + b * {1, 1, 1, 0} + c * {1, 1, 0, 0} + d * {1, 0, 0, 0}]
```

```
{{a → 0, b → 1, c → 1, d → -1}}
```

(* Se multiplica f (1 , 2 , 1 , 0) $_U$ = (f) $_{U,U}$ · (1 , 2 , 1 , 0) $_U$. *)

```
(CU.MatfCC.UC).{0, 1, 1, -1}
```

```
{1, 2, 3, -7}
```

(* En el último paso se pasan las coordenadas de f (1 , 2 , 1 , 0) $_U$ = (1 , 2 , 3 , -7) a la base canónica .*)

```
1 * {1, 1, 1, 1} + 2 * {1, 1, 1, 0} + 3 {1, 1, 0, 0} - 7 * {1, 0, 0, 0}
```

```
{-1, 6, 3, 1}
```

Apartado e

```
Solve[MathCC.{x, y, z, t} == {0, 0, 0, 0}]
```

```
{{t → 0, y → 0, z → 0, x → 0}}
```

(* Luego N (h) ={ 0 , 0 , 0 , 0 } = { $\vec{0}$} $\Longrightarrow$ h es INYECTIVA. *)

(* Para calcular una base de Im (h) se pueden utilizar las columnas de la matriz "MathCC". *)

```
RowReduce[Transpose[MathCC]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(* Entonces una base de Im (h) es { (1, 0,0,0) , (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)} .*)

(* dim [N (h)] + dim [Im (h)] = dim ($\mathbb{R}^4$) $\Longrightarrow$ 0 + dim [Im (h)] = 4 $\Longrightarrow$ dim [Im (h)] = 4   luego   Im (h) $\equiv$ $\mathbb{R}^4$.*)

(* Espacio vectorial origen = Espacio vectorial imagen = $\mathbb{R}^4$ "h" es INYECTIVA , luego "h" sies un ISOMORFISMO. *)

Apartado f

```
MatfCC + MathCC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

```
MatlCC.MatfCC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
3 * MathCC // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$