6. GEOMETRIA ANALÍTICA

6. GEOMETRIA

6.1. VARIEDAD LINEAL AFÍN

6.1.1. Definición

Sea el espacio afín $(A,E,+)$, el punto $D\in A$ y el subespacio vectorial director $\vec{F}\subset E$.

El subconjunto de A formado por $\vec{\mathbf{F}}+\mathbf{D}$ se denomina variedad lineal afín que pasa por el punto D y tiene por espacio vectorial director a $\vec{\mathbf{F}}$. Se obtiene al sumar cada uno de los vectores de $\vec{\mathbf{F}}$ con el punto $\mathbf{D}$.

$$\vec{\mathbf{F}}+\mathbf{D}=\left\{\vec{\mathbf{v}}+\mathbf{D},\vec{\mathbf{v}}\in\vec{\mathbf{F}}\right\}=\left\{\mathbf{P}\in\mathbf{A}\ /\ \mathbf{D}\vec{\mathbf{P}}\in\vec{\mathbf{F}}\right\}$$

En la igualdad anterior se ha considerado que $\vec{v}=D\vec{P}$, por tanto $P=\vec{v}+D$

Si $\dim\left(\vec{F}\right)=r$, entonces $\dim\left(\vec{F}+D\right)=r$

- Un punto $D=\vec{0}+D$ es una variedad lineal afín de dimensión 0
- Si $\dim\left(\vec{F}+D\right)=1$ se denominan rectas afines.
- Si $\dim\left(\vec{F}+D\right)=2\Rightarrow$ planos afines.
- Si $\dim(A,E,+)=n$ y $n>3$, la $\dim\left(\vec{F}+D\right)=n-1$, hiperplanos afines
- A es la variedad lineal afín de dimensión n

Una variedad lineal afín queda completamente determinada cuando se conocen un punto de ella y el subespacio vectorial director.

FORMAS DE DEFINIR UNA VARIEDAD LINEAL AFÍN

- Con uno de sus puntos D y un subespacio vectorial director $\vec{F}$.
- Si $\vec{F}$ está definido por un "sistema generador" $\left\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3,\dots,\vec{w}_p\right\}$, se deben suprimir los vectores que sean combinación lineal al objeto de emplear el mínimo número de vectores linealmente independientes.
- Considerar los puntos $D,\ D_1,\ D_2,\dots\dots,D_p$ tales que los vectores $D\vec{D}_1, DD_2, ,D\vec{D}_3\dots\dots,D\vec{D}_p$ formen una base de $\vec{F}$. El conjunto de $(r+1)$ puntos $\{D,D_1,D_2,D_3,\dots,D_r\}$ se les denomina afín linealmente independientes.

  La ecuación paramétrica vectorial de la variedad lineal $\vec{F}+D$ es

  $$D\vec{X}=\lambda_1 D\vec{D}_1+\lambda_2 DD_2+\lambda_3 D\vec{D}_3+\dots\dots+\lambda_r D\vec{D}_r$$

  Evidentemente la variedad lineal afín $\vec{F}+D$ contiene a los puntos $D,\ D_1,\ D_2,\dots\dots,D_p$.

6.1.2. Ecuaciones paramétricas de una variedad lineal afín

Sea $\dim(\vec{F}) = r$, una base $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_r\}$ de $\vec{F}$ y un punto cualquiera $X \in \vec{F} + D$. Un vector $\vec{v} \in \vec{F}$ se escribe $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r$. Entonces $X = \vec{v} + D = (\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r) + D$ con $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $1 \le i \le r$.

La forma vectorial, también llamada "ecuación paramétrica vectorial" es

$$D\vec{X} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \cdots\cdots + \lambda_r\vec{v}_r \quad \lambda_i \in \mathbf{R},\ 1 \le i \le r$$

En el espacio afín $(A, E, +)$ sea la base $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n\}$ y las coordenadas cartesianas de $X(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ y $D(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$.

Entonces $D\vec{X} = (\vec{u}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_1)\begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n - d_n \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n)\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \ \ldots\ldots\ldots, \quad \vec{v}_r = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n)\begin{pmatrix} v_{1r} \\ v_{2r} \\ v_{3r} \\ \vdots \\ v_{nr} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n - d_n \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} + \cdots\cdots + \lambda_r\begin{pmatrix} v_{1r} \\ v_{2r} \\ v_{3r} \\ \vdots \\ v_{nr} \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_i \in \mathbf{R},\ 1 \le i \le r$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - d_1 = v_{11}\lambda_1 + v_{12}\lambda_2 + \cdots\cdots + v_{1r}\lambda_r \\ x_2 - d_2 = v_{21}\lambda_1 + v_{22}\lambda_2 + \cdots\cdots + v_{2r}\lambda_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - d_n = v_{n1}\lambda_1 + v_{n2}\lambda_2 + \cdots\cdots + v_{nr}\lambda_r \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l} x_1 = d_1 + v_{11}\lambda_1 + v_{12}\lambda_2 + \cdots\cdots + v_{1r}\lambda_r \\ x_2 = d_2 + v_{21}\lambda_1 + v_{22}\lambda_2 + \cdots\cdots + v_{2r}\lambda_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = d + v_{n1}\lambda_1 + v_{n2}\lambda_2 + \cdots\cdots + v_{nr}\lambda_r \end{array}\right\} \quad (1)$$

El sistema de ecuaciones (1) recibe el nombre de "*ecuaciones paramétricas de la variedad lineal afín* $\vec{\mathbf{F}} + \mathbf{D}$".

En estas ecuaciones se observa que la variedad lineal afín $\vec{F} + D$ contiene o pasa por el punto D y tiene por vector director a $\vec{V}$ de componentes $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_r)$

6.1.3. Ecuaciones implícitas de una variedad lineal afín

Para hallar la forma implícita de la variedad lineal a partir de las ecuaciones en forma paramétricas, se eliminan los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_r$ y se obtiene un sistema de $"n-r"$ ecuaciones lineales con $"n"$ incógnitas: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots\ldots, x_n$

$$\vec{F}+D/\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1r}x_r + \alpha x_{r+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{21}x_r + \alpha x_{r+2} = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots\cdots + a_{11}x_r + \alpha x_{r+3} = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots\cdots + a_{pr}x_r + \alpha x_n = b_p \end{array}\right\} \text{ con } "n-r" \text{ ecuaciones lineales}$$

El sistema lineal anterior o cualquier otro equivalente, se denomina "sistema de ecuaciones implícitas de la variedad lineal afín $\vec{\mathbf{F}} + \mathbf{D}$.

6.1.4. Posiciones relativas de dos variedades lineales afines

Sea el espacio afín $(A, E, +)$ con el sistema de referencia $\left[A, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots, \vec{v}_n\}\right]$. Se consideran las dos variedades lineales afines $\vec{F}_1 + D$ y $\vec{F}_2 + C$ de ecuaciones.

$$\vec{F}_1+D/\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_1x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{r\,n}x_n = b_r \end{array}\right\} \quad , \quad \vec{F}_2+C/\left\{\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = k_1 \\ b_1x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \ldots + b_{s\,n}x_n = k_s \end{array}\right\}$$

La intersección de estas dos variedades lineales es el conjunto de soluciones del sistema lineal.

$$\left(\vec{F}_1+D\right)\cap\left(\vec{F}_2+C\right)/\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_1x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{r\,n}x_n = b_r \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = k_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \ldots + b_{s\,n}x_n = k_s \end{array}\right\} \qquad (2)$$

a) Las variedades lineales afines "se cortan" si el sistema lineal (2) es compatible, es decir, si $\mathbf{Rango}\left[\mathbf{A}/(\mathbf{h},\mathbf{k})\right]=\mathbf{Rango}(\mathbf{A})$

$$\mathrm{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & h_r \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} & k_s \end{pmatrix}=\mathrm{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

b) El caso de "incidencia" $\left(\vec{\mathbf{F}}_1+\mathbf{D}\right)\subset\left(\vec{\mathbf{F}}_2+\mathbf{C}\right)$ de ambas variedades lineales. Este es un caso particular en que las variedades se cortan. Este caso ser caracteriza por

$$\mathrm{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & h_r \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} & k_s \end{pmatrix}=\mathrm{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & h_r \end{pmatrix}$$

El caso de "incidencia" $\left(\vec{\mathbf{F}}_2+\mathbf{D}\right)\subset\left(\vec{\mathbf{F}}_1+\mathbf{C}\right)$ de ambas variedades lineales. Este caso ser caracteriza por

$$\mathrm{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & h_r \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} & k_s \end{pmatrix}=\mathrm{Rango}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} & k_s \end{pmatrix}$$

Si $\left(\vec{\mathbf{F}}_1+\mathbf{D}\right)=\left(\vec{\mathbf{F}}_2+\mathbf{C}\right)$ se dice que ambas variedades lineales son "coincidentes o idénticas".

c) Las variedades lineales afines "no se cortan" si el sistema lineal (2) es incompatible, es decir, si $\mathbf{Rango}\left[\mathbf{A}/(\mathbf{h},\mathbf{k})\right]\neq\mathbf{Rango}(\mathbf{A})$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & h_r \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} & k_s \end{pmatrix} \neq \text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

- $\vec{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{D}$ y $\vec{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{C}$ son paralelas si

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & h_r \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} & k_s \end{pmatrix} \neq \text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

- $\vec{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{D}$ y $\vec{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{C}$ se cruzan si

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & h_r \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} & k_s \end{pmatrix} \neq \text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} \neq \left\{ \begin{array}{l} \neq \text{Rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \\ \neq \text{Rango}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

6.2. ESPACIO AFÍN $\mathbf{R}^3$

Espacio afín $\mathbf{R}^3$ es el espacio afín de dimensión tres $\left(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3, +\right)$.

6.2.1. Ecuación de una recta en el espacio afín

<u>Ecuaciones paramétricas de la recta</u>

La ecuación de la recta R se deduce como variedad lineal que es, sumando su espacio vectorial director $\vec{\mathrm{F}}$ de dimensión 1 con uno de sus puntos $\mathrm{D}(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{R}$.

$$\mathrm{R} \;/\; \vec{\mathrm{F}} + \mathrm{D}$$

Sea $\vec{\mathrm{F}} = \{\lambda\vec{v} / \lambda \in \mathbf{R}\}$ siendo $\vec{v} \in \vec{\mathrm{F}}$ un vector no nulo de componentes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$.

Cualquier punto $X = (x_1, x_2, x_3)$ de la recta R debe verificar la "ecuación paramétrica vectorial" $X = \lambda\vec{v} + D$

$$X = (x_1, x_2, x_3) = \lambda(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) + (d_1, d_2, d_3) = (\lambda v_1 + d_1, \lambda v_2 + d_2, \lambda v_3 + d_3) \text{ para } \lambda \in \mathbf{R}$$

Igualando ambos miembros resulta

$$R / \begin{cases} x_1 = \lambda v_1 + d_1 \\ x_2 = \lambda v_2 + d_2 \\ x_3 = \lambda v_3 + d_3 \end{cases} \qquad (3)$$

<u>Ecuaciones canónicas o en forma continua de la recta</u>

Despejando λ en las ecuaciones (3), resulta $\lambda = \dfrac{x_1 - d_1}{v_1} = \dfrac{x_2 - d_2}{v_2} = \dfrac{x_3 - d_3}{v_3}$

$$R / \frac{x_1 - d_1}{v_1} = \frac{x_2 - d_2}{v_2} = \frac{x_3 - d_3}{v_3}$$

Los números v_1, v_2, v_3 se llaman coeficientes directores de la recta.

La recta R se determina conociendo dos puntos $D(d_1, d_2, d_3)$ y $A(a_1, a_2, a_3)$, entonces el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = \vec{DA} = (a_1 - d_1, a_2 - d_2, a_3 - d_3)$ es un vector director de la recta R, cuya ecuación canónica o en forma continua es.

$$R / \frac{x_1 - d_1}{a_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{a_2 - d_2} = \frac{x_3 - d_3}{a_3 - d_3}$$

<u>Ecuaciones afines de la recta r</u>

Las ecuaciones paramétricas de la recta R que pasa por los puntos $D(d_1, d_2, d_3)$ y $A(a_1, a_2, a_3)$ son:

$$R / \begin{cases} x_1 = \lambda(a_1 - d_1) + d_1 = (1-\lambda)d_1 + \lambda a_1 \\ x_2 = \lambda(a_2 - d_2) + d_2 = (1-\lambda)d_2 + \lambda a_2 \\ x_3 = \lambda(a_3 - d_3) + d_3 = (1-\lambda)d_3 + \lambda a_3 \end{cases} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbf{R}$$

Si se hacen $\mu_1 = 1 - \lambda$ y $\mu_2 = \lambda$, resultan las denominadas "ecuaciones afines de la recta R".

$$R / \begin{cases} x_1 = \mu_1 d_1 + \mu_2 a_1 \\ x_2 = \mu_1 d_2 + \mu_2 a_2 \\ x_1 = \mu_1 d_3 + \mu_2 a_3 \\ 1 = \mu_1 + \mu_2 \end{cases} \qquad \text{con } \mu \in \mathbf{R}\ ,\ \mu_2 \in \mathbf{R}$$

Ecuación en forma implícita de la recta r

Las ecuaciones paramétricas de la recta R se pueden como

$$\begin{pmatrix} x_1-d_1 \\ x_2-d_2 \\ x_3-d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\lambda \ , \quad \text{entonces} \quad R/\begin{Bmatrix} v_2x_1-v_2d_1-v_1x_2+v_1d_2=0 \\ v_3x_1-v_3d_1-v_1x_3+v_1d_3=0 \end{Bmatrix} \quad \text{donde}$$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} x_1-d_1 \\ x_2-d_2 \\ x_3-d_3 \end{pmatrix}=1$. Esto significa que los menores de segundo orden que se pueden formar son todos nulos:

$$\begin{vmatrix} x_1-d_1 & v_1 \\ x_2-d_2 & v_2 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x_1-d_1 & v_1 \\ x_3-d_3 & v_3 \end{vmatrix}=0$$

Si se desarrollan ambos determinantes

$$R/\begin{Bmatrix} v_2(x_1-d_1)-v_1(x_2-d_2)=0 \\ v_3(x_1-d_1)-v_1(x_3-d_3)=0 \end{Bmatrix} \ , \ R/\begin{Bmatrix} v_2x_1-v_2d_1-v_1x_2+v_1d_2=0 \\ v_3x_1-v_3d_1-v_1x_3+v_1d_3=0 \end{Bmatrix}$$

se obtienen las ecuaciones implícitas de R.

6.2.2. Ecuación de un plano en el espacio afín

La ecuación de un plano π se deduce como variedad lineal que es, sumando su espacio vectorial director $\vec{F}$ de dimensión 2 con uno de sus puntos $D(d_1, d_2, d_3) \in \pi$.

$$\Pi \ / \ \vec{F} \ + \ D$$

Ecuaciones paramétricas del plano

Sea $\vec{F}=\{\lambda\vec{v}+\mu\vec{w} \,/\, \lambda,\mu \in \mathbf{R}\}$ siendo $\vec{v},\vec{w} \in \vec{F}$ dos vectores no nulos de componentes

$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3$, $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)=w_1\vec{e}_1+w_2\vec{e}_2+w_3\vec{e}_3$,

cualquier punto $X=(x_1,x_2,x_3)$ del plano π debe verificar la "ecuación paramétrica vectorial" $X=(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})+D$.

$$X=(x_1,x_2,x_3)=\lambda(v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3)+\mu(w_1\vec{e}_1+w_2\vec{e}_2+w_3\vec{e}_3)+(d_1,d_2,d_3)=$$
$$=(\lambda v_1+\mu w_1+d_1, \lambda v_2+\mu w_2+d_2, \lambda v_3+\mu w_3+d_3) \quad \text{para } \lambda,\mu \in \mathbf{R}$$

Igualando ambos miembros resulta

$$\pi / \begin{cases} x_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 + d_1 \\ x_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 + d_2 \\ x_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 + d_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}. \qquad (4)$$

Las ecuaciones (4) se pueden escribir así:

$$\pi / \begin{cases} x_1 - d_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ x_2 - d_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 \\ x_3 - d_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \qquad (6).$$

<u>Ecuación implícita o general del plano</u>

Las ecuaciones (6) en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \mu \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

Como los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} x_1 - d_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - d_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - d_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Esta equivale a que su determinante sea nulo.

$$\begin{vmatrix} x_1 - d_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - d_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - d_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Desarrollando este determinante y estudiando el tipo de términos que lo forman, resulta "la ecuación implícita o general del plano π".

$$\pi / Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

Observación

Cuando se desarrolla el determinante (7) es evidente que al reducir términos semejantes existe un conjunto de ellos multiplicados por x_1 expresados con la notación A, un segundo conjunto multiplicados por x_2 expresado por B, un tercer conjunto multiplicado por x_3 notado por C y finalmente un cuarto conjunto de términos independientes por D. Entonces $\vec{F}$ es el conjunto de vectores cuyas componentes x_1, x_2, x_3 satisfacen la ecuación $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$

En el caso particular para los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$$\begin{cases} Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0 \\ Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 = 0 \end{cases}$$

Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados

El plano π queda definido cuando se conocen tres de sus puntos: $D(d_1, d_2, d_3)$ $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, de forma que los vectores $\vec{DA}$ y $\vec{DB}$ formen una base de $\mathbf{R}^3$. Se realizan en (7) las sustituciones:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = \vec{DA} = (a_1 - d_1, a_2 - d_2, a_3 - d_3)$$
$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = \vec{DB} = (b_1 - d_1, b_2 - d_2, b_3 - d_3)$$

$$\Pi / \begin{vmatrix} x_1 - d_1 & a_1 - d_1 & b_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 & a_2 - d_2 & b_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 & a_3 - d_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

En el apartado anterior de la ecuación de una recta se debe considerar que dos planos no paralelos definen una recta R que es su línea de intersección.

Sean las ecuaciones de estos dos planos

$$A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1 = 0 \text{ y } A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2 = 0$$

Ambas ecuaciones consideradas conjuntamente

$$R / \begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1 = 0 \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Se denominan "ecuaciones generales de la recta R".

A partir de las ecuaciones generales dadas por (9), es posible obtener las ecuaciones canónicas o en forma continua. Para ello basta con conocer un punto de la recta D y su vector director $\vec{v}$.

Las coordenadas de un punto de la recta se obtienen resolviendo el sistema (8) se elige la incógnita que pasa al segundo miembro y se calculan las otras dos en función de ella.

El vector director $\vec{r}$ de la recta R tiene que ser perpendicular a los vectores directores de ambos planos (este concepto se explicará en el apartado "ecuación normal o hessiana del plano") $\vec{V}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{V}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ambos normales a los planos que definen R , entonces el vector $\vec{r} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.

Plano determinado por sus intersecciones con los ejes de referencia (ecuación canónica del plano)

La ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,1)$ se obtiene sustituyendo estos valores en la ecuación (8).

$$\Pi / \begin{vmatrix} x_1 - a & -a & -a \\ x_2 & b & 0 \\ x_3 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \;,\; (x_1 - a)bc + abx_3 + acx_2 = 0 \;,\; bcx_1 - abc + abx_3 + acx_2 = 0$$

$$bcx_1 + acx_2 + abx_3 = abc \text{ , dividiendo m.a.m por abc: } \frac{bcx_1 + acx_2 + abx_3}{abc} = 1$$

$$\Pi / \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$$

Ecuaciones afines del plano

Las ecuaciones paramétricas Del plano Π que pasa por los puntos $D(d_1,d_2,d_3), A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ son:

$$R / \begin{cases} x_1 = \lambda(a_1 - d_1) + \mu(b_1 - d_1) + d_1 = (1-\lambda-\mu)d_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda(a_2 - d_2) + \mu(b_2 - d_2) + d_2 = (1-\lambda-\mu)d_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 = \lambda(a_3 - d_3) + \mu(b_3 - d_3) + d_3 = (1-\lambda-\mu)d_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda,\mu \in \mathbf{R}$$

Si se hacen $\mu_1 = 1 - \lambda - \mu$, $\mu_2 = \lambda$ y $\mu_3 = \mu$, resultan las denominadas "ecuaciones afines del plano π".

$$R / \begin{cases} x_1 = \mu_1 d_1 + \mu_2 a_1 + \mu_3 b_1 \\ x_2 = \mu_1 d_2 + \mu_2 a_2 + \mu_3 b_2 \\ x_3 = \mu_1 d_1 + \mu_2 a_3 + \mu_3 b_3 \\ 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \end{cases} \quad \text{con } \mu_1,\mu_2,\mu_3 \in \mathbf{R}$$

La interpretación de estas ecuaciones es que el vector $\vec{X}(x_1,x_2,x_3,1)$ es combinación lineal de los vectores $D\vec{A}(a_1-d_1, a_2-d_2, a_3-d_3, 1)$ y $D\vec{B}(b_1-d_1, b_2-d_2,$ $, b_3-d_3, 1)$.

$$\Pi / \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6.2.3 Posiciones Relativas

6.2.3.1. Posiciones relativas de dos rectas

Sean las rectas R_1 y R_2 del espacio afín $\mathbf{R}^3$ definidas por sus ecuaciones

$$\mathrm{R}_1/\begin{cases}A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1=0\\A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2=0\end{cases}\quad \text{y} \quad \mathrm{R}_2/\begin{cases}A_3x_1+B_3x_2+C_3x_3+D_3=0\\A_4x_1+B_4x_2+C_4x_3+D_4=0\end{cases}$$

Para realizar el análisis correspondiente se debe estudiar la variedad lineal afín $\mathrm{R}_1\bigcap\mathrm{R}_2$ que se define por las ecuaciones:

$$\mathrm{R}_1\bigcap\mathrm{R}_2\begin{cases}A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1=0\\A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2=0\\A_3x_1+B_3x_2+C_3x_3+D_3=0\\A_4x_1+B_4x_2+C_4x_3+D_4=0\end{cases}\qquad(10)$$

El sistema de ecuaciones lineales (10) puede ser

a) COMPATIBLE Y DETERMINADO. Las rectas R_1 y R_2 tienen infinitos puntos en común, por tanto, "son coincidentes".
b) COMPATIBLE E INDETERMINADO. Las rectas R_1 y R_2 "se cortan" en un punto que se obtiene resolviendo el sistema (10).
c) INCOMPATIBLE. Los espacios vectoriales de ambas rectas son de dimensión uno, entonces o son o no son coincidentes.

- Si son coincidentes ocurre que $\mathrm{Rango}\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_1 & B_3 & C_3\\A_2 & B_4 & C_4\end{pmatrix}=2$

  Las rectas R_1 y R_2 "son paralelas"

- Si son coincidentes ocurre que $\mathrm{Rango}\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_1 & B_3 & C_3\\A_2 & B_4 & C_4\end{pmatrix}=3$

  Las rectas R_1 y R_2 "se cruzan"

6.2.3.2. Posiciones relativas de dos planos

Sean los planos Π_1 y Π_2 del espacio afín $\mathbf{R}^3$ definidas por sus ecuaciones

$$\Pi_1/\{A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1=0 \qquad y \qquad \Pi_2/\{A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2=0$$

Para realizar el análisis correspondiente se debe estudiar la variedad lineal afín $\Pi_1 \cap \Pi_2$ que se define por las ecuaciones:

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \begin{cases} A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1=0 \\ A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2=0 \end{cases} \qquad (11)$$

El sistema de ecuaciones lineales (10) puede ser

a) COMPATIBLE E INDETERMINADO

- $\text{Rango}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}=2$. La intersección de Π_1 y Π_2 es una "recta R" cuyas ecuaciones vienen dadas por (11).
- $\text{Rango}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}=1$. Los planos Π_1 y Π_2 "son coincidentes".

b) INCOMPATIBLE

$\text{Rango}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}=1$. Los planos Π_1 y Π_2 "son paralelos".

HAZ DE PLANOS

Se llama "haz de planos" determinado por π_1 y π_2 siendo éstos los planos $\Pi_1/A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1=0$, $\Pi_2/A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2=0$,
al conjunto definido por $A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1+\lambda\left(A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2\right)=0$

6.2.3.2. Posiciones relativas entre recta y plano

Sean la recta R y el plano π de ecuaciones

$$R/\begin{cases} A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1=0 \\ A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2=0 \end{cases} \qquad y \qquad \Pi/\{A_3x_1+B_3x_2+C_3x_3+D_3=0$$

Como en los casos anteriores se estudia la variedad lineal afín $R \cap \Pi$ definida por

$$R \cap \Pi / \begin{cases} A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3+D_1=0 \\ A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3+D_2=0 \\ A_3x_1+B_3x_2+C_3x_3+D_3=0 \end{cases} \qquad (12)$$

En el sistema de ecuaciones lineales (12) puede ser

a) COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)
La intersección es un punto que se obtiene resolviendo el sistema. Se expresa diciendo la recta $\mathbf{R}$ y el plano $\mathbf{\Pi}$ "se cortan" en un punto.

b) COMPATIBLE INDETERMINADO
Esto significa que el sistema (12) debe tener dos ecuaciones y tres incógnitas. Para que esto suceda la tercera ecuación será combinación lineal de las dos primeras, por tanto, el plano Π pertenece al haz de planos que contiene a la recta R. Entonces $\mathrm{R} \subset \Pi$, luego la recta y el plano son "incidentes".

c) INCOMPATIBLE. Para ello

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2 \quad , \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3$$

Entonces se puede decir que $\mathrm{R} \cap \Pi = \{\theta\}$, luego R y Π **"**son paralelos".