4. APLICACIONES LINEALES

4. APLICACIONES LINEALES

4.1. DEFINICION DE APLICACIÓN LINEAL

Sean los espacios vectoriales $\left[(E,+),(k,+,\times),\circ\right]$ y $\left[(F,+),(k,+,\times),\circ\right]$ definidos sobre un cuerpo k. El espacio vectorial E se llama espacio origen o de salida de la aplicación lineal f. Por otra parte, F es el espacio final o de llegada o imagen de la aplicación lineal f.

Se denomina aplicación lineal "f", morfismo u homomorfismo entre espacios vectoriales a toda aplicación

$$\begin{aligned} f:E&\to F \\ \vec{x}&\to f(\vec{x}) \end{aligned}$$

que cumple la siguiente condición:

$$\forall \vec{x},\vec{y}\in E \wedge \forall \alpha,\beta\in k$$
$$f(\alpha\circ\vec{x}+\beta\circ\vec{y})=\alpha\circ f(\vec{x})+\beta\circ f(\vec{y})$$

Esta condición es equivalente a:

$$1.\ f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$$
$$2.\ f(\alpha\circ\vec{x})=\alpha\circ f(\vec{x})$$

condiciones que se obtienen en los casos $\alpha=\beta=1$ (la primera) y $\beta=0$ (la segunda)

4.2. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean dos espacios vectoriales E y F definidos sobre un cuerpo k de dimensiones $\dim(E)=n$ y $\dim(F)=m$ y $f:E\to F$ una aplicación lineal.

Dadas dos bases $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}$ de E y $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m\}$ de F, se define matriz asociada a la aplicación lineal f respecto a las bases U de E y V de F, a la matriz denotada por $A=(f)_{U,V}$ cuyos elementos son las imágenes de los vectores de una base, como la U del espacio vectorial E, calculadas respecto a la base V.

$$A=(f)_{U,V}=\left(f(\vec{u}_1),f(\vec{u}_2),\ldots,f(\vec{u}_n)\right)_{U,V}$$

$$(f)_{U,V}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{U,V}$$

donde

$$f(\vec{u}_1)_V = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_V, \ f(\vec{u}_2)_V = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}_V, \ \ldots\ldots, \ f(\vec{u}_n)_V = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}_V$$

La columna " i " de la matriz $A = (f)_{U,V}$ corresponde a las coordenadas del vector $f(\vec{u}_i)$ calculadas respecto a la base V.

<u>Propiedades de las matrices asociadas a una aplicación lineal</u>

Sean los espacios vectoriales $\left[(E,+),(k,+,\times),\circ\right]$ y $\left[(F,+),(k,+,\times),\circ\right]$ definidos sobre un cuerpo k y U, T dos bases del espacio vectorial E y V, W dos bases de F y la aplicación lineal $f: E \to F$.

a) La igualdad

$$y = f(\vec{x})$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2p} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{3p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En notación abreviada $(\vec{y}) = \left[f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3), \ldots\ldots, f(\vec{u}_p)\right]_{U,V} (\vec{x})_U$

Esta igualdad permite calcular la imagen $\vec{y} = f(\vec{x}) \in F$ de un vector $\vec{x} \in E$.

Esta imagen es igual: "al producto de dos matrices. La primera es la matriz asociada a l aplicación lineal *f* entre las bases U y V, la segunda es la matriz de las componentes del vector $\vec{\mathbf{x}}$ respecto a la base U".

En notación abreviada $(\vec{y})_V = \left[f(\vec{x})\right]_V = (f)_{U,V} (\vec{x})_U$

b) $(\mathbf{f})_{\mathbf{T,W}} = (\mathbf{V})_{\mathbf{W}} \cdot (\mathbf{f})_{\mathbf{U,V}} \cdot (\mathbf{T})_{\mathbf{U}}$

Siendo $(T)_U$ la matriz de cambio de base de T a U en el espacio vectorial E y $(V)_W$ la matriz de de cambio de base de V a W en el espacio vectorial F.

4.3. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dados los espacios vectoriales $\left[(\mathrm{E},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ\right]$, $\left[(\mathrm{F},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ\right]$ y la aplicación lineal $f : E \to F$, se definen:

Núcleo de f al conjunto:

$$\mathrm{N}(f)=\mathrm{Ker}(f)=\left\{\vec{x}\in E \ / \ f(\vec{x})=\vec{0}_F\right\}=f^{-1}\left(\vec{0}_F\right)$$

Imagen de f al conjunto:

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{f(\vec{x})\in F \ / \ \vec{x}\in E\right\}=f(E)$$

<u>Consecuencias</u>

Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Entonces

a) Si A es un subespacio vectorial de E $(\mathbf{A}\subset\mathbf{E})$ entonces $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ es subespacio de F, $\left[\mathbf{f}(\mathbf{A})\subset\mathbf{F}\right]$

En consecuencia, como E es un espacio vectorial entonces $\mathrm{Im}(f)=f(E)$ es un subespacio vectorial de F.

b) Si B es un subespacio de F entonces $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B})$ es subespacio vectorial de E.

Puesto que $\mathrm{N}(f)=f^{-1}\left(\vec{0}_F\right)$ y $\left\{\vec{0}_F\right\}$ es un subespacio vectorial de F, entonces se cumple que $\mathrm{N}(f)$ es un subespacio vectorial de E.

c) Si U es una base de del subespacio vectorial A entonces $\mathbf{f}(\mathbf{U})$ es una base del subespacio vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{A})$.

En consecuencia, elegida una base U del espacio vectorial E, entonces $f(U)$ es una base de $f(E)=\mathrm{Im}(f)$.

d) Si E y F son espacios vectoriales de dimensión finita: $\mathbf{dim}(\mathbf{E}) = \mathbf{dim}(\mathbf{F}) = \mathbf{n}$, entonces: $\mathbf{dim}\left[\mathbf{N}(\mathbf{f})\right]+\mathbf{dim}\left[\mathbf{Im}(\mathbf{f})\right] = \mathbf{n}$.

Cálculo de los subespacios núcleo e imagen de una aplicación lineal

Para calcular los subespacios vectoriales $\mathrm{N}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$, asociados a una aplicación lineal entre espacios vectoriales finitos, $f : E \to F$ se aplican los siguientes métodos.

Se eligen dos bases: U una base de E y V base de F. Se halla $(f)_{U,V}$ matriz asociada a f en las bases U y V.

<u>Cálculo de $N(f)$</u>

Las ecuaciones del $\mathrm{N}(f)$ se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Una base del subespacio vectorial de soluciones de dicho sistema es una base del $\mathrm{N}(\mathrm{f})$.

Cuando el $\mathrm{N}(\mathrm{f})=\{\vec{0}\}$ entonces la aplicación f es INYECTIVA.

Cálculo de $Im(f)$

En primer lugar se obtiene la dimensión de $\mathrm{Im}(\mathrm{f})$ utilizando la ecuación dimensional $\dim[\mathrm{N}(\mathrm{f})]+\dim[\mathrm{Im}(\mathrm{f})]=\dim(\mathrm{E})$.

Una base de $\mathrm{Im}(\mathrm{f})$ se obtiene a partir de las columnas de $(\mathrm{f})_{\mathrm{U,V}}$, que son precisamente las imágenes de los vectores de una base de E: $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{u}}_1)_{\mathrm{V}}, \mathrm{f}(\vec{\mathrm{u}}_2)_{\mathrm{V}}, \ldots, \mathrm{f}(\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{n}})_{\mathrm{V}}$. Esta afirmación es consecuencia del apartado 3 del apartado 4.

Cuando la $\dim[\mathrm{Im}(\mathrm{f})]=\dim(\mathrm{F})$ entonces la aplicación f es SUPRAYECTIVA o SOBREYECTIVA.

4.4 CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES

a) Cuando $\mathrm{E}\neq\mathrm{F}$ y la aplicación lineal f es inyectiva, a f se la llama MONOMORFISMO.
b) Cuando $\mathrm{E}\neq\mathrm{F}$ y la aplicación lineal f es suprayectiva o sobreyectiva , a f se la llama EPIMORFISMO.
c) Cuando $\mathrm{E}\neq\mathrm{F}$ y la aplicación lineal f es biyectiva, a f se la llama ISOMORFISMO. Entonces se dice que los espacios vectoriales E y F son isomorfos.
d) Cuando $\mathrm{E}=\mathrm{F}$ y la aplicación lineal f es inyectiva o suprayectiva, a f se la llama ENDOMORFISMO.
e) Cuando $\mathrm{E}=\mathrm{F}$ y la aplicación lineal f es biyectiva, a f se la llama AUTOMORFISMO.

4.5. OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES

4.5.1. Suma de aplicaciones lineales

Sean los espacios vectoriales $[(\mathrm{E},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ]$ y $[(\mathrm{F},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ]$ una base U de E y otra V de F y las aplicaciones lineales "f" y "g" de E en F.

La aplicación $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ es la aplicación lineal de E en F dada por

$$(f+g)(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x})\ \forall\vec{x}\ \in E$$

A $(f+g)$ se le llama aplicación lineal suma de las aplicaciones lineales *f* y *g*.

El conjunto $[(\mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),+),(\mathrm{k},+,\times),\circ]$ es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales E y F.

La matriz de la aplicación lineal suma de dos aplicaciones "f " y "g" es "la suma de las matrices asociadas" a las aplicaciones lineales de f y de g entre las bases U y V.

$$(f+g)_{U,V} = (f)_{U,V} + (g)_{U,V}$$

4.5.2. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean los espacios vectoriales $\left[(\mathrm{E},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ\right]$ y $\left[(\mathrm{F},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ\right]$ una base U de E y otra V de F y la aplicación lineal "f" de E en F y sea el escalar $\alpha\in \mathrm{k}$.

Se denomina producto del escalar α por la aplicación lineal "f" a la aplicación lineal que a cada vector $\vec{\mathbf{x}}\in \mathbf{E}$ hace corresponder $\boldsymbol{\alpha}\left[\mathbf{f}(\vec{\mathbf{x}})\right]\in \mathbf{F}$. Esta aplicación lineal se la denota por $\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{f}$. Entonces:

$$\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{f}(\vec{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\alpha}\left[\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\right] \ , \ \forall\vec{\mathbf{x}}\in\mathbf{E}\wedge\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{k}$$

La matriz del producto del escalar α por la aplicación lineal f es el producto de α por la matriz asociada a f entre las bases U y V.

$$(\alpha f)_{U,V} = \alpha(f)_{U,V}$$

4.5.3. PRODUCTO DE APLICACIONES LINEALES

Sean tres espacios vectoriales $\left[(\mathrm{E},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ\right]$, $\left[(\mathrm{F},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ\right]$ y $\left[(\mathrm{G},+),(\mathrm{k},+,\times),\circ\right]$ y sean las bases $\mathrm{U}=\{\vec{\mathrm{u}}_1,\vec{\mathrm{u}}_2,\ldots\ldots,\vec{\mathrm{u}}_\mathrm{p}\}\in\mathrm{E}$, $\mathrm{V}=\{\vec{\mathrm{v}}_1,\vec{\mathrm{v}}_2,\ldots\ldots,\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{n}\}\in\mathrm{F}$ y $\mathrm{W}=\{\vec{\mathrm{w}}_1,\vec{\mathrm{w}}_2,\ldots\ldots,\vec{\mathrm{w}}_\mathrm{m}\}\in\mathrm{G}$. Sean las aplicaciones lineales $f\colon E\to F$ y $g\colon F\to G$,

Se denomina composición o producto de las aplicaciones "f" y "g" *a la aplicación* $g°f$ *de E en G que a un vector* $\vec{\mathbf{x}}\in\mathbf{E}$ *hace corresponder* $\mathbf{g}\left[\mathbf{f}(\vec{\mathbf{x}})\right]$.

Se debe observar que la expresión $g°f(\vec{x})$ se escribe en orden inverso a como se aplica. Primero se aplica al vector $\vec{\mathrm{x}}$ la aplicación *f*, dando como resultado la imagen $\mathrm{y}=\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\in\mathrm{F}$ y a esta imagen considerada como nuevo origen, se le somete a la aplicación *g* resultando la imagen final $\mathrm{h}(\vec{\mathrm{x}})=\mathrm{g}\left[\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\right]\in\mathrm{G}$.

La aplicación $\mathrm{h}:\vec{\mathrm{x}}\ \to\ \mathrm{h}(\vec{\mathrm{x}})=\mathrm{g}\left[\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\right]$ recibe el nombre de "aplicación compuesta o producto" de las aplicaciones lineales $g°f$.

La composición o producto de dos o varias aplicaciones lineales es una aplicación lineal.

Es de destacar que el producto de aplicaciones no es conmutativo: $g°f \neq f°g$. En la práctica puede ocurrir que una de las dos aplicaciones $g°f$ ó $f°g$ no exista.

La matriz de un producto de aplicaciones lineales es igual al producto de las matrices asociadas a ellas en las bases consideradas.

$$(g°f)_{U,V} = (g)_{U,V} \cdot (f)_{U,V}$$