2. MATRICES

2. MATRICES

2.1. CONCEPTO DE MATRIZ

Una matriz real de orden, tamaño, tipo o dimensión $(m\times n)$ es una tabla o disposición bidimensional ordenada de números reales, dispuestos en "m" filas horizontales y en "n" columnas verticales.

$$A \equiv \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{(m\times n)}(\mathbf{R}).$$

En notación expandida también se escribe así

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $m=1$a la matriz se la llama *matriz fila.* Si $n=1$*matriz columna.* Cuando $m\neq n$ la matriz se denomina *rectangular.* La matriz que tiene igual número de filas que de columnas $m=n$, recibe el nombre de *matriz cuadrada.*

El conjunto de las matrices cuadradas de orden "n" se representa por $M_n \in (\mathbf{R})$.

Dos matrices son iguales si son del mismo orden y los elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.

Cada fila o columna de una matriz se puede considerar como un *vector fila* o un *vector columna.*

En efecto, la fila "i-ésima" de la matriz A da lugar al vector fila $\vec{a}_i$.

$$\vec{a}_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ii}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}\right).$$

La columna "j-ésima" es el vector $\vec{a}_j$ de componentes.

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

2.2. TIPOS DE MATRICES

a) Matriz triangular superior

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es triangular superior si todos los elementos de A situados debajo de la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i > j\left(i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\right)$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es triangular inferior si todos los elementos de A situados por encima de la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i < j\left(i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\right)$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices triangulares

1) La suma de matrices triangulares superiores $A + B$ es una matriz triangular superior

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2) El producto de matrices triangulares superiores $A \cdot B$ es una matriz triangular superior

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 11 & 1 & 24 \end{pmatrix}$$

3) Si una matriz triangular superior A tiene inversa, A^{-1} es también triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 11/15 \\ 0 & 1/3 & -4/15 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

c) Matriz diagonal

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es diagonal si es a la vez triangular superior y triangular inferior.

Utilizando la notación de Kronecker.

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 \text{ si } i = j \\ = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$a_{ij} = \delta_{ij} \cdot d_i$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con $d_i \in \mathbf{R}$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Matriz traspuesta

Sea $A \in M_{(m \times n)}(\mathbf{R})$.

Matriz traspuesta $A^T \in M_{(m \times n)}(\mathbf{R})$ es la matriz cuyas filas son las columnas de la matriz A y viceversa.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices traspuestas

1) La traspuesta de la traspuesta de una matriz es ella misma

$$\left(A^T\right)^T = A$$

2) La traspuesta del producto de un escalar por una matriz es igual al escalar por la traspuesta de la matriz

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

3) La traspuesta de la suma o diferencia de matrices es igual a la suma o la diferencia de las traspuestas

$$(A \pm B \pm C \pm \cdots\cdots \pm P)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \cdots\cdots \pm P^T$$

4) La traspuesta del producto de matrices es igual al producto de las traspuestas permutando los factores.

$$(A \cdot B \cdot C \cdot \ldots\ldots \cdot P)^T = P^T \cdot \ldots\ldots \cdot C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

5) El rango de una matriz es igual que el rango de su traspuesta

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A^T\right)$$

6) Si existe la matriz inversa de A, entonces la inversa de la traspuesta es igual a la traspuesta de la inversa

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

7) Si el producto de una matriz por su traspuesta es igual a la matriz nula, entonces la matriz es nula de orden $(m \times n)$.

$$\text{Si } A \cdot A^T = 0 \Rightarrow A = 0$$

e) Matriz simétrica

Una matriz cuadrada A de orden n es simétrica si coincide con su traspuesta.

$$A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \\ -6 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices simétricas

1) La suma de dos matrices simétricas es una matriz simétrica
Si *A* y *B* son simétricas $\rightarrow A + B$ es simétrica
1. El producto de un escalar por una matriz simétrica es otra matriz simétrica
Si *A* es simétrica $\rightarrow \alpha A$ es simétrica $\forall \alpha \in \mathbf{R}$
2. Si una matriz simétrica tiene inversa, esta es simétrica
A (simétrica) $\rightarrow \exists ¡ A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ es simétrica
3. En general $A \cdot B$ y $B \cdot A$ no han de ser simétricas aunque *A* y *B* lo sean

f) Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada A de orden n es antisimétrica si sus matrices opuesta y traspuesta coinciden.

$$-A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \text{ para todo } i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices antisimétricas

1) Si varias matrices son antisimétricas su suma también lo es
Si $A, B, C, \dots, P$ son antisimétricas $\Rightarrow A + B + C + \dots + P$ es antisimétrica
2) El producto de un escalar por una matriz antisimétrica es otra matriz antisimétrica.
Si *A* es antisimétrica $\rightarrow \alpha A$ es antisimétrica $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

3) Si dos matrices antisimétricas cumplen la propiedad conmutativa del producto de matrices, entonces $A \cdot B$ es simétrica.
   Si *A* y *B* son antisimétricas $\rightarrow A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow A \cdot B$ es simétrica.
   Esta propiedad no es cierta si no se cumple la conmutatividad del producto de matrices $(A \cdot B \neq B \cdot A)$
4) Si una matriz antisimétrica tiene inversa, esta es antisimétrica.

$$A \text{ (antisimétrica)} \rightarrow \exists ¡A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \text{es antisimétrica}$$

g) Matriz ortogonal

Se dice que una matriz cuadrada A de orden n es ortogonal si se verifica que

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$$

o lo que es lo mismo, que las columnas de la matriz A son vectores ortogonales dos a dos y de módulo igual a 1.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2; \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

luego la matriz A es ortogonal

Propiedades de las matrices ortogonales

1) Si A y B son ortogonales y se cumple que $A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow$ entonces $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son matrices ortogonales.
2) Si A y B son matrices ortogonales, en general, la matriz $A + B$ no es ortogonal.
3) Si A es una matriz ortogonal y $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, la matriz αA no es ortogonal.
4) Si una matriz es ortogonal y admite inversa, entonces

$$A^{-1} = A^T$$

Esta última propiedad significa que si una matriz A es ortogonal entonces es inversible.

5) Si una matriz A es ortogonal su determinante $|A| = \pm 1$

h) Matriz idempotente

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es idempotente si y sólo se verifica $A \cdot A = A^2 = A$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A=A^2=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=A$$

Propiedades de las matrices idempotentes

1) La matriz $B\cdot C$ es idempotente únicamente si se cumple propiedad la conmutativa respecto del producto de matrices $B\cdot C=C\cdot B$

2) Si *B* es una matriz idempotente, la matriz $I-B$ también es idempotente aunque $B-I$ en general no lo es

i) <u>Matriz nilpotente</u>

Una matriz cuadrada A de orden n se denomina nilpotente si y sólo si se cumple que $A\cdot A=A^2=0_n$.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\ A\cdot A=A^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_2;\ |A|=\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}=0$$

Propiedades de las matrices nilpotentes

1) Si una matriz A es nilpotente su determinante $|A|=0$.
2) Si la matriz A es nilpotente y I_n-A es invertible, su inversa es igual

$$(I_n-A)^{-1}=I_n+A$$

j) <u>Matrices unipotentes</u>

Una matriz A de orden n se llama unipotente si se verifica que $A\cdot A=A^2=I_n$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A=A^2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\end{vmatrix}=-1$$

Propiedad de las matrices unipotentes

1) Si una matriz A es unipotente entonces su determinante $|A|=\pm1$

2.3. OPERACIONES CON MATRICES

2.3.1. Producto de una matriz por un escalar

Sea una matriz $A=(a_{ij})\in M_{(m,n)}$ y un escalar $\alpha\in k$. El producto del escalar α por la matriz $A_{(m,n)}$ es una matriz del mismo orden y definida por $\alpha A_{(m,n)}=(\alpha\cdot a_{ij})$.

2.3.2. Suma de matrices

Sean las matrices $A_{(m,n)}=(a_{ij})$ y $B_{(m,n)}=(b_{ij})$. Su suma es otra matriz de orden (m,n) definida por $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$.

Para que dos matrices se puedan sumar deben ser del mismo orden, es decir, equidimensionales.

Las propiedades de la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz se derivan de la estructura de espacio vectorial de $\left[\left(M_{(m,n)},+\right),(k,+,\times),\circ\right]$.

2.3.3. Producto de dos matrices

Sean las matrices $A_{(m,p)}=(a_{ij})$ y $B_{(p,n)}=(b_{ij})$. El producto de ambas matrices $A_{(m,p)}\cdot B_{(p,n)}$ es otra matriz $C_{(m,n)}=(c_{ij})$ en la que el término situado en la fila "i" y la columna "j" es el producto escalar canónico de los elementos de la fila i-ésima de la matriz A por los correspondientes elementos de la columna j-ésima de la amtriz B.

$$C_{(m,n)}=(c_{ij})=\sum a_{ik}\cdot b_{kj}\quad \textit{para}\quad \begin{cases} i=1,2,3,\ldots\ldots,m \\ j=1,2,3,\ldots\ldots,n \end{cases}$$

Propiedades del producto de matrices

1) Asociativa $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
2) Distributiva del producto respecto de la suma de matrices por la izquierda $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
3) Distributiva del producto respecto de la suma de matrices por la derecha $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
4) Existencia del elemento neutro (Únicamente en las matrices cuadradas)

$$I_{(m,m)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

5) En algunos casos si existe el elemento simétrico A^{-1} de una matriz dada A

6) En general no se cumple la propiedad conmutativa $A \cdot B \neq B \cdot A$

Se debe hacer notar que al no ser el producto de matrices conmutativo hay que distinguir entre "producto por la derecha" y producto "por la izquierda" de una matriz. En cada caso se debe tener previamente en cuenta la condición para que el producto de matrices sea factible.

2.4. MATRIZ TRASPUESTA

Se denomina matriz traspuesta de una matriz cualquiera A, a la que se obtiene, cambiando las filas por columnas y estas por aquellas sin alterar el orden relativo entre ellas. Se representa más comúnmente por A^T.

Propiedades de la matriz traspuesta

1) La traspuesta de la traspuesta de una matriz dada es ella misma

$$\left(A^T\right)^T = A$$

2) La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las traspuestas de las matrices dadas

$$(A+B+C+\ldots\ldots+M)^T = \left[\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)+\left(c_{ij}\right)+\ldots\ldots+\left(m_{ij}\right)\right]^T = \left[\left(a_{ji}\right)+\left(b_{ji}\right)+\left(c_{ji}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(m_{ji}\right)\right] = \left(a_{ji}\right)+\left(b_{ji}\right)+\left(c_{ji}\right)+\ldots\ldots+\left(m_{ji}\right) = \left(a_{ji}\right)^T+\left(b_{ji}\right)^T+\left(c_{ji}\right)^T+\ldots\ldots+\left(m_{ji}\right)^T =$$

$$= A^T + B^T + C^T + \ldots\ldots + M^T = M^T + \ldots\ldots + C^T + B^T + A^T$$

3) La traspuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las traspuestas permutando el orden de los factores

$$\left[A_{(m\times n)} \cdot B_{(n\times p)} \cdot C_{(p\times q)}\right]^T = C^T_{(q\times p)} \cdot B^T_{(p\times n)} \cdot A^T_{(n\times m)}$$

2.5. MATRIZ ADJUNTA

Se lama matriz adjunta de una matriz cuadrada A y se representa por A^a a la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos de su traspuesta $\left(A^T\right)$ por sus adjuntos correspondientes.

Propiedades de la matriz adjunta

1) Si A es una matriz cuadrada de orden n, se cumple

$$A \cdot A^a = A^a \cdot A = |A| \cdot I_n$$

2) Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces

$$\left|A^a\right| = |A|^{n-1}$$

2.6. MATRIZ INVERSA

2.6.1. Definición y Propiedades

Sea una matriz cuadrada A de orden "n", se dice que A es una matriz invertible, o que existe matriz inversa de la dada, si existe una matriz A^{-1} de orden "n" tal que se cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Es decir, la matriz inversa A^{-1} es el elemento simétrico de la matriz A, respecto a la ley de composición interna "suma de matrices".

Se dice que una "matriz es regular" si es invertible (admite inversa). En caso contrario se dice que la "matriz es singular".

Propiedades de las matrices inversas

1) Si la matriz inversa de A existe, $\exists! A^{-1}$ es única
2) La inversa de la inversa de una matriz es ella misma: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3) Si dos matrices A y B admiten inversa, la matriz inversa del producto de las matrices es igual al producto de las inversas con el orden permutado: $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4) Si la matriz A admite matriz inversa, la matriz inversa de la traspuesta de A es igual a la traspuesta de la inversa de A: $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$
5) Si la matriz A es invertible y se cumple $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow B = C$
6) Si la matriz A es invertible y se cumple $B \cdot A = C \cdot A \Leftrightarrow B = C$

Una aplicación importante de la matriz inversa es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Sea una matriz A *de orden* "n" *que admite matriz inversa* A^{-1}*, el sistema de ecuaciones lineales con* "n" *incógnitas* $A \cdot x = b$ *es COMPATIBLE DETERMINADO cuya solución única es.*

$$A \cdot x = b \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$
$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot x = x$$
$$x = A^{-1} \cdot b$$

2.6.2. Cálculo de la matriz inversa

Para realizar el cálculo de la matriz A se puede utilizar el método de Gauss-Jordan en el que las operaciones elementales transforman la matriz A en la matriz identidad I, estas mismas operaciones transforman a la vez la matriz identidad en la matriz inversa.

<u>Operaciones elementales por filas o columnas</u>

Se denomina operación elemental por filas (columnas) de una matriz A, a las siguientes:

a) Sumar a una fila o columna de A un múltiplo de otra fila o columna
b) Multiplicar a una fila o columna de A por un escalar no nulo

c) Intercambiar entre sí dos filas o dos columnas

Las operaciones elementales se pueden aplicar directamente o utilizando matrices elementales.

Matriz elemental

Sea una matriz E cuadrada de orden n. Se denomina matriz elemental a la que resulta de realizar una operación elemental a la matriz unitaria del mismo orden. La matriz elemental es del mismo tipo que la operación elemental aplicada.

1. Una matriz elemental del tipo I, representada por $E_{kI}(\lambda)$, es una matriz cuyos elementos cumplen:

$$E_{kI}(\lambda) = (e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij} = 1 & \text{si} \quad i = j \\ e_{ij} = \lambda & \text{si} \quad i = k, j = 1 \\ e_{ij} = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, la matriz identidad pero con el elemento $e_{kI} = \lambda$.

2. Una matriz elemental del tipo II, representada por $E_k(\lambda)$, es una matriz cuyos elementos cumplen:

$$E_k(\lambda) = (e_{ij}) = \begin{cases} e_{ii} = 1 & \text{si} \quad i \neq k \\ e_{kk} = \lambda & \text{si} \quad i = k \\ e_{ij} = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, la matriz identidad pero con el elemento e_{kk} de la diagonal igual a λ.

3. Una matriz elemental del tipo III, representada por $P_{kI}(\lambda)$, es una matriz cuyos elementos cumplen:

$$P_{kI}(\lambda) = (p_{ij}) = \begin{cases} p_{ii} = 1 & \text{si} \quad i \neq k,1 \\ p_{kk} = p_{11} = 0 & \\ p_{k1} = p_{1k} = 1 & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, la matriz identidad pero con las filas 1 y k intercambiadas.

Premultiplicar una matriz A por una matriz elemental equivale a realizar una operación elemental por filas sobre A.

TEOREMA

Sean: E una matriz elemental obtenida al aplicar a la matriz identidad una determinada operación elemental, y A una matriz cuadrada del mismo orden.

La matriz $E \cdot A$ *es el resultado de aplicar esa misma operación elemental a las filas de la matriz A.*

Las matrices elementales son invertibles y sus inversas (también son matrices elementales), tienen el efecto de deshacer las operaciones realizadas por estas.

TEOREMA

Las matrices elementales son regulares y sus inversas son:

1. $\left[E_{kl}(\lambda)\right]^{-1} = E_{kl}(-\lambda)$ (Se resta a la fila k la fila l multiplicada por λ)
2. $\left[E_{k}(\lambda)\right]^{-1} = E_{k}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ (multiplica la fila k por $\frac{1}{\lambda}$)
3. $\left(P_{lk}\right)^{-1} = P_{lk}$ (intercambia las filas l y k)

El método de Gauss-Jordan utiliza matrices elementales para desarrollar un algoritmo que permita calcular la inversa de una matriz, a partir de operaciones elementales sobre sus filas.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Sea $A_{(n)}$ una matriz cuadrada y sea $I_{(n)}$ la matriz identidad, ambas del mismo orden. Si $A_{(n)}$ admite inversa $A_{(n)}^{-1}$ se puede transformar en la matriz $I_{(n)}$ mediante operaciones elementales por filas. Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots, E_n$ las matrices elementales que transforman $A_{(n)}$ en $I_{(n)}$, de modo que cada una de ellas corresponda a una operación lineal Se tiene:

$$E_n \cdot \ldots\ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 A_{(n)} = E \cdot A_{(n)} = I_{(n)}$$

donde $E = E_n \cdot \ldots\ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$. Como $A_{(n)}$ es invertible y $E \cdot A_{(n)} = I_{(n)}$ se debe cumplir que $E = A_{(n)}^{-1}$.

La matriz E se obtiene aplicando las mismas operaciones elementales a la matriz $A_{(n)}$.

$$E_n \cdot \ldots\ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 I_{(n)} = E \cdot I_{(n)} = E = A_{(n)}^{-1}$$

Por tanto, las operaciones elementales que transforman la matriz $\mathbf{A}_{(\mathbf{n})}$ en la matriz identidad $\mathbf{I}_{(\mathbf{n})}$ transforman la identidad en la matriz inversa $\mathbf{A}_{(\mathbf{n})}^{-1}$.

Este resultado permite utilizar el denominado "algoritmo de Gauss-Jordan" para calcular la inversa de una matriz $A_{(n)}$.

Operando sobre las filas de la matriz $\left[\mathbf{A}_{(n)}/\mathbf{I}_{(n)}\right]$ de orden $(n,2n)$ se transforma $\mathbf{A}_{(n)}$ en la identidad $\mathbf{I}_{(n)}$ y la identidad en la inversa $\mathbf{A}^{-1}_{(n)}$, resultando finalmente $\left[\mathbf{I}_{(n)}/\mathbf{A}^{-1}_{(n)}\right]$.

Las operaciones por filas se aplican en tres etapas.

1ª ETAPA: GENERAR CEROS POR DEBAJO DE LA DIAGONAL PRINCIPAL

Para hacer un cero en la posición (i,j) en la columna "j", se toma la fila j-ésima como fila pivote (F_j) y se transforma la fila i-ésima (F_i) mediante la operación elemental: $F_i \Leftarrow F_i + x\cdot F_j$ siendo $x = -\dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Si el elemento pivote $a_{jj}=0$ de la "fila pivote (F_j)" entonces la operación elemental no puede realizarse. En ese caso se intercambiará la fila pivote por otra que esté debajo de ella (k)y tal que $a_{kj}\neq 0$, es decir que el nuevo pivote sea distinto de cero, continuando las operaciones elementales.

2ª ETAPA: GENERAR UNOS EN LA DIAGONAL PRINCIPAL

Finalizada la etapa 1, para hacer "un uno" en la diagonal en la posición (i,i) se multiplica la fila i-ésima (F_i) por $F_i \Leftarrow x\cdot F_i$ siendo $x = \dfrac{1}{a_{ii}}$

3ª ETAPA: GENERAR CEROS POR ENCIMA DE LA DIAGONAL PRINCIPAL

Es importante tener en cuenta que se comienza por la última columna, después la penúltima,………, tercera y así hasta llegar a la segunda columna, se realiza igual que en la 1ª etapa.
Para hacer cero el elemento (i,j) situado en la columna "j" se utiliza la fila j-ésima como "fila pivote (F_j)" y se transforma la fila i-ésima con la operación elemental: $F_i \Leftarrow F_i + x\cdot F_j$ siendo $x = -\dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$

2.7. RANGO DE UNA MATRIZ

Cálculo del rango de una matriz mediante determinantes

Sea una matriz cuadrada $A_{(n)}$ se cumple que:

1. $\text{Rango}(A) < n$ ssi, $|A| = 0$
2. $\text{Rango}(A) = n$ ssi, $|A| \neq 0$

Sea una matriz rectangular $A_{(m,n)}$ se cumple que:

1. $\text{Rango}(A) = r < \min\{m, n\}$ ssi, existe al menos una submatriz $A_r \subset A$ de orden $(r, r) / |A_r| \neq 0$ y todas las submatrices de orden $(r+1 \, , \, r+1)$ de A sus determinantes son nulos. A estos últimos determinantes se les llama “menores de orden” $(r+1)$ de A.
2. $\text{Rango}(A) = k = \min\{m, n\}$ ssi, existe al menos una submatriz $A_k \subset A$ de orden $(k, k) \; / \; |A_k| \neq 0$.

Cuando el sistema tenga solución interesará calcularla y para lo que se utilizará algún método idóneo que permita obtenerla. Entre otros existe el llamado método de Gauss que no sólo proporciona la solución sino que indica el número de soluciones que tiene.