1. ESPACIOS VECTORIALES

1.1. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL
- 1.1.1. Definición
- 1.1.2. Ejemplos de espacios vectoriales
- 1.1.3. Propiedades de los espacios vectoriales

1.2. SUBESPACIO VECTORIAL

1.3. SISTEMAS GENERADORES. COMBINACIONES LINEALES
- 1.3.1. Combinaciones lineales

1.4. SISTEMA LIBRE. SISTEMA LIGADO

1.5. RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES

1.6. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL
- 1.6.1. Base de un espacio vectorial
- 1.6.2. Dimensión de un espacio vectorial

1.7. TEOREMA DE LA BASE INCOMPLETA

1.8. OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES
- 1.8.1. Intersección de subespacios
- 1.8.2. Suma de subespacios
- 1.8.3. Suma directa
- 1.8.4. Subespacios suplementarios

1. ESPACIOS VECTORIALES

1.1. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL

1.1.1. Definición

Espacio vectorial es una terna $(\mathrm{E},+,\circ)$ donde E es un conjunto cuyos elementos se llaman "vectores" y dotado de una ley de composición interna que se indica con el signo +, tiene estructura de grupo abeliano.

- La ley de composición interna es asociativa:
  $\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in \mathrm{E}\ ,\ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$
- Existencia del elemento neutro respecto a la ley $(+)$:
  $\forall\vec{x}\in \mathrm{E}\ ,\ \exists!\vec{0}\in \mathrm{E}\ /\ \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$
- Existencia del elemento simétrico (opuesto) respecto a la ley $(+)$:
  $\forall\vec{x}\in \mathrm{E}\ ,\ \exists!(-\vec{x})\in \mathrm{E}\ /\ \vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$
- La ley de composición interna $(+)$ es conmutativa:
  $\forall\vec{x},\vec{y}\in \mathrm{E}\ ,\ \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

El conjunto E está dotado de una ley de composición externa que se denota con el signo $(\circ)$, definida sobre los elementos de un cuerpo k llamados "escalares" y que se cumplen los siguientes axiomas

- La ley $(\circ)$ es distributiva respecto a la suma de vectores:
  $\forall\vec{x},\vec{y}\in \mathrm{E}\ ,\ \forall\lambda\in \mathrm{k}\ ,\ \lambda\circ(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\circ\vec{x}+\lambda\circ\vec{y}$
- La ley $(\circ)$ es distributiva respecto a la suma de escalares:
  $\forall\lambda,\mu\in \mathrm{k}\ ,\ \forall\vec{x}\in \mathrm{E}\ ,\ (\lambda+\mu)\circ\vec{x}=\lambda\circ\vec{x}+\mu\circ\vec{x}$
- La ley $(\circ)$ es asociativa respecto al producto de escalares:
  $\forall\lambda,\mu\in \mathrm{k}\ ,\ \forall\vec{x}\in \mathrm{E}\ ,\ (\alpha\times\beta)\vec{x}=\alpha\circ(\beta\circ\vec{x})$
- Elemento neutro respecto a la ley $(\circ)$:
  $\forall\vec{x}\in \mathrm{E}\ ,\ \exists!\in \mathrm{k}\ ,\ 1\circ\vec{x}=\vec{x}$

Cuando se satisfacen todas estas condiciones se dice que el conjunto E tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo k.

Cuando $k=R$ se dice que el "espacio vectorial es real", si $k=C$ el "espacio vectorial es complejo".

La teoría de los espacios vectoriales es independiente de que esos espacios tengan o no representación geométrica. Por eso las propiedades que dependen de la estructura vectorial son independientes de su representación.

1.1.2. Ejemplos de espacios vectoriales

Algunos ejemplos de espacios vectoriales reales son:

- $[(R^1,+),(R,+,\times),\circ]$ representa el conjunto de vectores de una recta.
- $[(R^2,+),(R,+,\times),\circ]$ representa el conjunto de vectores de un plano ordinario.

La suma de vectores $(+)$ y la ley externa $(\circ)$ se definen así:

Para $\vec{x}=(x_1,x_2)\in R^2$ e $\vec{y}=(y_1,y_2)\in R^2$ la suma de vectores se define por

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

Para $\vec{x}=(x_1,x_2)\in R^2$, $\lambda\in R$ el producto de un escalar por un vector se define

$\lambda\circ\vec{x}=\lambda\circ(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$.

- $[(R^3,+),(R,+,\times),\circ]$ representa el conjunto de vectores del espacio ordinario y así sucesivamente si se aumenta la dimensión que afecta al espacio vectorial.
- En general en un espacio vectorial de "n" dimensiones, un vector se define mediante el conjunto de "n" números reales que recibe el nombre de n-tuplas $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$.

La suma de vectores $(+)$ y la ley externa $(\circ)$ se definen así:

Para $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ e $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$ la suma de vectores se define por

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,\dots\dots,x_n)+(y_1,y_2,y_3,\dots\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\dots\dots,x_n+y_n)$

Para $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ y $\lambda\in R$ el producto de un escalar por un vector se define por $\lambda\circ\vec{x}=\lambda\circ(x_1,x_2,x_3,\dots\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\dots\dots,\lambda x_n)$

- $[(k,+),(k,+,\times),\circ]$ cuando k es un cuerpo conmutativo tiene también estructura de espacio vectorial sobre el mismo u otro cuerpo.
- $[(P_1(x),+),(R,+,\times),\circ]$ es un espacio vectorial real donde
  $P_n(x)=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots+a_nx^n/(a_0,a_1,\dots,a_n)\in R^n\}$

En este espacio vectorial la ley $(+)$ indica la suma de polinomios de orden "n" y la ley $(\circ)$ significa el producto ordinario de un número por un polinomio.

- $\left[\left((M_{(m,n)}),+\right),(R,+,\times),\circ\right]$ es el espacio vectorial real de las matrices de orden (m,n), donde la ley $(+)$ es la suma de matrices de orden (m,n) y la ley $(\circ)$ es el producto de un escalar real por una matriz.
- $[(C,+),(R,+,\times),\circ]$ es un espacio vectorial real.

La ley $(+)$ es la suma de números complejos y la ley $(\circ)$ es el producto de un número real por un número complejo.

- $[(L(E,F),+),(R,+,\times),\circ]$ es un espacio vectorial real.

La ley $(+)$ es la suma de aplicaciones lineales y la ley $(\circ)$ es el producto de un número real por una aplicación lineal.

1.1.3. Propiedades de los espacios vectoriales

a) Productos nulos: $\alpha \circ \vec{x} = \vec{0}$, ssi , $\left\{ \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \vee \\ \vec{x} = \vec{0} \end{matrix} \right\}$

b) Regla de los signos: $\left\{ \begin{matrix} (-\alpha) \circ \vec{x} = \alpha \circ (-\vec{x}) = -(\alpha \circ \vec{x}) \\ (-\alpha) \circ (-\vec{x}) = \alpha \circ \vec{x} \end{matrix} \right\}$

c) Reglas de simplificación: Si $\left\{ \begin{matrix} \vec{x} \neq \vec{0} \text{ y } \alpha \circ \vec{x} = \beta \circ \vec{x} \text{ , entonces } \alpha = \beta \\ \alpha \neq 0 \text{ y } \alpha \circ \vec{x} = \alpha \circ \vec{y} \text{ , entonces } \vec{x} = \vec{y} \end{matrix} \right\}$

1.2. SUBESPACIO VECTORIAL.

Un subconjunto S de un espacio vectorial $\left[(E,+),(k,+,\times),\circ\right]$ es un subespacio vectorial si se cumple, $\forall \alpha,\beta \in k$, $\forall \vec{x},\vec{y} \in S$ se cumple $\alpha \circ \vec{x} + \varepsilon \circ \vec{y} \in S$

De esta definición se deduce que si un subespacio contiene dos vectores $\vec{x},\vec{y}$ contiene todas sus combinaciones lineales.

1. Para $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow 1 \circ \vec{x} + 1 \circ \vec{y} = \vec{x} + \vec{y} \in S$
2. Para $\alpha = 1$, $\beta = 0 \Rightarrow 1 \circ \vec{x} = \vec{x} \in S$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de un sistema de vectores $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ se llama "envoltura o clausura lineal" del sistema de vectores que a su vez es un subespacio vectorial de E. Se dice que S es el subespacio engendrado por el conjunto de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ o que S es un sistema generador de E, o que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ es un sistema generador de S.

TEOREMA

Si a un sistema de generadores $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ *se le añaden otros vectores que sean combinación que sean combinación lineal de S, el subespacio engendrado es el mismo. En consecuencia, si en un sistema de generadores se elimina uno que sea combinación lineal de los demás, el espacio engendrado es el mismo.*

1.3. SISTEMAS GENERADORES. COMBINACIONES LINEALES

Sea $\left[(E,+),(k,+,\times),\circ\right]$ un espacio vectorial sobre el cuerpo k, se denomina sistema de vectores S de E a un subconjunto finito de "n" elementos de E.

$$S \subset E \text{ , } S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\} \subset E$$

1.3.1. Combinaciones lineales

Se dice que un vector $\vec{x} \in E$ es combinación lineal de los vectores del sistema $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ de E si existen "n" escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n \in k$ tales que se cumple.

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \ldots\ldots + \alpha_3\vec{x}_3 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$$

El vector nulo $\vec{0} = (0,0,0,\ldots\ldots,0) \in E$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores del sistema S.

$$\vec{0} = 0 \circ \vec{x}_1 + 0 \circ \vec{x}_2 + 0 \circ \vec{x}_3 + \ldots\ldots + 0 \circ \vec{x}_n$$

¿Se puede expresar de forma única el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores de S?. Esta idea se puede plantear de otra forma: ¿ existen distintas combinaciones lineales de los vectores de S que definan al vector nulo ?.

TEOREMA

Si un vector $\vec{X}$ es combinación lineal de los vectores del sistema $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ y $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n$ a su vez son combinación lineal del sistema de vectores $Y = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \ldots\ldots, \vec{y}_n\}$ de E, el vector $\vec{X}$ es combinación lineal de los vectores del sistema Y.

1.4. SISTEMA LIBRE. SISTEMA LIGADO

Se dice que un sistema de vectores $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ es un "sistema libre" cuando la relación $\alpha_1 \circ \vec{x}_1 + \alpha_2 \circ \vec{x}_2 + \alpha_3 \circ \vec{x}_3 + \ldots\ldots + \alpha_n \circ \vec{x}_n = \vec{0}$ se cumple para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = \alpha_n = 0$. A los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n$ se les denomina "linealmente independientes".

El vector nulo $\vec{0}$ se expresa de forma única como combinación lineal de los vectores de S.

$$\vec{0} = 0 \circ \vec{x}_1 + 0 \circ \vec{x}_2 + 0 \circ \vec{x}_3 + \ldots\ldots + 0 \circ \vec{x}_n$$

Se dice que un sistema de vectores $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ es un "sistema ligado" cuando la relación $\alpha_1 \circ \vec{x}_1 + \alpha_2 \circ \vec{x}_2 + \alpha_3 \circ \vec{x}_3 + \ldots\ldots + \alpha_n \circ \vec{x}_n = \vec{0}$ se cumple para valores distintos de cero de los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n$ ($\exists \alpha_i \neq 0$). A los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_n$ se les denomina "linealmente dependientes".

En este caso el vector $\vec{0}$ no se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de S.

Si en un sistema de vectores ligado se eliminan los vectores que sean combinación lineal de otros se obtiene el máximo número de vectores linealmente independientes.

1.5. RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES

El rango de un sistema de vectores es el número máximo de vectores linealmente independientes de dicho sistema.

Se calcula mediante la aplicación del método de Gauss. Se modifica el sistema inicial realizando "operaciones elementales" sobre sus ecuaciones (vectores); Estas operaciones hacen que permanezca invariante el rango del sistema de vectores reduciendo el número de vectores que lo forman.

Los vectores cuyo rango hay que estudiar se colocan en fila en una matriz y se opera sobre las filas de ella. El rango no varía si se suprimen:

a) Las filas que sean nulas
b) Las filas que sean combinación lineal de otras

Las operaciones elementales son:
a) Intercambiar entre sí filas de la matriz
b) Multiplicar o dividir una fila de la matriz por un número real distinto de cero
c) Sumar a una fila un múltiplo de otra

1.6. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL.

1.6.1. Base de un espacio vectorial

Sea un espacio vectorial $\left[(E,+),(k,+,\times),\circ\right]$ sobre un cuerpo k.

Se llama base del espacio vectorial E, a todo sistema de vectores "libre" que sea "generador" de E.

Todo vector $\vec{x} \in E$ se expresa de una manera única como combinación lineal de los vectores de una base B de E.

Si $B=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\ldots\ldots,\vec{b}_n\right\}$ es una base de E y $\vec{x}_i \in k$ $\left(i=1,2,3,\ldots\ldots,n\right)$, si $\vec{x}=x_1\vec{b}_1+x_2\vec{b}_2+x_3\vec{b}_3+\ldots\ldots+x_n\vec{b}_n$ a los valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se les llama componentes del vector $\vec{x}$ respecto a la base B.

En un espacio vectorial e engendrado por un número finito de generadores $B=\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\ldots\ldots,\vec{b}_n\right\}$ *existe al menos una base.*

TEOREMA

En un espacio vectorial E engendrado por un número finito de generadores todas las bases tienen el mismo número de vectores.

1.6.2. Dimensión de un espacio vectorial

Se llama dimensión de un espacio vectorial E al número de vectores que tiene una base de ese espacio vectorial.

<u>*Consecuencias*</u>

a) Todo sistema libre de generadores que tenga "n" vectores en un espacio vectorial de "n" dimensiones es un sistema libre
b) Todo sistema libre en un espacio vectorial de dimensión "n", tiene un número de vectores menor o igual que "n"
c) Todo sistema que tenga más de "n" vectores en un espacio vectorial de dimensión "n" es ligado

1.7. TEOREMA DE LA BASE INCOMPLETA.

Sean "m" vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_m\} \in S$ linealmente independientes de un subespacio vectorial $S \subset E$ de dimensión "$m \le n$", siempre es posible hallar $"n-m"$ vectores de forma tal que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\ldots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \vec{x}_{m+2}, \ldots\ldots, \vec{x}_n\}$ sean una base de E.

Evidentemente la base que se puede encontrar, es decir, la base completa no es única.

1.8. OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES

1.8.1. Intersección de subespacios

Sea el espacio vectorial $[(E,+),(k,+,\times),\circ]$ definido sobre el cuerpo k y n subespacios vectoriales de E: $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots S_n$.

Se denomina "intersección de subespacios vectoriales" a

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \ldots\ldots \cap S_n = \{\vec{x} \in E / \vec{x} \in S_1, \vec{x} \in S_2, \vec{x} \in S_3, \ldots\ldots, \vec{x} \in S_n\} =$$
$$= \{\vec{x} \in E / \vec{x} \in S_i, I = 1,2,3,\ldots\ldots,n\}$$

1.8.2. Suma de subespacios

Se llama suma de subespacios vectoriales y se expresa por $\sum_{i=1}^{n} S_i$ al "subespacio vectorial" de E definido por

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_n = \{\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \ldots\ldots + \vec{x}_n / \vec{x}_i \in S_i, i = 1,2,3,\ldots\ldots,n\}$$

De esta definición se infiere que cada vector de la suma de subespacios se descompone en suma de los vectores pertenecientes a uno de los subespacios.

1.8.3. Suma directa

Cuando la descomposición de un vector en suma de vectores de modo que cada uno de ellos pertenezca a uno de los subespacios sea única, se dice que la suma de los subespacios es directa.

DEFINICIÓN.

Se dice que la suma de los subespacios $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots, S_n$ *es directa y se denota por* $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \ldots\ldots \oplus S_n$ *ssi cada vector perteneciente a la suma* $\vec{x} \in S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \ldots\ldots \oplus S_n$*, se descompone de manera única como suma de "n" vectores* $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i$ *con* $\vec{x}_i \in S_i$*.*

Dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de E son suma directa si su intersección es el vector nulo.

$$S_1 \oplus S_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\} \\ \dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(E) \end{array} \right\}$$

1.8.4. Subespacios suplementarios

Sea un subespacio vectorial $[(E,+),(k,+,\times),\circ]$ sobre un cuerpo k y F un subespacio vectorial de E. El subespacio vectorial suplementario de F en E es un subespacio vectorial denotado por F^S que cumple las condiciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} F \oplus F^S \\ F + F^S = E \end{array} \right\}$$