ESPACIOS VECTORIALES CON MATHEMATICA

Dados los vectores $\overrightarrow{u_1}$=(1,-1,0,2,0), $\overrightarrow{u_2}$=(0,0,-1,0,1), $\overrightarrow{u_3}$=(1,-1,1,1,0) y $\overrightarrow{u_4}$=(0,0,m,1,1), discutir su dependencia o independencia lineal en función del parámetro real m

```
u1 = {1, -1, 0, 2, 0}; u2 = {0, 0, -1, 0, 1}; u3 = {1, -1, 1, 1, 0}; u4 = {0, 0, m, 1, 1};
```

```
Reduce[a * u1 + b * u2 + c * u3 + d * u4 == {0, 0, 0, 0, 0}, m]
```

```
(d == 0 && c == 0 && b == 0 && a == 0) || (c == d && b == -d && a == -d && d ≠ 0 && m == -2)
```

```
(* cuando m≠-2 los vectores son linelamente independientes
   y cuando m=-2 son linealmente dependientes *)
```

```
(*Veamos cuál es su dependencia lineal cuando m=-2 *)
```

```
u4 = u4 /. m → -2
```

```
{0, 0, -2, 1, 1}
```

```
Solve[u1 == a * u2 + b * u3 + c * u4, {a, b, c}]
```

```
{{a → -1, b → 1, c → 1}}
```

```
u1 == a * u2 + b * u3 + c * u4 /. Flatten[%]
```

```
True
```

En el espacio vectorial R^4 hallar una base del subespacio S={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \epsilon R^4$ / $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$}, calculando también su dimensión

```
(* definimos un vector x genérico de R^4 y lo expresamos
 según la ecuación que cumple por pertenecer al subespacio S *)
```

```
x = {x1, x2, x3, x4}
```

```
{x1, x2, x3, x4}
```

```
s = Solve[x1 + x2 == x3 + x4, {x1, x2, x3, x4}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

```
{{x1 → -x2 + x3 + x4}}
```

```
x = x /. Flatten[s]
```

```
{-x2 + x3 + x4, x2, x3, x4}
```

```
(* A partir de esta expresión hallamos
 un sistema de vectores sacando factor común
 de los valores x2 x3 y x4 *)
```

```
v1 = x /. {x2 → 1, x3 → 0, x4 → 0}
```

```
{-1, 1, 0, 0}
```

```
v2 = x /. {x2 → 0, x3 → 1, x4 → 0}
```

```
{1, 0, 1, 0}
```

```
v3 = x /. {x2 → 0, x3 → 0, x4 → 1}
```

```
{1, 0, 0, 1}
```

```
(* demostramos que el sistema de vectores es libre *)
```

```
Solve[a * v1 + b * v2 + c * v3 == {0, 0, 0, 0}, {a, b, c}]
```

```
{{a → 0, b → 0, c → 0}}
```

```
(* demostramos que el sistema de vectores es generador *)
```

```
Solve[a * v1 + b * v2 + c * v3 == x, {x1, x2, x3, x4}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

```
{{x2 → a, x3 → b, x4 → c}}
```

```
(* el sistema de vectores {v1,v2,v3} es libre y generador →
 forma base del subespacio S cuya dimensión es 3 *)
```

En R^4 el vector $\vec{x}$ en la base U={$\overrightarrow{u_1}$,$\overrightarrow{u_2}$,$\overrightarrow{u_3}$,$\overrightarrow{u_4}$}tiene por coordenadas (3,1,2,6). Calcular sus coordenadas en la base V={$\overrightarrow{v_1}$,$\overrightarrow{v_2}$,$\overrightarrow{v_3}$,$\overrightarrow{v_4}$} sabiendo que: $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{-u_1}+2\overrightarrow{u_4}$, $\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{v_4}=\overrightarrow{2\,u_1}-\overrightarrow{u_2}$.

Método 1

```
matriz = {{1, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 2}, {0, 1, -1, 0}, {2, -1, 0, 0}}
```

```
{{1, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 2}, {0, 1, -1, 0}, {2, -1, 0, 0}}
```

```
matrizcambio = Transpose[matriz]
```

```
{{1, -1, 0, 2}, {1, 0, 1, -1}, {0, 0, -1, 0}, {0, 2, 0, 0}}
```

```
MatrixForm[matrizcambio]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(* aplicamos la fórmula del cambio de coordenadas de un vector al pasar de una
   base a otra: Paso de la base U a la base V → xU = matrizcambio(V,U) xV *)
```

```
xu = {3, 1, 2, 6}
```

```
{3, 1, 2, 6}
```

```
xv = {x1, x2, x3, x4}
```

```
{x1, x2, x3, x4}
```

```
s = Solve[xu == matrizcambio.xv, xv]
```

```
{{x1 → 4, x2 → 3, x3 → -2, x4 → 1}}
```

```
xv = xv /. Flatten[s]
```

```
{4, 3, -2, 1}
```

Método 2

```
v1 = {1, 1, 0, 0}; v2 = {-1, 0, 0, 2}; v3 = {0, 1, -1, 0}; v4 = {2, -1, 0, 0};
```

```
vector = {a, b, c, d}
```

```
{a, b, c, d}
```

```
s = Solve[{3, 1, 2, 6} == a * v1 + b * v2 + c * v3 + d * v4, {a, b, c, d}]
```

```
{{a → 4, b → 3, c → -2, d → 1}}
```

```
vector = vector /. s[[1]]
```

```
{4, 3, -2, 1}
```

1. Determinar si los siguientes sistemas de vectores son libres o ligados

- **{{0,2,1,-1},{0,0,1,-1},{0,1,1,0}}**
- **{{1,2,3,4},{0,1,2,3},{3,4,5,6}}**

2. ¿Son los vectores u = {0,-1,0,1} y el w = {1,1,-2,0} combinación lineal de los vectores de los sistemas del apartado anterior?

```
v1 = {0, 2, 1, -1}; v2 = {0, 0, 1, -1}; v3 = {0, 1, 1, 0}; vnulo = {0, 0, 0, 0};
```

```
Solve[a * v1 + b * v2 + c * v3 == vnulo]
```

```
{{a → 0, b → 0, c → 0}}
```

(* De la solución de la ecuación vectorial anterior se deduce que el sistema formado por los vectores {v1 , v2 , v3 } es LIBRE , forman una BASE *)

```
v4 = {1, 2, 3, 4}; v5 = {0, 1, 2, 3}; v6 = {3, 4, 5, 6};
```

```
Solve[a * v4 + b * v5 + c * v6 == vnulo]
```

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

$$\left\{\left\{a \to -\frac{3\,b}{2},\ c \to \frac{b}{2}\right\}\right\}$$

(* De la solución de esta ecuación se desprende que existen varias formas de expresar el vector nulo como combinación lineal de los tres vectores. El sistema
{v4 , v5 , v6} es LIGADO *)

```
u = {0, -1, 0, 1};
```

```
Solve[a * v1 + b * v2 + c * v3 == u]
```

```
{{a → -1, b → 0, c → 1}}
```

Luego la combinación lineal es u = - v1 + v3

```
w = {1, 1, -2, 0};
```

```
Solve[a * v1 + b * v2 + c * v3 == w]
```

```
{}
```

El vector w no es combinación lineal

1. Hallar una base de los siguientes subespacios vectoriales.

- **A = {(x,y,z,t)∈$\mathbb{R}^4$ / $x-2y+z=0,\ x+y+z-t=0$}**
- **B = {(x,y,z,t,u)∈$\mathbb{R}^5$ / $2x+y-z=0,\ y-z+2t=0$}**
- **C = {(x,y,z,t,u,m)∈$\mathbb{R}^6$ / $x-2t=0,\ y-z+m=0,\ t-2u=0$}**

2. Determinar las ecuaciones en forma implícita de los siguientes subespacios vectoriales:

- **M = < (1,1,1,1),(0,2,-2,0),(3,7,1,3),>**
- **N = < (1,1,0,1),(2,0,2,-1),(0,1,-1,3),(1,0,1,1) >**
- **P = < (1,0,1,3) >**

(* • A = {(x,y,z,t)∈$\mathbb{R}^4$/ $x-2y+z=0,\ x+y+z-t=0$} *)

```
Clear["Global`*", $Line]
```

```
v = {x, y, z, t};
```

```
ecuaciones = {x - 2 y + z == 0, x + y + z - t == 0}
```

```
{x - 2 y + z == 0, -t + x + y + z == 0}
```

```
s = Solve[ecuaciones]
```

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

$$\left\{\left\{x \to \frac{2t}{3} - z,\ y \to \frac{t}{3}\right\}\right\}$$

```
v = v /. s[[1]]
```

$$\left\{\frac{2t}{3} - z,\ \frac{t}{3},\ z,\ t\right\}$$

(* Subespacio vectoraial : A = { $\frac{2t}{3}$-z, $\frac{t}{3}$,z,t} *)

```
v1 = v /. {t → 1, z → 0}
```

$$\left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 1\right\}$$

```
v2 = v /. {t → 0, z → 1}
```

```
{-1, 0, 1, 0}
```

(* Base A=$\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}0,1\right),(-1,0,1,0)\right\}$ *)

(* • B = {(x,y,z,t,u)∈$\mathbb{R}^5$ $\Big/$ $2x + y - z = 0,\ y - z + 2t = 0$} *)

In[50]:=
```
v = {x, y, z, t, u};
```

In[51]:=
```
ecuaciones = {2 x + y - z == 0, y - z + 2 t == 0}
```

Out[51]=
```
{2 x + y - z == 0, 2 t + y - z == 0}
```

In[52]:=
```
s = Solve[ecuaciones]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

Out[52]=
```
{{t → x, y → -2 x + z}}
```

In[53]:=
```
v = v /. s[[1]]
```
Out[53]=
```
{x, -2 x + z, z, x, u}
```

(* Subespacio vectorial: B={x,-2x+z,z,x,u} *)

In[54]:=
```
v1 = v /. {x -> 1, z → 0, u -> 0}
```
Out[54]=
```
{1, -2, 0, 1, 0}
```

In[55]:=
```
v2 = v /. {x → 0, z → 1, u -> 0}
```
Out[55]=
```
{0, 1, 1, 0, 0}
```

In[56]:=
```
v3 = v /. {x → 0, z → 0, u → 1}
```
Out[56]=
```
{0, 0, 0, 0, 1}
```

(* Base B={(-1,-2,0,1,0),(0,1,1,0,0),(0,0,0,1)} *)

(* • C = {(x,y,z,t,u,m)∈$\mathbb{R}^6$ / $x-2t=0,\ y-z+v=0,\ t-2u=0$} *)

In[16]:=
```
ecuaciones = {x - 2 t == 0, y - z + m == 0, t - 2 u == 0}
```
Out[16]=
```
{-2 t + x == 0, m + y - z == 0, t - 2 u == 0}
```

In[17]:=
```
v = {x, y, z, t, u, m};
```

In[18]:=
```
s = Solve[ecuaciones]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

Out[18]=
$$\left\{\left\{t \to \frac{x}{2},\ u \to \frac{x}{4},\ m \to -y+z\right\}\right\}$$

In[19]:=
```
v = v /. s[[1]]
```
Out[19]=
$$\left\{x,\ y,\ z,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{4},\ -y+z\right\}$$

(* Subespacio vectorial: C={x,y,z,$\frac{x}{2}$,$\frac{x}{4}$,-y+z}. *)

In[20]:=
```
v1 = v /. {x → 1, y → 0, z → 0}
```

Out[20]= $\left\{1, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right\}$

In[21]:=
```
v2 = v /. {x → 0, y → 1, z → 0}
```

Out[21]= {0, 1, 0, 0, 0, -1}

In[23]:=
```
v1 = v /. {x → 0, y → 0, z → 1}
```

Out[23]= {0, 0, 1, 0, 0, 1}

(* Base C=$\left\{\left(1,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\right),(0,1,0,0,0,-1),(0,0,1,0,0,1)\right\}$ *)

```
Clear["Global`*"]
```

(* • M = < (1,1,1,1),(0,2,-2,0),(3,7,1,3),> *)

```
M = {{1, 1, 1, 1}, {0, 2, -2, 0}, {3, 7, 1, 3}}
```

{{1, 1, 1, 1}, {0, 2, -2, 0}, {3, 7, 1, 3}}

```
RowReduce[M] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(* Al transformar el sistema de vectores con operaciones elementales se obtiene un sistema de rango igual a tres por tanto, el sistema inicial también es de rango
tres, entonces es una base de M.

Todo vector M se expresa como combinación lineal de los vectores de la base.
Para hallar las ecuaciones implícitas de M se resuelve el sistema que resulta de eliminar de la solución los coeficientes "a", "b" y "c" de la combinación lineal. Con esta idea se añade a los tres coeficientes (a,b,c) un vector con la variable dependiente para la que se quiere resolver el sistema.
El programa *Mathematica* encuentra una solución para las variables (a,b,c,x) en función de (y,z,t). *)

```
ec = {x, y, z, t} == a {1, 1, 1, 1} + b {0, 2, -2, 0} + c {3, 7, 1, 3}
```

{x, y, z, t} == {a + 3 c, a + 2 b + 7 c, a - 2 b + c, a + 3 c}

```
Solve[ec, {a, b, c, x}]
```

$$\left\{\left\{a \to \frac{1}{2}(8t-3y-3z),\ b \to \frac{1}{2}(3t-y-2z),\ c \to \frac{1}{2}(-2t+y+z),\ x \to t\right\}\right\}$$

(* Ecuación en forma implícita del subespacio vectorial M. *)

(* M = {(x,y,z,t)∈$\mathbb{R}^4$ / $x-t = 0$} *)

```
Clear["Global`*", $Line]
```

(* • N = < (1,1,0,1),(2,0,2,-1),(0,1,-1,3),(1,0,1,1) > *)

(* El sistema de vectores dado no es base del subespacio vectorial N. Se comprueba a continuación por el método de Gauss. *)

```
P = {{1, 1, 0, 1}, {2, 0, 2, -1}, {0, 1, -1, 3}, {1, 0, 1, 1}}
```

```
{{1, 1, 0, 1}, {2, 0, 2, -1}, {0, 1, -1, 3}, {1, 0, 1, 1}}
```

```
RowReduce[P] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(* Una base de N es {(1,0,1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)} $\Longrightarrow$ dim (N) = 3. Expresión de un vector genérico (x,y,z,t)∈ N como combinación lineal de los
escalares (a,b,c) y de los vectores de la base de N. *)

```
ec = {x, y, z, t} == a {1, 0, 1, 0} + b {0, 1, -1, 0} + c {0, 0, 0, 1}
```

```
{x, y, z, t} == {a, b, a - b, c}
```

```
Solve[ec, {a, b, c, t}]
```

```
{}
```

(* No hay solución para el sistema (sistema incompatible), esto significa que las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial N, la variable "t" no aparece. Se repite la instrucción anterior para otra variable, por ejemplo, la "y". *)

P = {(x,y,z,t)∈$\mathbb{R}^4$ / $3x-t=0$, $y=0$, $3z-t=0$}

```
Solve[ec, {a, b, c, y}]
```

```
{{a -> x, b -> x - z, c -> t, y -> x - z}}
```

(* Ecuación en forma implícita del subespacio vectorial N. *)

(* N = {(x,y,z,t)∈$\mathbb{R}^4$ $\big/$ $x - y - z = 0$} *)

(* • P = < (1,0,1,3) > *)

(* Una base de P es {(1,0,1,3)} ⟹ dim (P) = 1. Expresión de un vector genérico (x,y,z,t)∈ P como combinación lineal de los escalares (a,b,c) y del vector de la base de P. *)

```
ec = {x, y, z, t} == a {1, 0, 1, 3}
```

```
{x, y, z, t} == {a, 0, a, 3 a}
```

```
Solve[ec, {a, x, y, z}]
```

$$\left\{\left\{a \to \frac{t}{3},\ x \to \frac{t}{3},\ y \to 0,\ z \to \frac{t}{3}\right\}\right\}$$

(* Ecuaciones en forma implícita del subespacio vectorial P. *)

(* P = {(x,y,z,t)∈$\mathbb{R}^4$ $\big/$ $3x - t = 0,\ y = 0,\ 3z - t = 0$} *)

(* Si se resuelve la ecuación ("ec") para las variables "y", "z", "t" resulta.

```
Solve[ec, {a, y, z, t}]
```

```
{{a → x, y → 0, z → x, t → 3 x}}
```

(* Ecuaciones alternativas en forma implícita del subespacio vectorial P. *)

(* P = {(x,y,z,t)∈$\mathbb{R}^4$ $\big/$ $y = 0,\ z - x = 0,\ 3x - t = 0$}*)

Dados los subespacios vectoriales.

- **A ={(x,y,z)∈$\mathbb{R}^3$ $\big/$ $x - y = 0,\ 2x - y + z = 0$}**
- **B = < (1,2,3),(1,0,-1),(6,10,14) >**
- **C =< (μ,λ,-μ) >**

Hallar:

- **1. A ⋂ C y B ⋂ C. ¿ Es A ⊕ C ? , ¿ Es B ⋂ C ?.**
- **2. B + C.**
- **3. Un espacio vectorial suplementario de B.**

In[24]:=
```
Clear["Global`*"]
```

(* Determinación de las ecuaciones del subespacio vectorial C. *)

```
ec = {x, y, z} == a {1, 0, -1} + b {0, 1, 0}
```

```
{x, y, z} == {a, b, -a}
```

```
Solve[ec, {a, b, x}]
```

```
{{a → -z, b → y, x → -z}}
```

(* La solución obtenida es: x = - z*)

(* Ecuación en forma implícita del subespacio vectorial C. *)

(* C = {(x,y,z)∈$\mathbb{R}^3$ / $x + z = 0$} *)

A ⋂ C

```
Clear["Global`*"]
```

(* A ⋂ C = {x-y=0 , 2x-y+z=0,x+z=0} *)

```
In[25]:= ecuaciones = {x - y == 0, 2 x - y + z == 0, x + z == 0}
```

```
Out[25]= {x - y == 0, 2 x - y + z == 0, x + z == 0}
```

```
In[26]:= v = {x, y, z};
```

```
In[27]:= s = Solve[ecuaciones]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

```
Out[27]= {{x → -z, y → -z}}
```

```
In[28]:= v = v /. Flatten[s]
```

```
Out[28]= {-z, -z, z}
```

(* Forma paramétrica del subespacio intersección. *)

(* Como A ⋂ C ≠ {0} ⟹ A + C no es suma directa.

B ⋂ C

```
Clear["Global`*"]
```

```
In[29]:= sistema = {{1, 2, 3}, {1, 0, -1}, {6, 10, 14}};
```

In[30]:=
```
RowReduce[sistema] // MatrixForm
```

Out[30]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(* Base de B *)

{(1,0,-1) , (0,1,2)}

(* Base de C *)

{(1,0,-1)} , (0,1,0)}

(* Sea un vector genérico X = (x,y,z) ∈ B ⋂ C *) ⟹ X ∈ B y X ∈ C *)

In[35]:=
```
v = {α, β, -α + 2 β};
```

In[32]:=
```
ecuación = {α {1, 0, -1} + β {0, 1, 2} == γ {0, 1, 0} + δ {1, 0, -1}}
```

Out[32]=
```
{{α, β, -α + 2 β} == {δ, γ, -δ}}
```

In[36]:=
```
s = Solve[ecuación]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

Out[36]=
```
{{β → 0, γ → 0, α → δ}}
```

In[37]:=
```
v = v /. Flatten[s]
```

Out[37]=
```
{δ, 0, -δ}
```

(* Vector X = α (1,0,-1) = δ (1,0,-1). *)

(* Subespacio vectorial B ⋂ C. *)

B ⋂ C = < (1 , 0 , -1) >

B ⋂ C ≠ {0} ⟹ B + C no es suma directa.

```
Clear["Global`*"]
```

(* El subespacio vectorial B + C está formado por los vectores que resultan de sumar vectores de B con vectores de C. Base de B: {(1,0,-1) , (0,1,2)},
base de C: {(1,0,-1)} , (0,1,0)}. Si X ∈ B + C, se obtiene como suma de dos vectores $x_1 \in B$, $x_2 \in C \Longrightarrow X = x_1 + x_2 =$ a (0,1,0) + b (1,0,-1) +
+ c (1,0,1) + d (0,1,2). *)

In[38]:=
```
Sistema = {{0, 1, 0}, {1, 0, -1}, {1, 0, 1}, {0, 1, 2}};
```

```
RowReduce[Sistema] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensión de B + C es tres. Una base de B + C es la base de canónica {(1,0,0),(0,1,0), (0,0,1)}, dim (B + C) = 3. De hecho: B + C = $\mathbb{R}^3$.

```
Clear["Global`*"]
```

3. Un espacio vectorial suplementario.

(* Para calcular un subespacio vectorial suplementario de B completamos su base {(1,0,-1) , (0,1,2)} a una base de $\mathbb{R}^3$.
C + C^S = $\mathbb{R}^3$ $\Longrightarrow$ dim C + dim C^S = dim $\mathbb{R}^3$ $\Longrightarrow$ 2 + dim C^S = 3 $\Longrightarrow$ dim C^S = 3-2=1. Cualquier vector linealmente independiente de los
vectores de la base de B es base de algún subespacio suplementario de B. El vector (0,0,1) forma por el teorema de la base incompleta una base de B *)

In[39]:=
```
Sistema = {{0, 0, 1}, {1, 0, -1}, {1, 1, 2}};
```

In[40]:=
```
RowReduce[Sistema] // MatrixForm
```

Out[40]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*Un suplemetario de B es:*)

$$J^S = <(0,0,1)> =\{(x,yz) \in \mathbb{R}^3 / \ x = 0 \ , y = 0 \ \}$$

(* Otro suplementario de B distinto es: *)

$$(* \ J^S = <(1,0,1)> =\{(x,yz) \in \mathbb{R}^3 / \ x - z = 0 \ , y = 0 \ \} \ *)$$

In[41]:=
```
Sistema = {{1, 0, 1}, {1, 0, -1}, {0, 1, 2}};
```

In[42]:=
```
RowReduce[Sistema] // MatrixForm
```

Out[42]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(* Es un sistema libre de vectores, luego es una base de $\mathbb{R}^3$*)