3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3. MATRICES

3.1. DEFINICIONES PREVIAS

Se denomina sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas a un conjunto de ecuaciones definido por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

El sistema de ecuaciones lineales anterior, también se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad [2]$$

siendo a_{ij} $(1 \le i \le m)$ y $(1 \le j \le n)$ y b_i números reales conocidos.

La expresión $[2]$ se llama forma matricial del sistema, en notación reducida el sistema se expresa por $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

$A = a_{ij} \rightarrow$ es una matriz de orden $(m \times n)$, se llama matriz de coeficientes.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ó $\vec{b}^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$ es un vector de tamaño "m" que se denomina vector de términos independientes.

$[A/b] \rightarrow$ es una matriz de orden $[m,(n+1)]$ recibe el nombre de matiz aumentada o matriz ampliada.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ó $\vec{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ es el vector de incógnitas.

Las componentes de este vector $\vec{x}$ son desconocidas y se deben calcular en el caso de que existan, resolviendo el sistema.

Dado un sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ se presentan dos cuestiones.

1. El sistema propuesto ¿tiene solución?
2. Si tiene solución, ¿cuántas tiene?

Si tiene solución puede ocurrir que sea única o que se obtenga una expresión en función de varios parámetros, en consecuencia infinitas soluciones.

Ambos problemas se resuelven mediante la aplicación directa del teorema de Rouchè-Frobenius.

Sea el sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas. Se extrae de él la matriz aumentada $[A/b]$ formada por las "n" columnas de la matriz A y la única columna del vector $\vec{b}$.

Los sistemas se pueden clasificar de dos formas, bien atendiendo a la naturaleza del término independiente $\vec{b}$, o teniendo en cuenta la existencia de soluciones.

Clasificación de los sistemas

- Si el vector $\vec{b} \neq \vec{0}$ el sistema se denomina no homogéneo o heterogéneo
- Si el vector $\vec{b} = \vec{0}$ el sistema se denomina homogéneo
- Si el sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admite solución se llama compatible
- Si el sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ no admite solución se llama incompatible
- Si el sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admite solución única se llama compatible y determinado
- Si el sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admite más de una solución se llama compatible e indeterminado

3.2. TEOREMA DE ROUCHÈ-FROBENIUS

a) Si $\vec{b} \neq \vec{0}$, el sistema:

- Tiene solución única ssi el rango$(A) = \text{rango}(A/b) = n$ (nº de incógnitas).

- Tiene infinitas soluciones ssi el rango$(A) = \text{rango}(A/b) = r < n$.

- No tiene soluciones ssi el rango$(A) < \text{rango}(A/b)$.

b) Si $\vec{b} = \vec{0}$, el sistema:

- Tiene solución única ssi el rango $(A) = n$. La solución en este caso es $\vec{x}^T = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) = \vec{0} = (0,0,0,\ldots\ldots,0)$ denominada trivial o impropia.

- Tiene infinitas soluciones ssi el $\text{rango}(A) = r < n$, es decir, si el rango de la matriz A es inferior al número de incógnitas.

3.3. MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE GAUSS

Sea el sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas de la forma $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ y se considera la matriz aumentada $[A/b]$, a la que se aplican operaciones elementales por filas en la que existan ceros por encima y por debajo de la diagonal principal.

Se denomina operación elemental por líneas (filas o columnas) de una matriz A, a cada una de las siguientes operaciones:

1. Sumar a una línea (fila o columna) de A un múltiplo de otra línea (fila o columna).
2. Multiplicar una línea (fila o columna) de A por un escalar no nulo
3. Intercambiar entre sí dos líneas (fila o columna) de A

La resolución de un sistema por este método comporta dos fases: la primera se llama fase de eliminación progresiva y la segunda fase de sustitución regresiva.

<u>1. Fase de eliminación progresiva</u>

Sea el sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots + a_{n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

donde la matriz aumentada es

$$[A/b] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{31} & \cdots & a_{3n} & \vdots & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

Se supone que $a_{11} \neq 0$, entonces se suma a la segunda ecuación la primera multiplicada por $(-a_{21})/a_{11}$, a la tercera ecuación la primera multiplicada por $(-a_{31})/a_{11}$;………, a la m-ésima se le suma la primera ecuación multiplicada por $(-a_{m1})/a_{11}$.

Se obtiene un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad f_{22}x_2 + \ldots\ldots + f_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad f_{32}x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n = c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad f_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad [2]$$

Este proceso se vuelve a aplicar al sistema anterior.

Se supone que $f_{22} \neq 0$ entonces se suma a la tercera ecuación la segunda ecuación multiplicada por $(-f_{32})/f_{22}$; a la cuarta la segunda multiplicada por $(-f_{42})/f_{22}$; ………, a la m-ésima se le suma la segunda multiplicada por $(-f_{m2})/f_{22}$.

La aplicación reiterada del método reductivo expuesto lleva a una de estas tres posibilidades:

CASO 1

Se obtiene un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad g_{22}x_2 + \ldots + f_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad \ddots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad h_{mn}x_n = d_m \end{cases} \qquad [3]$$

<u>2. Fase de sustitución regresiva</u>

A continuación, en la fase de sustitución regresiva, se expone la forma de calcular los valores de las incógnitas: $x_m, x_{m-1}, \ldots\ldots, x_2, x_1$

Sean $a_{11} \neq 0, g_{22} \neq 0, \ldots\ldots, h_{nn} \neq 0$. Entonces la última ecuación permite el cálculo de $x_n = d_m / h_{mn}$. La sustitución de este valor en la $(m-1)-$ésima ecuación, permite calcular x_{n-1}, prosiguiendo estas sustituciones hacia atrás se llega a la primera ecuación que permite hallar x_1.

El sistema en este caso es COMPATIBLE y DETERMINADO.

Si alguno de los valores: $a_{11}, g_{22}, \ldots, h_{mn}$ fuese nulo, puede suceder que al aplicar el algoritmo y llegar a la ecuación que tiene el coeficiente nulo se obtenga o una "identidad" o una "contradicción".

En el caso de identidad el sistema que se obtiene será COMPATIBLE e INDETERMINADO, ya que la incógnita cuyo coeficiente se anula puede tomar cualquier valor $(\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n)$.

En el caso de contradicción (un número igual a otro que sea distinto), el sistema es INCOMPATIBLE.

CASO 2

Puede ocurrir que en el sistema $[1]$ sobren algunas ecuaciones. Se obtiene un sistema que contiene al sistema del tipo dado en $[3]$ al que se le aplica lo expuesto en el caso 1ª, y además tendría otras ecuaciones. Se debe comprobar que las soluciones obtenidas en $[3]$, verifican el resto de ecuaciones.

CASO 3

Si al aplicar el algoritmo faltan ecuaciones, se ha obtenido un sistema del tipo $[3]$ en el que la última ecuación contiene varias incógnitas (en lugar de una sola). Entonces una cualquiera de ellas se despeja en función de las restantes y se aplica el método dado en el caso 1º. En este caso el sistema puede ser COMPATIBLE INDETERMINADO o INCOMPATIBLE.

3.4. MÉTODO DE CHOLESKY

Este método se usa para resolver sistemas de "n" ecuaciones lineales con "n" incógnitas. Se distinguen dos casos, que la matriz del sistema sea o no simétrica.

a) La matriz A es cuadrada y simétrica.

Sea el sistema $Ax = b$ (1) cuya matriz A es cuadrada, simétrica con todos los menores angulares no nulos.

Los menores citados se obtienen como determinantes formados con "k" filas y "k" columnas de la matriz A, para k variando desde 1 hasta n, siendo $n = \text{número de filas y columnas de la matriz A}$.

Se demuestra que $\exists\ T = (t_{ij})$, matriz triangular superior tal que se cumple:

$$A = T^T \cdot T$$

siendo T^T la matriz traspuesta de T.

$$Ax = b \Leftrightarrow (T^T T)x = b \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} Tx = y & (2) \\ T^T y = b & (3) \end{Bmatrix}$$

La matriz T no es única. Puede garantizarse la unicidad si se impone una condición adicional.

Resolver el sistema $Ax = b$ equivale a resolver los sistemas (2) y (3). Primero el sistema (2) y después el sistema (3). Las matrices (2) y (3) son triangular inferior y superior respectivamente.

b) La matriz A es cuadrada, no simétrica con menores angulares no nulos.

Existen una matriz triangular inferior $B=\left(b_{ij}\right)$ y otra triangular superior $C=\left(c_{ij}\right)$ con "1" de elementos en la diagonal principal que cumplen:

$$A = B \cdot C$$

Entonces

$$Ax = b \;\; (1) \Leftrightarrow (B \cdot C)\, x = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} Cx = y & (2) \\ By = b & (3) \end{array} \right\}$$

Para resolver el sistema $Ax = b \;\; (1)$ en ambos casos I y II se siguen las dos etapas siguientes que se denominan "método de Cholesky".

- La matriz A es cuadrada con menores angulares no nulos
  (1a). Si A es simétrica se tiene una matriz T triangular superior / $A = T^T \cdot T$
  (1b). Si A no es simétrica, se obtienen dos matrices: una triangular inferior $B=\left(b_{ij}\right)$ y otra triangular superior con elementos "1" en la diagonal principal / $A = B \cdot C$. Para conseguirlo basta con realizar la multiplicación $B \cdot C$ e igualar sus coeficientes a los de la matriz A y resolver el sistema que resulte.
- Resolver el sistema (2): $T^T y = b$ o el $By = b$. En ambos casos se obtiene un vector de soluciones denominado Y_0.
- Se resuelve el sistema: $Tx = Y_0$ o el $Cx = Y_0$, siendo Y_0 el vector obtenido en el apartado anterior.
  La solución obtenida en cualquiera de los sistemas anteriores es válida para el sistema inicial $Ax = b$.

La descomposición dada en el paso 1 de este método se puede sustituir por el producto entre una matriz triangular inferior y otra superior. Es el caso de la "factorización LU".