eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIA ETA ENPRESA ZIENTZIEN FAKULTATEA

BIOMETRIA AKTUARIALA

Ana Herrera Cabezón

Aitor Barañano Abasolo

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIA ETA ENPRESA ZIENTZIEN FAKULTATEA

BIOMETRIA AKTUARIALA

Ana Herrera Cabezón

Aitor Barañano Abasolo

INDIZEA

1. GAIA

1. SARRERA

1.1 BIOMETRIA AKTUARIALA. KONTZEPTUA

Pertsona bati edo pertsona talde bateri gerta diezaiokeen arriskuak eta asegurratu daitezkeen arriskuak aztertzen duen zientzia bezala defini dezakegu biometría aktuariala.

Pertsona bati edo gehiagori eragin dakizkioketen arrisku aseguragarriak, zorizko[1] fenomeno bezala kontuan hartzen ditugunean, pertsonenganako fenomeno aktuarialen aurrean aurkitzen gara, biometria aktuarialeko[2] oinarria direnak.

Beste alde batetik, kontuan hartu behar dugu biometria aktuarialaren helburua pertsonenganako fenomeno aktuarialen ezaguera kuantitatibo zein kualitatiboa (probabilitate teoria erabiliz) egitea dela.

Pertsonenganako fenomeno aktuarialen artean biziraupen fenomenoa, hau da, talde batean parte hartzen duen edozein gizabanako bat adin zehatz bat betetzea eta gainditzea, biometría aktuarialaren edukiaren zati handi bat betetzen du.

Bistakoa da, bizirik irautea batez ere biologi egoeren menpe dagoela, horrez gero, justifika dezakegu biziraupen fenomenoaren neurri zehatz bat lortu nahi badugu, lortzen dugun emaitza biometrikoa izendatu izana. Biziraupen teoria, hilkortasun taulen egituraketa, baliogabetasunaren ikerketa, hilkortasunaren azterketa etabar… Biometria aktuariala deritzogun zientziaren barnean sartzen ditugu.

Pertsona taldeei eragiten dieten fenomenok aztertzean, kontuan hartu behar dugu Biometria Aktuariala demografiarekin erlazio estua duela eta gainera, demografi ikerkuntzan erabilitako iturriak Biometria aktuarialaren erreferentzi garrantzitsua direla.

Demografiaren hasiera 1662-an koka dezakegu John Graunt[3]-en lanarekin, bertan azaltzen da Londreseko parrokia ezberdinetan 1629 -1638 eta 1647 -1658 urteen arteko jaiotza eta heriotzen arteko erlazioa, batzuetan bertan heriotzen arrazoia adierazten zen. Era berean, Grauntek ezagutzera eman zuen ideia garrantzitsuenetatik aurki dezakegu, gizartearen arazoak azaltzeko, adin eta sexu datuen banaketa.

Biometria aktuarialaren hasiera ere John Graunt-en ekarpenekin erlazionatuta dago, lehenengo hilkortasun taulen zirriborroen egiletzat hartzen baita, nahiz eta lehenengo taula moderno bezala hartu ez izana, hauen egile bezala Edmun Halley (1693) hartzen

[1] baldintza berdinetan errepikatuz gero, emaitz berdina ematen ez duten fenomenoak dira.

[2] Ezagutzeko asmoa duen gertaera eta fenomenoen multzoa zientzia baten oinarria materiala osatzen du. Objetu materiala ezagutzen da objetu formala bezala.

[3] Roland Pressat (1977): "*Introducción a la demografía*"

baitugu. Demografian bezala, kontuan behar dugu aztertzen ari garen zientzia honetan, sexua eta adina funtsezko aldagaiak izango direla hilkortasuna, baliogabetasuna etabar…. aztertzeko orduan.

1.2 PERTSONA BATEN ADINAREN ADIERAZPENAK

Biziraupen fenomenoa azaltzerako orduan adina elementu esanguratsu bat bezala agertzen da. Honen adierazpena hartuko dugu fenomenoaren parametro garrantzitsu bat bezala, biometri denbora bezala izendatuz. Izendapen hau justifika dezakegu zeren norbanako bakoitzaren aldakuntza biologikoak denbora físico edo absoltuan gertatzen baitira, normalena adinean aitortuz, hau norbanako bakoitzaren barneko dendora osatzen baitu.

1800. urtean, 30 urte zuen gizabanako bat eta 2000.urtean, 30 urte duen gizabanako bat alderatzen baditugu, argitasun osoz agertuko litzateke adinaren dimentsioaren izaera erlatiboa. Horregatik nahiz eta adinaren aldaketak denbora fisikoan gertatu, guretzat desberdinak izando dira denbora físiko eta biometrikoa.

Biziraupen fenomenoaren aztertzea bakarrik denbora biometrikoan oinarritzen bada egonkor mantentzen den fenomenoaren hipotesia onartzen delako da. Arrazoi hauengatik honen ikerketa oso bat egiteko, barneratu behar ditu bi kontzeptuak, hau da, biziraupen fenomearen adierazpena bai denbora fisikoaren (t bezala adierazten dena) eta baita denbora biomterikoaren (x bezala adierazten dena) menpe dago edo berdina dena biparametrikoa da. Kontuan izan behar dugu denbora fisikoa egutegian agertzen den denborari deitzen diogula.

Aipatu dugun bezala pertsonenganako fenómeno aktuarialak aztertzerakoan adina ezaugarri garratzitsuena da, horregatik esan behar dugu hiru kontzeptu desberdin erabili ditzakegula pestsona baten adinaz hitzegiterakoan. Hiru kontzeptu hauek, adin zehatza, betetako adina eta adin aktuariala dira.

Hautatutako adinaren eta jaiotako adinaren artean igarotako denborari adin zehatza esaten zaio. Adibidez, 1983ko urtarrilaren 1ean jaiotako pertsona bat, 2013ko irailaren 30 ean, 30 urte eta 9 hilabeteko adin zehatza izango du.

Betetako adina berriz, azkenengo urtebetetzeko zenbaki osoaz dihardu. Hau da 2013ko irailaren 30ean ,1983ko urtarrilaren 1ean jaiotako pertsona baten betetako adina 30 urte izango da.

Azkenik, adin aktuarilaz hitzegiten badugu: x adin zehatza duten pertsonek, x gehi hilabete bat, x gehi 2 hilabete, x gehi 6 hilabeteko adin zehatzeraino x adin aktuariala izando dute, eta berriz, x gehi 7 adin zehatzetik, x gehi 12 hilabeteko adin zehatzeraino x+1 adin aktuarial izando dute. Lehen kontuan hartzen genuen adibidean 30urte eta 9 hilabeteko adin zehatza zuenez, 31 urteko adin aktuarila izando du.

1.3 TALDE BATEN AZTERKETA

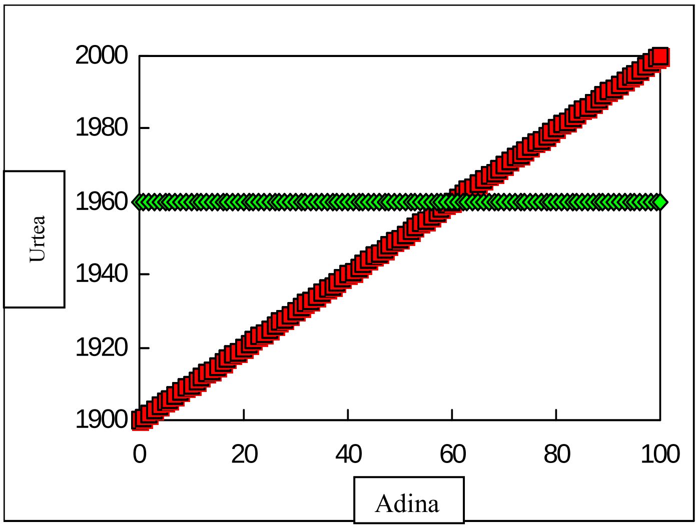
Urte batean adin desberdinetan kontuan hartutako populazioaren artean ematen diren hildako kopuruaren arteko erlazio hartzen badugu eta emandako emaitzak jaiotako talde batean aplikatzen baditugu, denboran zehar jaioberri hauen eboluzioa lortuko dugu adin desbedinetan ematen diren hilkortasun baldintzak hilkortasun maiztasunei erreferentzia egiten dion ikusitako urtearen berdinak badira. Ikerketa hauek momentuko analisiak edo zeharkako analisia izan daitezke.

Zeharkako analisi fenomeno baten adierazpenak neurtu nahi ditu baina denbora labur batean, gehienetan urte naturalean. Analisi era hau gaurkotasun demografikoko azterketa baten itxura du, demografi abagunea deritzona.

Aitzitik denboran zehar jaioberri tale baten garapena jarraitzen badugu, kotuan hartuz denboran zehar emango diren hildakoen kopurua, luzerako analisiaz baliatzen gara.

Zeharkako analisia itxurazko talde baten historietan oinarritzen den bitartean, luzerako analisia talde errealen historiak kontatzen ditu

Lexiren diagrama, ondoren agertzen dena, zeharkako neurri eta luzerako neurrien arteko denbora jatorriaren desberdintasunak kokatzen laguntzen digu.



Biometría aktuarialean garrantzi berezia izaten du talde batzuen azterketa haien kide kopuruetan aldaketak ematen direlako. Aldaketa hauek izan daitezke sarrerak edota irteerak.

Taldea itxia izendatzen da bakarrik irteerak ematen direnean, beraz, taldeko kideen kopurua soilik gutxitu daiteke. Bestetik taldea irekia da irteeretaz aparte sarrerak ere ematen badira.

Horrela izanda, adibidez, herrialde bateko hiritarren taldea irekia da, jaiotza bakoitzeko edota herritartasuna lortutako atzerritar bakoitzeko sarrera bat ematen delako eta hildako bakoitzeko edo herritartasuna galtzen duen bakoitzeko irteera bat ematen delako. Berriz, pasa den urte bateko belaunaldiko talde bat, esate baterako, 1990ean jaiotako guztiek, talde itxi bat osatzen dute,ez direlako sarrerik emango bakarrik irteerak.

Baina kontuan izan behar dugu, noiz ematen diren sarrera zein irteera horiek; prosezua diskretua izando da sarrerak eta irteerak soilik momento bakar batzuetan gertatzen badira eta jarraia edozein momentuan ematen badira.

Egia esan, banako kopuru mugatua osatzen duen talde zehatz bat hartzen den bitartean sarrera eta irteera puntu zehatzak beti multzo diskretu bat osatzen dute baina prosezua jarraia dei daiteke irteera edozein momentuan gerta daitekenean.

1.4 OINARRIZKO FUNTZIO DEMOGRAFIKOAK:

Biometría aktuariala lehen esan bezala demografiarekin erlazion handia du, biak pertsona talde batekin lan egiteagatik, horregatik garrantzitsua da demografian erabiltzen diren funtzio oinarrrizkoenak ezagutzea.

-Biztanle funtzioa:

Kontuan hartzen badugu denbora aldagai jarrai bat bezala, adinengatik banatutako bíztanle funtzioa horrela adierazten da:

$$P(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x, x+\Delta x; t)}{\Delta x}$$

Non zenbakitzailea adierazten digu bíztanle kopurua t momentuan x eta $x+\Delta x$ adinen artean.

Beraz, biztanleri osoa t momentuan:

$$P(t) = \int_0^w P(x,t)dx$$

Integralaren goiko muturrean agertzen den *w*, pertsona batek lor lezakeen adin handiena da.

- Adinaren banaketengatik egindako egitura:

Biztanleri batean adinararengatik egindako banaketaren egitura t momentu batean hurrengo funtsioak adierazten du:

$$c(x,t) = \frac{P(x,t)}{P(t)}$$

$\int_0^w c(x,t)dx = 1$ izanda

- Hilkortasun funtzioa

$D(x,x+\Delta x;t,t+\Delta t)$ t momentuan *x* eta *x+Δx* adinaren artean emandako hildakoen kopurua azaltzen badu,, *t+Δt,* adinengatik emandako hilkortasun funtzioa hurrengo adierazpenari deritzogu:

$$D(x,t) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{D(x,x+\Delta x;t,t+\Delta t)}{\Delta x \Delta t}$$

t momentuan emandako heriotz guztien funtzioa hau izanda,

$$D(t) = \int_0^w D(x,t)dx$$

Honako erlazioari hilkortasun tantoa deritzogu:

$$q(x,t) = \frac{D(x,t)}{P(x,t)}$$

Duela x urte jaio zen banako bat t momentuan bizirik irauteko probabilitatea $p(x,t)$ bezala adierazten da, $p(0,t) = 1 \forall t$ izanda.

- Emankortasun orokor eta jaoitz funtzioak

Jaiotza tasa, hartutako biztanle kopuru batean ematen diren jaiotzen maiztasunei egiten dio erreferentzia, emankortasuna berriz, ematen diren jaiotz maiztazuneie egiten dio erreferentzia baina ugaltzeko adina duten submultzoaren barnean.
$N(x,x+\Delta x;t,t+\Delta t)$ *t*, *t+Δt* denbora tartean, *x* eta *x+Δx* adina duen biztanleen artean ematen diren jaiotz kopuruari deitzen diogu
Jaiotza funtzioa honako hau da,

$$N(x,t) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{N(x,x+\Delta x;t,t+\Delta t)}{\Delta x \Delta t}$$

Jaiotz guztien funtzioa hau izanda,

$$N(t) = \int_\alpha^\beta N(x,t)dx$$

Non α eta β adin ugalkorreko goiko eta beheko muga adierazten dute.

Honako erlazioari

$$f(x,t) = \frac{N(x,t)}{P(x,t)}$$

Emankortasun orokorreko funtzioa deitzen diogu. Gainera sexu bakoitzerako funtzio bat erabili daiteke: $f_v(x,t)$ eta $f_m(x,t)$.

- Berehalako zenbateko gordinak:

Jaiotzen zenbatekoa,

$$n(t) = \frac{N(t)}{P(t)}$$

Kontuan hartuz aurreko adierazpenak lortzen dugu:

$$n(t) = \int_{\alpha}^{\beta} c(x,t) f(x,t) dx$$

Hilkortasunen zenbatekoa,

$$m(t) = \frac{D(t)}{P(t)}$$

Aurreko adierazpenak erabilita:

$$m(t) = \int_{0}^{w} c(x,t) q(x,t) dx$$

Hazkunde naturalaren zenbatekoa,

$$r(t) = \frac{N(t) - D(t)}{P(t)}$$

$$r(t) = n(t) - m(t)$$

- Funtzio ezberdinen arteko erlazioak.

Suposatuz gure biztanleriak ez duela migrazio-mugimendurik jasango, lor dezakegu adinengatiko biztanleri funtzioa, jaiotz funtzioa eta biziraupen probablitatea erabiliz, orain azaltzen den moduan.

$$P(x,t) = N(t-x)p(x,t)$$

Gero $$P(t) = \int_0^w N(t-x)p(x,t)dx$$

Eta t momentuan adinengatik banatutako biztanleriaren egituraketa lor dezakegu hurrengo funtzioa erabiliz:

$$c(x,t) = \frac{N(t-x)p(x,t)}{\int_0^w N(t-x)p(x,t)dx}$$

$x = 0$ denean

$$c(0,t) = \frac{N(t)}{P(t)} = n(t)$$

Azaldutako demografi funtzioak erabiliz lor dezakegu hurrengo erlazio hau

$$N(t) = \int_\alpha^\beta P(x,t)f(x,t)dx = \int_\alpha^\beta N(t-x)p(x,t)f(x,t)dx$$

Beste alde baterik, $P(t+\Delta t) = P(t) + N(t,t+\Delta t) - D(t,t+\Delta t)$ $\Delta t \to 0$[4].
Berdinasunaren bi atalak *P(t)-ren* artean zatituz,

---

[4] $N(t)$ *t* momentuan egondako jaiotzak adieraztu du eta $N(t;t+\Delta t)$, $(t,t+\Delta t)$ denbora tartean emandako jaiotz kopuruari egiten dio erreferentzia. $F_N(t+\Delta t)$ bezala adierazten dugu $t+\Delta t$ raino emandako jaiotz kopuruari

$$F_N(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} N(k)dk$$

eta $F_N(t)$ *t-raino* emandako jaiotz kopurua, adieraz dezakegu

$$N(t;\, t+\Delta t) = F_N(t+\Delta t) - F_N(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t;t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_N(t+\Delta t) - F_N(t)}{\Delta t} = F'_N(t) = N(t)$$

Era berean, $F_D(t+\Delta t)$ eta $F_D(t)$ bezala adierazten badugu $t+\Delta t$ eta t raino emandako hildakoen kopura, ezarri dezakegu

$$D(t;t+\Delta t) = F_D(t+\Delta t) - F_D(t)$$

$D(t;t+\Delta t)$ $(t,t+\Delta t)$ denbora tartean emanda hildakoen kopurua eta beraz,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{D(t;t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_D(t+\Delta t) - F_D(t)}{\Delta t} = F'_D(t) = D(t)$$

$$\frac{1}{P(t)}\frac{d}{dt}P(t) = r(t)$$

Aldagai aldaketa bat burututz,

$$\frac{dP(k)}{P(k)} = r(k)dk$$

Eta *o* eta *t* artean ekuazio diferentzial hau integratuz, lortzen dugu

$$Log\frac{P(t)}{P(0)} = \int_0^t r(k)dk$$

Orduña biztanleria adierazi daiteke honela:

$$P(t) = P(0)e^{\int_0^t r(k)dk}$$

Eta jaiotz eta heriotzen funtzio osoak honako hauek dira:

$$N(t) = n(t)P(0)e^{\int_0^t r(k)dk}$$

$$D(t) = m(t)P(0)e^{\int_0^t r(k)dk}$$

1.5 MALTHUSIAR BIZTANLERIAREN EREDUA:

Duela urte asko saiatu ziren biztanleriaren denborazko bilakaera azaltzen zuen demografi portaera batzuen formulazioa eraikitzen. Eredu hauek, iragarpen moduan erabiliak ia ez dute ezta indarra ertain eta epe luzean; hala ere, hauetako batzuk, eredu egonkorra bezala, ez dute balio analitikorik baina estatistika eskaseko eremuetako populazio aldagaien ebaluariorako erabili daitezke.

Lehenengo biztanleri eredu matematikoa Thomas Malthus-i zor diogu (1789)[5].
Malthusek aintzakotzat hartzen du:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)$$

$$P(t) = P(0)e^{rt}$$

[5] J.H. Pollard, *Mathematical model for the growth of human populations*.

orduan $r(t)=r\ \forall t$

Malthusiar biztanleri eredua, $r(t) = r\ \forall t$ erlazioagatik zehaztutakoa, biztanleri eredu esponentzial bat da, populazio itxi bat dena(ez daude migraziorik) ezaugarritzen da honengatik:

-Denboran zehar aldaezina den hilkortasun

$$p(x,t) = p(x)\forall t$$

-denboran zehan aldaezina den adinaren araberarako egituraketa

$$c(x,t) = c(x)\forall t$$

Bi ezaugarri hauengatik ondorioztatzen da jaiotz tanto gordina eta hilkortasun tanto gordina deboran zehar konstanteak izando direla:

$$n(t) = n\forall t$$

$$m(t) = m\forall t$$

Adierazpena jarraituz:

$$c(x,t) = \frac{N(t-x)p(x,t)}{P(t)}$$

Eta jakinda $p(0,t) = 1$ dela, orduan

$$c(0,t) = \frac{N(t)}{P(t)} = n(t)$$

$c(x,t) = c(x)\forall t$ bada

$$c(0,t) = c(0) = n(t) = n\forall t$$

Era berean jadanik ezagutzen dugun adierazpenetik abiatuz:

$$m(t) = \int_0^w c(x,t)q(x,t)dx$$

Eta kontuan izanda $p(x,t) = p(x)\forall t$ eta $c(x,t) = c(x)\forall t$

$$m(t) = \int_0^w c(x)[1 - p(x)]dx = m\forall t$$

$n(t) = n$ eta $m(t) = m$ $\forall$t bada

$$r(t) = n(t) - m(t) = n - m = r\forall t$$

Ondoriozta daitezkeen beste ezaugarri batzuk:

- Adinengatik bereizitako hilkortasunen banaketa denborarengandik independientea da.

$$\frac{D(x,t)}{D(t)} = \frac{q(x,t)P(x,t)}{\int_0^w q(x,t)P(x,t)dx}$$

Kontuan hartuz $q(x,t) = q(x)$ eta $P(x,t) = c(x)\ P(t)$ *dela*

$$\frac{D(x,t)}{D(t)} = \frac{q(x)P(t)c(x)}{P(t)\int_0^w q(x)c(x)dx} = \frac{q(x)c(x)}{\int_0^w q(x)c(x)dx}$$

- Jaiotzen dentsitatea $N(t)$ zenbateko konstante batean hazten da , zenbaki konstate hau biztanleriaren hazkunde efektiboaren zenbatekoaren berdina da.

$$\frac{1}{N(k)}\frac{d}{dk}N(k) = r$$

o eta t artean integratzen badugu

$$Log\frac{N(t)}{N(0)} = \int_0^t rdk = rt$$

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

$$N(t) = nP(t) = nP(0)e^{rt}$$

- Heriotzen dentsitatea $D(t)$ baita zenbateko konstante batean hazten da, eta zenbateko hau biztanleriaren hazkunde efektiboaren zenabtekoaren berdina da.

$$\frac{1}{D(k)}\frac{d}{dk}D(k) = r$$

o eta t artean integratuz

$$Log\frac{D(t)}{D(0)}=\int_0^t rdk=rt$$

$$D(t)=D(0)e^{rt}$$

$$D(t)=mP(t)=mP(0)e^{rt}$$

Beste erlazio batzuk:

Adierazpen honetik hasita $P(x,t)=N(t-x)p(x,t)$ eta kontuan hartuz malthusiar populazioaren ezaugarriak

$$P(x,t)=N(0)e^{r(t-x)}p(x)=N(0)e^{rt}e^{-rx}p(x)=N(t)e^{-rx}p(x)$$

$$P(t)=\int_0^w P(x,t)dx=\int_0^w N(t)e^{-rx}p(x)dx=e^{rt}\int_0^w N(0)e^{-rx}p(x)dx$$

Beste alde batetik

$$c(x,t)=\frac{P(x,t)}{P(t)}=\frac{N(0)e^{rt}e^{-rx}p(x)}{e^{rt}\int_0^w N(0)e^{-rx}p(x)dx}=\frac{N(0)e^{-rx}p(x)}{N(0)\int_0^w e^{-rx}p(x)dx}$$

$$n(t)=n=\frac{N(t)}{P(t)}=\frac{1}{\int_0^w e^{-rx}p(x)dx}$$

Azkenengo bi adierazpenetetatik lortzen dugu:

$$c(x)=ne^{-rx}p(x)$$

jakinda $c(0)=n$ $\forall$t

$$c(x)=c(0)e^{-rx}p(x)$$

Malthusiar populazioen kasu partikularrak:

- biztanleri esponentzialaren eredua
  $r(t)=r$ $\forall$t denez, biztanleri esponentziala malthusiar populazioaren eredu bat da.

- biztanleri egonkorraren eredua:

Biztanleri egonkorraren eredua malthusiar populazioaren eredua da non kontsideratzen da emankortasun funtzioa denborarekiko independientea dela.

$$f(x,t) = \frac{N(x,t)}{P(x,t)} = f(x) \forall t$$

- biztanleri geldikorraren eredua

Malthusiar ereduaren kasu partikular bat da non hazkunde naturalaren berehalako zenbatekoa 0 den.

$$r(x) = 0 \quad \forall t$$

$$n = m = \frac{1}{\int_0^w p(x)dx} = \frac{1}{e_0}$$

2. GAIA

2 BIZIRAUPEN ETA HERIOTZEN PROBABILITATEAK

2.1 OROKORTASUNAK

Gizakiari eragin diezaioketen gertakizunen artean, biziraupenaren eta heriotzaren analisia zientzia aktuarialaren zati handi bat betezen dute eta gainera, bizi-aseguruei buruzko matematika aktuarialaren abiapuntua osatzen dute. Matematika aktuarileko arazoen ebazpenak gizabanakoen biziraupen eta heriotzen probabilitateen estimakuntza eskatzen dute.

Gai honetan norbanako baten heriotz adinarekin erlazionatutako hainbat funtzio eta kontzeptu azaltzen dira. Era berean, baita aztertzen dira heriotz edo biziraupen taulen funtzio batzuk.

Zientzia aktuarialeko eredu askorentzako biziraupen taula bat beharrezko osagai bat da. Hau dela eta, ikerketa asko zientzia aktuarialaren hasiera 1693an kokatzen dutee. Urte honetan Edmund Halley argitaratu zuen "*An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Various Tables of Births and Funerals at the City of Breslau*". Taula "*the Breslau Table*"[6] izendatu zen.

Biometria aktuarialeko funtsezko printzipio bezala aipa ditzakegu:

- Homogeneotasunaren printzipioa
  Hilkortasunari dagokionez, gizabanako guztiak berdinak dira, heriotz adinaren aldagairako probabilitate banaketa funtzio bera dute. Hau taldea homogeneoa dela eta heriotz eta jaiotz probabilitateak bakarrik adinaren menpe daudela esatearen berdina da. Adin berdina duten gizabanakoek, n urte gehiago bizirauteko probabilitate bera izando dute.
- Independentziaren printzipioa
  Norbanako batek adin zehatz bati birirauteko duen probabilitatea, ez dago taldeko beste kide batek bizirauteko duen probabilitatearen menpe. Gizabanakoak estokastikoki independienteak dira.
- Egonkortasunaren printzipioa
  Egindako formulakuntza guztia, denbora biometrikoari edo adinari dagokio, denbora fisikoari dagokion erreferentzi guztiak alde batera utziz.

[6] 1997, *Actuarial Mathematics*.

2.2 BIZIRAUPEN FUNTZIOA

Biometri funtzio oinarrizkoen artean lehenengo aztertuko dugu biziraupen funtzioa. Suposa dezagun jaiotza berri bat ematen dela eta jaioberri honen heriotzaren adina kalkulatu nahi dugula. Jaioberri baten heriotz adina X (*Age-at-death*) bezala adierazten badugu, kontsidera dezakegu X ausazko[7] aldagai jarrai bat, haren banaketa funtzioa horrela adierazten dena,

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \quad x \geq 0 \text{ izanda}$$

Jarraian biziraupen funtzioa (*survival function*), $s(x)$, zehazten dugu, non x-en balio positibo baterako, jaioberri batek x adina lortzeko duen probabilitatea adierazten du.

$$s(x) = 1 - F(x) = \Pr(X > x) \quad x \geq 0$$

$F(0) = 0$ izango da, beraz , $s(0) = 1$.

$s(x)$ funtzio beherakor bat izando da x –en gehikuntzen aurrean ,zeren x adina betetzeko probabilitatea x' adina betetzeko probabilitatea baino handiagoa da, $x<x'$ *d*enean . Beste alde batetik, arrazoizkoa eta komenigarria da $s(x)$ x-en funztio jarrai bat bezala hartzea.

Hurrengo azalpenetan x erabiliko dugu gizabanako baten adina adierazteko. Horregatik x har dezake edozein balio 0tik bizitzaren maximoaren mugariano w bezala adierazten duguna, pertsona baten adinaren muga adierazten duena.

Kontuan hartzen dugu orduan $s(x)>0$ $x<w$ denean eta $s(x)=0$ $x\geq w$ denean

$$F(w) = \Pr(X \leq w) = 1$$
$$s(w) = \Pr(X > w) = 0$$

Probabilitatearen legeak erabiliz, adieraz dezakegu jaioberri batek x eta $x+z$ adinen artean hiltzeko duen probabilitatea $z>0$ izanda

$$\Pr(x < X \leq x+z) = F(x+z) - F(x) = s(x) - s(x+z)$$

Jaioberri batek x eta $x+z$ adinen artean hiltzeko baldintzazko probabilitatea, x adina bete izanda,

$$\Pr(x < X \leq x+z \,/\, X > x) = \frac{F(x+z) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+z)}{s(x)}$$

[7] Ausazko aldagaia, funtzio bat da non haren balioak zenbaki errealak diren eta zoriaren menpe dauden. Saiakuntza aleatorioekin lotura duena.

X ausazko aldagai jarrai bat bezala kontsideratu dugunez , haren dentsitate funtzioa adierazten dugu horela:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{ds(x)}{dx} = -s'(x)$$

2.3 HERIOTZ ETA BIZIRAUPEN PROBABILITATEAK

x adineko pertsona baten etorkizuneko bizita, *X-x*, *T(x)* (time-until-death) bezala adierazten da. Jaioberri batentzako *T(0) = X* eta x adineko pertsona baten hiltzeko adina *x+T(x)* bezala adieraz dezakegu.

Nazioarteko[8] notazio aktuariala erabiliz lortzen dugu *T(x)* –i dagozkion probabilittateak:

$$_tq_x = \Pr[T(x) \le t] \quad t\geq 0 \text{ denerako}$$

$$_tP_x = 1 - {_tq_x} = \Pr[T(x) > t] \quad t\geq 0 \text{ denerako}$$

non $_tq_x$ adierazten du x adineko pertsona batek t urte igarotzean hiltzeko duen probabiilitatea (*T(x)* ausazko aldagaiaren banaketa funztioa) eta $_tp_x$ x adineko pertsona batek $x+t$ adina betetzeko duen probabilitatea .

$$_tq_x + {_tp_x} = 1$$

Hemendik aurrera beraz, kontsidera dezakegu:

$$_xp_0 = s(x) \quad x \geq 0$$

Zehaztutako probabilitateen ezkerreko azpiindizea ez da agertzen haren balioa bat denean, horrela, q_x. Honek adierazten du x adineko pertsona batek urte batean hiltzeko duen probabilitatea eta p_x x adineko pertsona batek x+1 adina betzeko edo urte bat gehiago bizitzeko duen probabilitatea adierazten du . Kasu honetan probabilitate hauei deituko diegu, urteko heriotz zenbatekoa eta urteko jaiotzen zenbatekoa.
Proposa dezakegun beste funtzio batuzk honako hauek dira:

---

[8] Zientzia aktuarialean hainbat sinbolo hartzen dira Nazioarteko Notazio Aktuariala deiturikoak, zeintzuk jatorrian 1898an Aktuarioen Nazioarteko Biltzarrak beregantu zituen Sistema hau behin eta berriz berriskusten da eta berrikuspen hau Aktuarioen Nazioarteko Elkartearen Notazioko Batzorde Orokorrak egiten du.

$x+n$ adina bete ostean pertsona batek t urte gehiago biziraungo duelaren probabilitatea baldintzatua,

$$_t p_{x+n} = \Pr[T(x) > t+n \,/\, T(x) > n] = \frac{_{t+n}P_x}{_nP_x}$$

x urteko pertsona batek t urte gehiago bizitzeko eta hurrengo n urteetan hiltzeko duen probabilitatea, hau da, $x+t$ eta $x+t+n$ urteen artean hiltzeko probabilitatea,

$$_{t/n}q_x = \Pr[t < T(x) \le t+n] = {}_{t+n}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+n}p_x$$

n bat balio hartzen badu sinboloa $_{t/}q_x$ izando litzateke adierazten duenak x adineko pertsona batek $x+t$ eta $x+t+1$ adinen artean hiltzeko duen probabilitatea.

Kontuan hartuz:

$$_tp_x = \frac{_{x+t}p_0}{_xp_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

Hurrengo adierazpena lortzen dugu:

$$_{t/n}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+n)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \times \frac{s(x+t) - s(x+t+n)}{s(x+t)} = {}_tp_x\,{}_nq_{x+t}$$

Zehazten badugu ausazko aldagai diskretu bat etorkizuneko bizitzari lotuta, hau da x pertsonak bizitako urte kopuru osoak hil baino lehen, ausazko aldagai hau, $K(x)$, ondorengo banaketa funtzioa izando du:

$$\Pr[K(x) = k] = \Pr[k \le T(x) < k+1] = \Pr[k < T(x) \le k+1]$$

Probabilitate baldintzen menpean:

$$_{k/}q_x = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x\,q_{x+k} \qquad k = 0,1,2,..$$

Eta hortik lortzen da

$$\sum_{h=0}^{k} {}_{h/}q_x = {}_{k+1}q_x \qquad k = 0, 1, 2...$$

2.3.1 Hilkortasun eta biziraupen taulak

2.3.2 Hilkortasun eta biziraupen taulen azalpena

Gizarte talde jakin batetik bizirik iraun duten norbanakoen erregistro estatisko bati hilkortasun taula deritzo, normalean bertan norbanakoen zenbakizko segida batetik, x urte osoko adinean, bizirik irauten dutenen adierazpena ematen da.

Horregatik, taula hau denborazko serie bat da, non azaltzen den adin berdineko hasierako gizabanako talde batetik ematen den murrizketa progresiboa hilkortasunaren arrazoia dela medio, hau dela eta, zehazki deitu beharko litzateke Biziraunen taula.

Hilkortasun edo biziraupen taula itxurazko talde bati egiten dio erreferentzia, errealitatean ez dena existitzen, baina, haren eraikuntzarako erabilitako behaketak bai hartzen dira biztanleri edo talde erreal batetik.

Badaude hilkortasun taula batzuk adin zehatz batetik hasten direnak, 15 edo 20 urteetan, ez da beharrezkoa beraz 0tik hastea, taulen hasierako adina hauetako edozein izanda.

Azkenik aipatu behar dugu taula hauek talde itxi bateko pertsonek osatzen dutela eta gainera bakarrik ateratzeko arrazoi bat eman daitekeela heriotza.

2.3.3 Hilkortasun eta biziraupen taulen funtzioak

Kontuan hartzen badugu jaioberri talde bat l_0, Adibidez $l_0 = 100.000$ eta azaltzen badugu $L(x)$ x adinean bizirik iraun dutenen norbanakoen kopurua bezala eta j bizi bakoitza bezala behatzen dugu beraz,

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

non I_j bizitza j baten birizaupenaren adierazlea da hau da, $I_j = 1$ j –ak x adinari bizarauten badio, eta aurkako kasuan 0.
$E\left[I_j\right] = s(x),$ orduan

$$E[L(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E\left[I_j\right] = l_0 s(x)$$

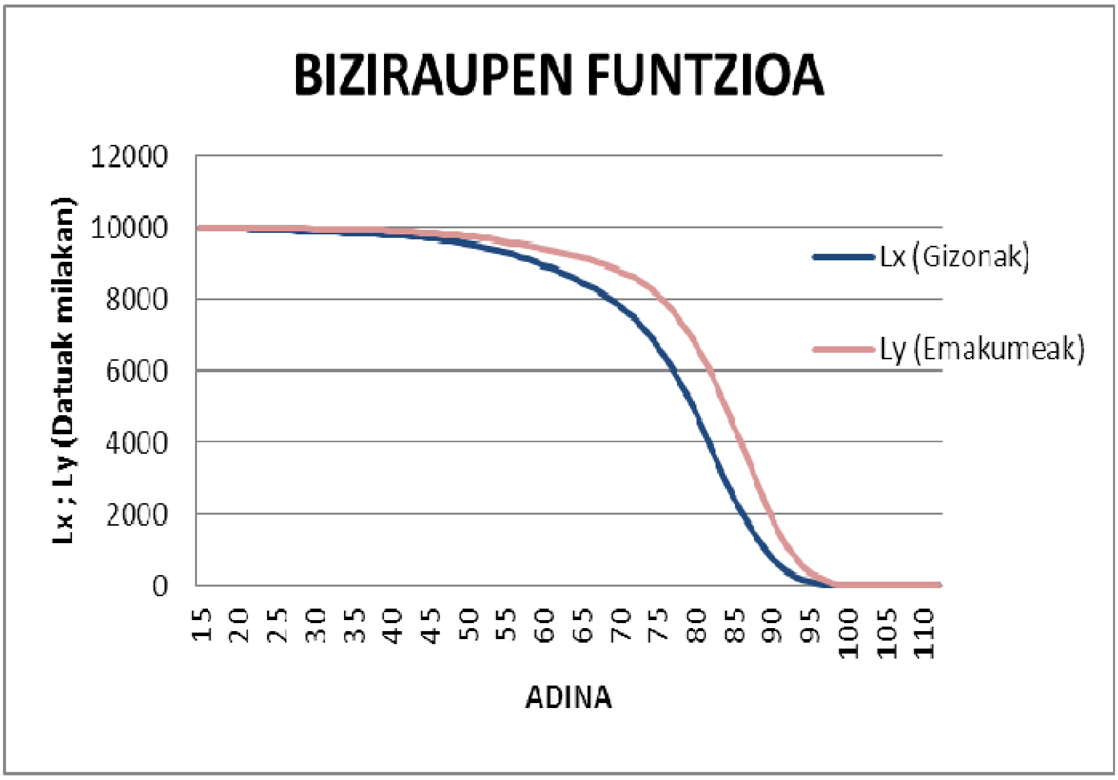
I_j adierazleak independienteak direlaren hipotesiaren menpean , $L(x)$ banaketa binomial bat du $n = l_0$ eta $p = s(x)$ parametroekin.

Hemendik aurrea l_x bezala adieraziko dugu l_0 jaioberrietatik x adineko biziraundako norbanakoen kopurua

$$l_x = E[L(x)] = l_0\,{}_x p_0$$

l_x en balioak hilkortasun eta jaiotzen taulen zutabe batean agertzen dira eta biziraupen funtzioa bezala ezagutzen da.

Grafikoki errepresentatzen badugu hilkortasun taula baten l_x -en balioak, adibidez PASEM-2010, frogatuko dugu normala den bezala funtzio beherako baten aurrean gaudela zeren haren balio murrizten da adina handitzen den heinean, balio positibo bat hartzen du taularen lehenengo adinerako eta baliogabetzen da azkenengo adinerako $l_w = 0$. Normalean, hasierako adinerako, adin hau edozein izanda (0, 1, 15, 20 urte), zenbaki biribil batetik hasten da, milioi bat edo ehun mila bezala.

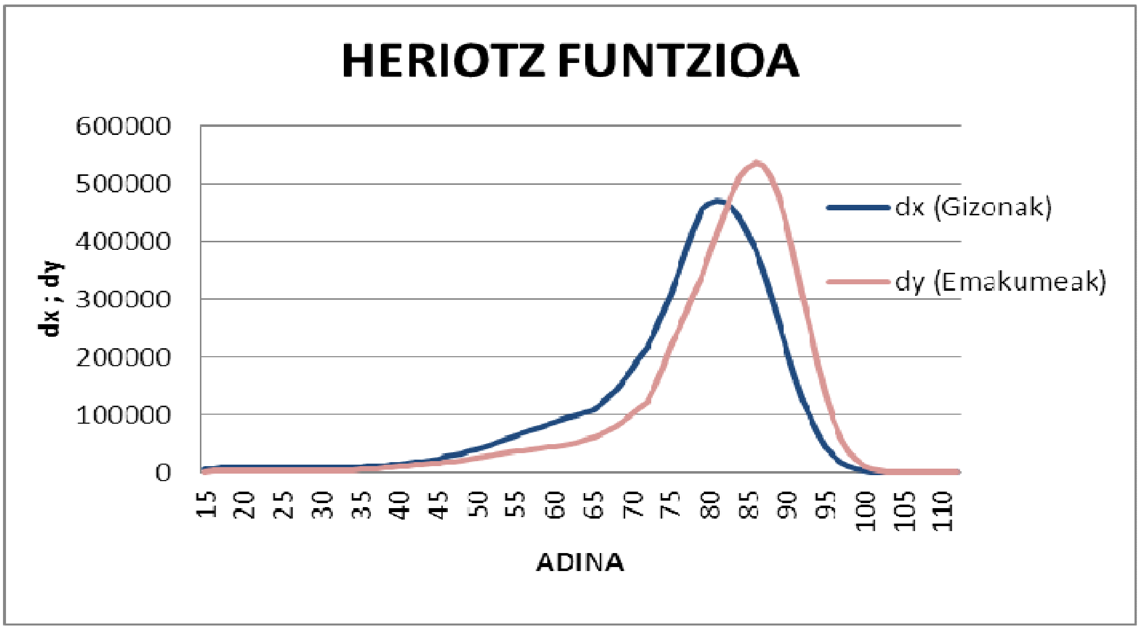


Adierazten badugu ${}_nD_x$ l_0 jaioberrietatik *x* eta *x*+*n* urteen artean emandako heriotzen zenbateko bezala,

$$ {}_nd_x = E[{}_nD_x] = l_0[s(x) - s(x+n)] = l_x - l_{x+n}$$

non ${}_nd_x$ esperotako heriotzen kopurua l_0 -tik *x* eta *x*+*n* adin artean. Ezkerreko azpiindizea bat balioa duenenan, *n*=1, d_x bezala adierazten da.

Heriotz edo biziraupen taula batean d_x funtzioa heriotz funtzioa deitzen da. Grafikoki PASEM-2010 taularekin:



Biziraupen taula batean l_0 hasierako taldea, talde itxi bat da, non ez diren sarrerarik emango eta irtetzeko aukera bakarra heriotza da.

Taldea honela osatzen da:

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{w-1} = \sum_{y=x}^{w-1} d_y$$

$$l_1 = l_0 - d_0$$

$$l_2 = l_1 - d_1 = l_0 - (d_0 + d_1)$$

....

$$l_x = l_{x-1} - d_{x-1} = l_0 - \sum_{y=0}^{x-1} d_y$$

....

$$l_{w-1} = d_{w-1}$$

$$l_w = d_w = 0$$

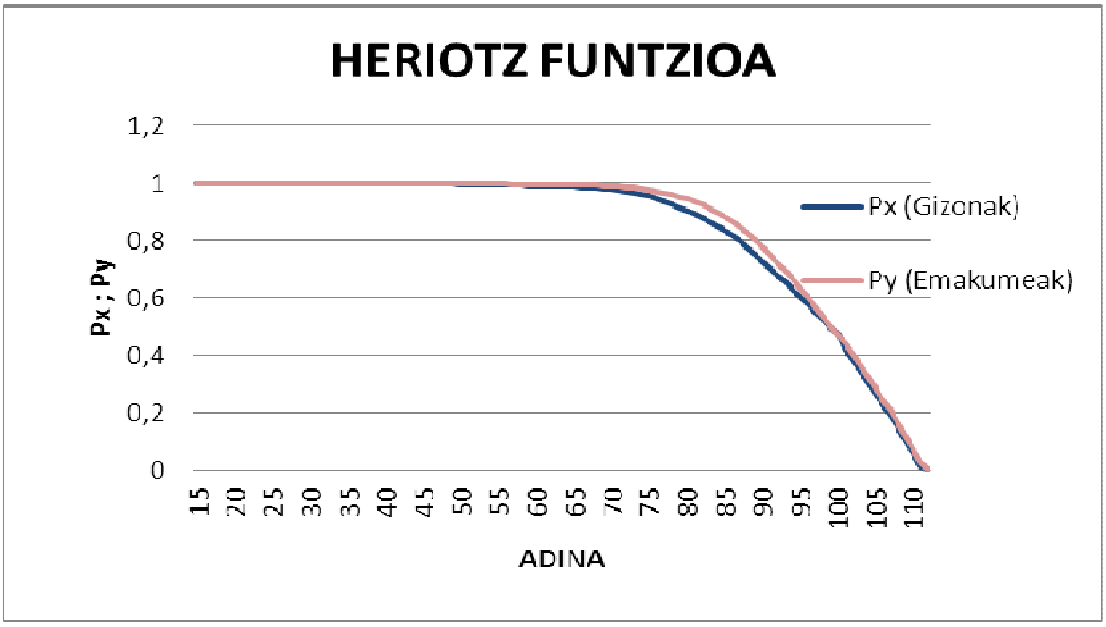
$x+t$ adina betetzea lortzen duten gizabanakoen kopurua eta x adina duten pertsonen kopurua alderatzen baditugu lortzen dugun erlazioa adierazten digu x adineko norbanako batek $x+t$ adina lortzearen probabilitatea edo x adineko pertsona batek t urte gehiago bizitziaren probabilitatea

Hilkortasun edo biziraupen tauletan normalean agertzen dira urteko biziraupenen zenbatekoen balio, horrela deitzen dugu urte bateko denborazkotasuna duten probabilitateei.

Urteko biziraupenen zenbatekoa adierazten digu, x urteko pertsona batek urte bat gehiago bizitzeko duen probabilitatea, hau da, $x+1$ adina betetzea. Kontuan hartuz aurreko puntuetan aztertutako taulen funtzioak urteko biziraupenen zenabatekoaren balioa lor ditzakegu:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

p_x balioen irudikapen grafikoa PASEM-2010 taula erabliz ondorengoa da:

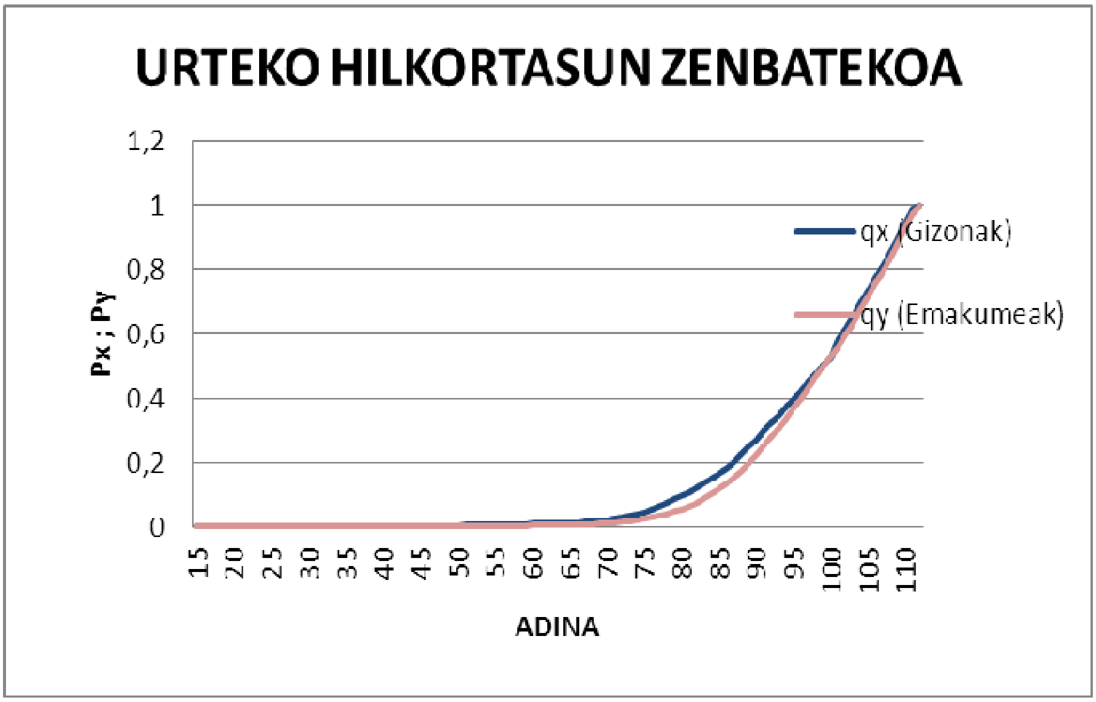


x adineko norbanako batek hurrengo t urteetan hiltzeko duen probabilitatea ondorengo erlaziotik lor dezakegu: x eta $x+t$ adinen artean hildako pertsonen kopurua x adina betetzen duten pertsonen artetik. Erlazio honi hilkortasun probabilitatea deitzen zaio eta hilkortasun eta biziraupen tauletan normalean urteko hilkortasun zenbatekoaren balioan agertzen da, q_x. q_x x adineko norbanako batek hurrengo urterorako igarotzean hiltzeko duen probabilitate bezala definitzen dugu, hau da, $x+1$ adina ez betetzea..Orain arte ikusitako funtzioen erlazioa hurrengo da:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x$$

Ondorioz, $q_x + p_x = 1$, probabilitate osagarriak direlako.

Urteko hilkortasun zenbatekoa grafikoki adin desberdinetarako PASEM-2010 taulekin ondorengoa da:



Ikertutako hilkortasun eta biziraupen taulen lau funtzioetatik bat ezagutuz, lor ditzakegu beste funtzio guztiak. Adibidez, urteko hilkortasun edo biziraupen zenbatekoa emanda, biziraupen funtzioa lortu nahi badugu, lehenengoz aukeratzen dugu l_0, l_{15}, l_{20} … (taularen hasierako adinaren arabera) oinarri egoki bat eta ondoren ondorengo erlazioa erabiliko dugu: $l_{x+1} = l_x p_x = l_x(1-q_x)$.

Hemen azaltzen dizuegu hainabt erlazio ezberdin ikusitako funtzioei buruz:

$$_n p_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}$$

$$_n p_x = {}_k p_x \, {}_{n-k} p_{x+k}$$

$$_{t/} q_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x = {}_{t+1} q_x - {}_t q_x$$

$$_{t/} q_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} \frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{x+n-1}}{l_x} = q_x + {}_{1/} q_x + \ldots + {}_{n-1/} q_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/} q_x$$

$$_n q_x = {}_k q_x + {}_{k/n-k} q_x \quad \text{k<n -rako}$$

$${}_{n}p_{x} = {}_{n/k}q_{x} + {}_{n+k}p_{x}$$

Hemen aztertutako funtzioaz aparte hilkortasun edo biziraupen tauletan beste bi funtzio agertu ohi dira: berehalako hilkortasun zenbatekoa eta bizitzaren itxaropen matematikoa, geroago azalduko ditugunak.

Hilkortasun edo biziraupen taulen balioen interpretazioa non q_x x adineko pertsona batek urte batean zehar hiltzeko duen probabilitatea da, eta l_x eta d_x berriz, lehenengoa, bizirik irauten duten x adineko norbanakoeen batazbestekoen kopurua eta bigarrena, x eta $x+1$, adinen artean l_0 hasierako jaioberrien taldetik hiltzen diren norbanakoen batazbestekoen kopurua. Normalean hilkortasun edo biziraupen taulen interpretazio estokastikoa deitzen zaio, hainbat ausazko aldagaiekin erlazionatutako probabilitate eta itxaraopen matematikoak baitira.

Existitzen da hilkortasun edo biziraupen taulen interpretaziorako beste era bat, zeinetan l_x -eko balioak bat etortzen dira l_0 hasierako taldeko jaioberrien kopurua x adin desberdinetara bizirik iristen diren norbanakoekin. Interpretazio honetaz baliatuz, d_x, l_0 hasierako jaioberrien taldetik bizirik heldu direnak x adinera eta hil egiten direnak urte bat gehiago bete baino lehen, zenbaki zehatz batez adierazita. Itxaropen matematikoen eta probabilitateen interpretazio estokastikoa proportzio eta balio zehatzetan bihurtu dira Arrazoi honengatik, hitzegiten da hilkortasun edo biziraupen[9] taulen interpretazio determinista edo klasikoaz. Adibidez, bizirik x adinera heltzea lortu duten eta $x+t$ adinean bizirik jarraitzea lortu duten gizabanakoen proportzioa, ${}_{t}p_{x}$, kalkula dezakegu “aldeko kasuen” eta “kasu posibleen” kopuruen arteko zatidura eginez.

Formula berdinak lortzen dira oinarrizko probabilitateetarako bai interpretazio deterministarako eta baita estokastikarako.

2.3.4 Hilkortasun edo Biziraupen taulen eraikuntza

Biziraupen taularen eraikuntza lan konplexu bat da, bai datuen bilketaren aldetik eta baita lantzearen aldetik.

Hilkortasun taula baten lantzea suposa dezake hilkortsunaren aurrean belaunaldi baten portaeraren azterketa oso bat, zeinek eskatzen duen belaunaldi horren behaketa 100 urtez gutxigorabehera. Luzetarako analisi hau ez da oso erabilgarria zailtasun handiak ekartzen baititu hasierako taldearen gorabehera guztiak denbora luzean jarraitzea eta beste alde batetik emaitzak ez lukete garrantzirik izango urrun dauden datuen kalkuluak izan baitira. Honengatik, hilkortasun taula batetaz hitzegiten denean, gehienetan erreferentzia egiten

[9] “*Matemática de los seguros de vida*” José Antonio Gil Fana, Antonio Heras Martínez eta José Luis Vilar Zanón liburuaren araberan interpretazio klasikoa zuzena ez dela uste dute.

zaio zeharkako ereduei. Honek belaunaldi batzuen portaerei egiten die erreferentzi debora labur batean eta emaitzak itxurazko belaunaldi bati aplikatzen zaio.

Gehienetan hilkortasun taula q_x balioetatik abiatuz eraikitzen da, balio hauek ezagututa taulako beste balio guztiak ondoriozta daitezke.

Hilkortasun taula baten eraikuntzan ondorengo aldiak aurki ditzakegu:

- Beharrezko datuen bilketa

  Batez ere erreferentzia egiten zaio momento zehatz batean kontuan hartzen den biztanleriaren adin ezberdinen araberako antolaketari eta behaketa aldian adin ezberdinen arabera emandako heriotzen antolaketari.

- Balio gordinen kalkuluak

  Aurreko aldian lortutako datuekin lagin bat hartzen da eta eraiki nahi dugun seriearen lehenengo emaitzak lortzen dira, gure kasun, lortuko genuke adin bakoitzerako heriotzen maiztazunak.

- Balio gordinen doitzea

  Aurreko aldian lortutako maiztazunak agian garapen irregulartasunak aurkeztu ditzakete. Desbideratze hauek ez dira hilkortasun probabilitatear garapen irregular bat ematearen ondoriozkoak horregatik, egoki ikusten da garapen honen doitzea.

Hilkortasun taulaen eraikuntzan hainbat eredu desberdin aurkitzen ditugu:

- Heriotzetako eredua:

  Erregistro zibileko estatistiketan oinarritzen da denbora zehatz batean zeintzuk emango digute denbora horretako heriotzen kopurua, adinetan bananduak. Adibidez, n urtetako denbora tartea hartzen badugu, *x* eta *x+1* adinen artean emango diren heriotzen kopurua honako hau izando da: $d_x^1, d_x^2, \ldots, d_x^n$, eta *x+1* eta *x+2*, adinen artean emandako heriotzen kopurua $d_{x+1}^1, d_{x+1}^2, \ldots, d_{x+1}^n$, eta horrela behin eta berriz.

  Behaketen batez bestekoaren bidez adin bakoitzeko heriotzen n datuak ondorioztatuz lortuko dugu *x* adineko heriotzen kopurua behaketaren denoboran d_x balioak bezala. Orduan kalkulatzen da: $l_0 \quad \sum_{x=0}^{w} d_x$ bezala.

  Modu honetan kalkulatutako hildakoak urte desberdinetan jaio dira, hau da, belaunaldi deberdinetatik datoz; hilakoen kopuruari dagokiones eta beraz, d_x balioei dagokionez, belaunaldi desberdinetako kausak eragiten diete (urte deberdin hauetan jaiotz kupuru desberdinak, migrazio mugimenduak, hilkortasun desberdinak…)

Taulak emaitz nabarmenak emango lituzke soilik aurreko aldi luzean zehar (behaketa denboraldian hildako gizabanako zaharrenak jaio ziren unetik), urteko jaiotzen zenbakia, hilkortasuna eta migrazio mugimenduak ia konstante mantendu balira. Baldintza hauek beteezinak dira eta horregatik prozesua soilik onartu daiteke lehen hurbilketa oso zehaztugabe bat bezala

- Erroldaren eredua:

Oinarritzen da datu batzuetan, erroldak emandakoa, daudenen edo egoiliarren zenbakia ematen duena, adin oso bakoitzerako errolda datan, eta hauek l_x balioak bezala hartzen dira (l_0 balio zuzena izateko guztiak koefiziente egoki batetaz biderkatzearen baldintzarekin). Kontuan hartuz erroldatutako *x* adineko guztiak errealitatean *x* eta *x+1* arteko adina izando dutela, honen zenbakia har dezakegu $l_{x+\frac{1}{2}}$ bezala.

Prosezua aurrekoaren akatas berdina aurkezten du, baina hemen ageriagoa da , ez delako kanpoan uzten $l_{x+1} > l_x$ izatea.

- urteko zenbatekoen eredua:

Praktikan beti urteko hilkortasun zenbatekoaren, q_x, kalkulua egiten da.

Eredu honetan q_x balioa kalkulatzen da ondorengo era honetan: erroldak aztertzen digu erroladaren datan bizirik dauden *x* urteko pertsonen kopurua; erregistro zibileko hurrengo urteko estadistikak ematen digu *x* adineko hildakoen kopurua; eta lehenengo eta bigarrengoaren erlaziotik aterako genuke, estimatu behar dugun q_x edo m_x- en maiztazunak.

Prosezu honen akatsa begi bistakoa da: lehenengoz, ez du kontuan hartzen migrazio mugimenduak ematen direla, beraz gerta daiteke x adinean erroldatutako gizabanakoak hurrengo urtean hil izana baina ez agertzea hildakoen artean, emigratu egin dutelako eta alderantziz., x adineko hildakoen artean zenbatu izana erroldatu ez diren pertsonak, inmigratu egin dutelako errolda egin ostean. Bigarrenez, x adina duten erroldatutako pertsonak x adin zehatza ez izatea, baizik eta x eta x+1 arteko adina izatea; horregatik, gerta daiteke erroldan sartuta dauden x adineko hainbat pertsona hurrengo urtean hiltzea x +1 adina beteta(eta, beraz, ez dira kontuan hartzen erlazioaren zenbakitzailean) edota pertsona bat hurrengo urtean hiltzea betetako adina x izanda, baina x -1 rekin erroldatuta izana eta beraz, ez zena x adineko urteko hilkortasun zenbatekoaren erlazioaren izendatzailean zenbatuta egongo

Halaber, bai heriotzen erroldak eta bai heriotzen erregistroak adina adieraztean okerrak jasaten dituzte, zeren askotan behatzenda nola aurkitzen diren 0 eta 5 urte amaiera duten adin gehiago.

Lortutako balio gordin edo maiztazunak funtzio teoriko batetara lotzen da, horrela, doitutako emaitza urteko hilkortasun zenbatekoa da, garapen erregularrago bat izaten duena, adina aldatzean, hilkortasun probabilitatearekin alderatzen badugu

Praktikan, doiketak adinaren araberako tarteetan ematen dira. Hiru tarte banatzen dira normalean, bat haurren adinak, beste bat helduen adinak eta azkenengo tartea zahartzaroko adinak.

Haurren adinentzako prezesu ezberdin bat egiten da, bizirik irauten duen kopurua zehazten da, jaiotzen datuetatik abiaztuz eta gehieneta migrazio mugimenduen datuak alde batera utziz, bigarren mailakoak direnak.

2.3.5 Hilkortasun edo biziraupen taulen sailkapena

Hilkortasun taula 0 eta w arteko adin guztiak hartzen baditu, tabla oso baten aurrean aurkitzen gara, bste kasuetan taula laburtuaren aurrean.

Biztanleria baten hilkortasun hainbat kausa zehazten dute haren bilakera azaltzen dutena. Hauek dira kausa ezberdinak:

- Denbora

Denboran zehar frogatu da, biztanleriaren bizi baldintzak eta osasunaren garapena hobetu den bitartean, hilkortasun murriztu dela.

Denboraren garantzia dela eta hilkortasun edo biziraupen taula aldizka ikuskatzen dira populazioaren errolda orokorraren arabera Taula bakoitza aurrekoarekiko desberdina izando da eta batez ere azkenengo hamarkadetan aldaketa garrantzitsuak eman dira ondo zehaztutako norabide batean, q_x balioak azaleratzen dute, adin guztietarako, murrizketa batzuk taula zaharretatik oraintsuko tauletara pasatzerakoan. Horrela lortzen da ezaguna den fenomenoaren adierazpen kuantitatibora, hilkortasunaren murrizketa progresiboa..

Kalkulo aktuarialetarako erabiltzen badira taula zaharrak, balioespen okerrak egitearen arriskua izando dugu.Baina orokorrean, kalkulu aktuarialak gutxigorabehera etorkizun luze batera egiten dira eta orduan esperientzia berrietan hartutako probabilitateen ezaguera ez da nahiko, beharrezkoak dira etorkizuneko hilkortasun probabilitateen garapenaren iragarpenak .

Gizabanakoen taldeen biometri modelizazioaren arazoa proposatzean, onartzen dugu biztanleri egonkorraren hipotesia, beraz, hilkortasunaren fenomenoa denbora fisikoarekiko independientea da, eta soilik denbora fisiko edo adinaren menpe aurkitzen dugu. Hipotesi hau indarrean egon daiteke denbora laburretan; beraz, fenomenoak iraunaldi zabalago bat izan dezan eredu biometrikoaren deborazko egokitzapen bat egin behar dugu. Era horretan, hilkortasunaren modelizazio dinamikoari buruz hitzegingo dugu, debora fisikoa, t , eta biometri denbora, x , jada ezagututako funtzio biometrikoetan parte hartuz.

- Sexua
  Demografi estatistikek begi bistan utzi dute nola hilkortasuna sexuaren arabera aldatzen den, eta honek ekarri du taula ezberdinak egin beharra emankumeentzako eta gizonentzako. Emakumeen hilkortasuna gizonezkoena baino txikiagoa da.

- Lanbidea
  Puntu honetan ez daude estatistika zehatzik, baina argi dago, hainbat lanbide hilkortasun tasa handiagoak izaten dituztela.

- Bizi maila
  Hilkortasun ezberdina da ekonomi garapen desberdina duten herrialdeen artean eta baita ere desberdina da según eta zein gunean bizi: landa gunean, hirian….

Generalki hilkortasun taulak soilik kontsideratzen du hilkortasun probabilitateak adinaren menpe daudela, taula hauei agregatuak deitzen zaie.

Hipotesi honek ez du saiesten beste hilkortasun probabilitatean beste arazo batzuk ere eragiten diotela (sexua, lanbidea), eta hau ikusteko pertsona sail bakoitzerako taula ezberdinak eraikitzearekin balio du.

Kasu askotan, gizabanako batek istripu bat izatean eta honen ondorioz mutilazioak jasaterakoan, bizirik irauteko probabilitatea handiagotzen da istripua izan zuenetik denbora pasatzen den heinean. Kasu hauetan, garrantzitsuagoa da pertsona baten biziraupenerako istripua izan zuenetik pasa den denbora adina bera baizik. Orduan adina alde batera utz dezakegu eta hilkortasun taula bat eraiki bakarrik istriputik pasa den denboraren menpe eta kasu honetan taula trinkoetaz hitzegiten da.

Bereziki, gizarte aseguruetan, garantzi handia du irtetzeko aukera ezberdinak dituen, adibidez elbarritasuna eta erretiroa, talde baten irtetzeko probabilitateen ikerketa. Kasu honetan eraikitzen diren taulak kontuan hartzen dute irtetzeko aukera ezberdinak eta hainbat arrazoiengatiko irteeren taulak bezala izendatzen dira.

2.3.6 Hautatuko taulak

Askotan hilkortasun edo biziraupen taulen egitura ezberdin bat duten taulen eraikuntzen beharra egoten da. Honen kasu bat osasen azterketarena da.

Hainbat seguruen kontratazioako, osasun azterketa bat eskatzen dute konpañiek, haien osasun egoera ezagutzeko eta horrela osasun daudenentzat tarifa normala aplikatzeko. Aseguratu berria (baldintza ohikoetan onartua) hautatuako norbanako bat da , zeinen hilkortasun probabilitatea adibidez, hurrengo urterako, adin bereko beste gizabanako bat duen probabilitatea baino txikiago da, eta ondorioz biztanleria osoko taula agregatuan agertzen dena baino txikiagoa.

Baina ez zen nahikoa izango osasun azterketa jasan duten norbanakoei buruzku taula agregatua bat egitearekin. Begi bistakoa da hautaketa honen eragina murrizten dela denbora aurrera joan ahala, hau da, egindako osasun azterketaz urruntzean, honek soilik gaur egungo osasun baldintzetaz diharduelako. Horregatik, osasun azterketa jasan duten aseguratuei buruz hitzegiten badugu, kontuan hartu behar dugu seguruan sartu diren adin berdineko bi gizabankoen hilkortasun probabilitatea desberdina dela osasun azterketa adin ezberdinetan egin badute.

Onartzen dugu beraz hilkortasun probabilitatea bi aldagaien menpe dagoela, azterketa egiterakoan norbanakoan duen adina eta norbanako hautatua izan denetik pasatutako *t* denbora (hautaketaren antidurazioa) .Hilkortasun probabilitateak dituen taula bat, aldagai hauen funtzio dena, hautatutakoa deritzo.

Hautatutako taula bi aldagaien menpe eraikitzen den taula da. Aldagai bat, igorpen adina et abigarren aldagaia, igartu zenetik emandako denbora. Orduan, biziraupen ereduaren funtzio bakoitza, aldagai biko biziraupen funtzioei lotua, dimentsio biko antolamendua da

Hautatutako taulei buruz, símbolo guztietan beharrezko da ezartzea, adina idatzi beharrean, bereiztuta bi argudioak *x* eta *t;* praktikan adina idazten da banatuta bi batugaietan honeko forma honetan *[x]+t.*

$q_{[x]+t}$, bezala azaltzen dugu *x* adinean hautatuko talde batean *x+t* adinari dagokion hilkortasun zenbatekoa

Hautapena denbora batean bakarrik era adierazgarrian eragiten du, denbora honi hautapen aldia deitzen da. Aldi bat hartzen da non hautapenaren eragina desagertuko den.

Hautapenaren eragina poliki poliki ikusten dira, desberdintasunak honakoak izaten dira:

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \ldots$$

Normalean kontuan hartzen da hautapenaren eragina 5 urte gehienez mantentzen dela (askotan gutxiago ere); orduan kontuan hartzen da:

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < q_{[x-3]+3} < q_{[x-4]+4} < q_{[x-5]+5} = q_{[x-6]+6} = q_{[x-7]+7} = \ldots$$

Hautatutako taulen urteko hilkortasun probabilitateetatik beste hilkortasun eta bizi probabilitate guztiak ondoriozta daitezke.

$$_{n}p_{[x]+t}=\frac{l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t}}$$

Biziraupen probabilitateak ez daude soilik gaurko adinaren menpe, baita ere hautapen aldiaren menpe daude, eta honek suposatzen du bizi probabilitateak duen eszinbilitate printzipioa ez betetzea.

$$_{n}p_{[x]}\neq{}_{t}p_{[x]}\,{}_{n-t}p_{[x+t]}$$

Osasun hautapenaren ondean aseguru praktika baita agertzen da autoselekzioa, hau da, badaude pertsona batzuk zeintzuk aseguru kontratuan ezartzen dituzte hainbat konpañiaren dirulaguntzak bakarrik bizitzaren kasuan. Aseguru hauentzako ez dira osasun azterketarik egiten, normalean suposatzen delako aseguru hauek kontratatzen duten pertsonek osasun baldintza honetan aurkitzen direla. Esperientziak erakusten du autoselekzio honen emaitza garrantzitsuak direla eta osasun hautapenarena baino hobeagoak. Honen ondorioei dagokionez, autoselekzioan behn eta berriz berritzen da, gutxienez partzialki, aseguratuak prima ordaintzen duen bakoitzean, suposatzen baita osasun baldintza txarretan aurkituko balitz ez zuela primarik ordainduko.

2.4 BIZIRAUPEN ERROLDEN FUNTZIOA

Biziraupen errolden funtzioa L_x, errolda egiterakoan *x* adina dutela adierazten duten pertsonen kopurua adierazten du, beraz, erreferentzia egiten dio *x* betetako adinari zeinek barneratzen duen *x* adina bete duten pertsonak eta oraindik *x*+1 adina bete ez dutenak.

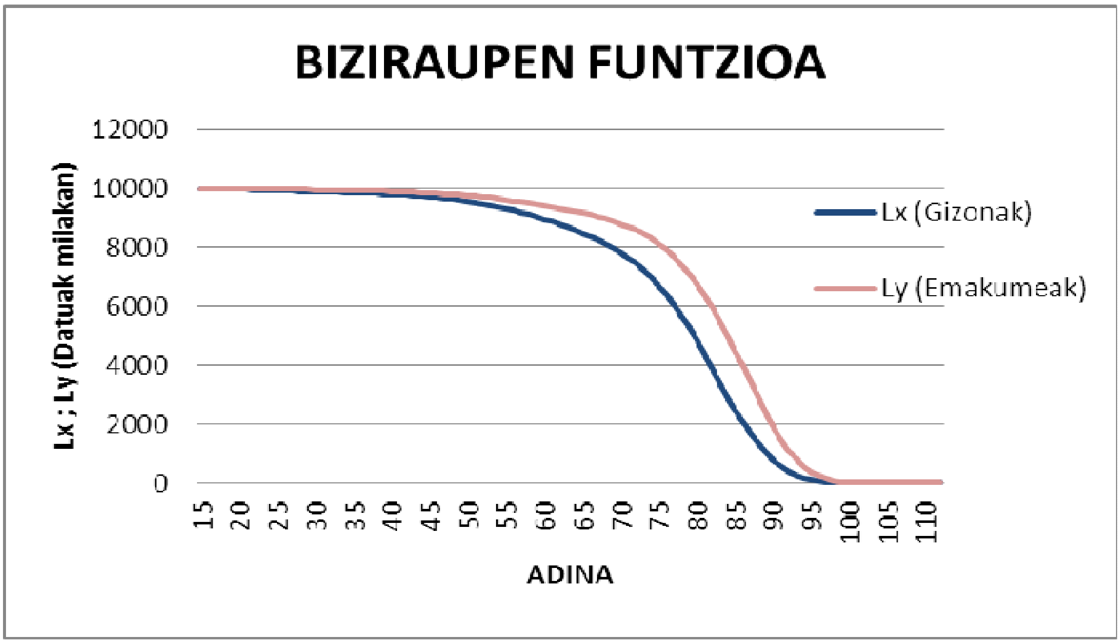
Funtzio hau hilkortasun edo biziraupen taularekin erlazionatzeko asmoarekin defini dezakegu, l_0 hasierako taldetik bizirik atera direnetatik, x eta x+1 urte artean bizi izandako urteen itxarondako kopuru osoa bezala

Onartzen badugu heriotzak uniformeki banatzen direla urtean zehar, L_x en balioa gutxigorabehera $l_{x+\frac{1}{2}}$ balioaren berdina da, balio hau ez denez tauletan agertzen hurrengo erlazioa kontuan hartzen da:

$$L_x \approx l_x - \tfrac{1}{2}d_x = l_{x+1} + \tfrac{1}{2}d_x$$

$$L_x \approx \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

l_x (PASEM-2010) grafifkoa ikusten badugu:



Kurba eta ardatzen artean geratzen den azalera, adierazten digu hasierako taldeko norbanako guztien artean bizirik iraundako urteen kopurua.

Ordezkatzen badugu kurba baten segmentua zuzen batengatik, haren azalera honako hau izando da:

$$L_x \approx \tfrac{1}{2}(l_x - l_{x+1}) + l_{x+1} = \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

Beste alde batetik, ABCD barnean aurkitzen den azalera, x eta $x+1$ mugen arteko l_x funtzioaren integrala da:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,dt \approx \int_0^1 (l_x - td_x)dt = \left[tl_x - \tfrac{t^2}{2} d_x\right]_0^1 = l_x - \tfrac{1}{2} d_x$$

2.5 HILKORTASUN ZENTRALAREN ZENBATEKOA

Hilkortasun zentralen zenbateko (Central death rate), m_x biziraupen edo hilkortasun tauletan ageri ez den funtzio bat da eta x adinean emandako heriotzen kopurua ematen digu, errolda batean x adina duela deklaratu duten pertsona kopururaren artean hau da L_x.

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

Adierazten dugu hilkortasun edo biziraupen taulean agertzen diren funtzioen eta hilkortasun zentralaren zenbatekoaren arteko erlazioa:

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{\frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})}$$

Eta zenbakitzailea eta izendatzailea l_x -az zatitzen badugu lortzen dugu:

$$m_x = \frac{2(1 - p_x)}{1 + p_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x}$$

3. GAIA

3 BEREHALAKO HILKORTASUNEN ZENBATEKOA

3.1 KONTZEPTUA ETA ADIERAZPEN MATEMATIKOA

Hilkortasun probabilitatea urte baterako, bi urterako etabar….-etarako kalkulatu beharrean urte bat baino aldi laburrago bat kontuan hartzen badugu, hau da, sei hilabeteko epea, hilabete bateko epea etabar…eta emaitza 2,12 eta abarretaz bidertzaten badugu lortuko genuke urteko hilkortasun probabilitatea, baina kontuan hartuz hurrengo hipotesia: heriotzek urte osoan mantendu dutela lehenengo sei hilabetetan, hilabetero…etan izan duten intentsitate bera.

Bezala azaltzen badugu erreferentzia bezala hartutako urteko subperiodoa, subperiodo horretako zenbatekoa honako hau izando da:

$$_{1/K}q_{x+t} = 1 - {}_{1/k}p_{x+t}$$

Eta urte horretako zenbatekoa, urteko hilkortasuna suposatuz $1/K$ lehenengo zatikia emandakoa, ondorengo adierazpena da:

$$q_{x+t}^{(k)} = k\,{}_{1/K}q_{x+t}$$

Eta hilkortasun zenbateko nominala edo hilkortasun zenbateko proportzionala deritzo.

Hilkortasunaren intentsitatea denbora tarte txiki batean kontuan hartzen badugu, adina zehaztera hektzen den une berean, berehalako hilkortasun zenbatekoa edo hilkortasunaren indarra edo hilkortasunaren intentsitatea (force of mortality) lortzen dugu μ_x bezala adierazten dena eta zehazten du x adinean emandako hilkortasunaren intentsitatea edo indarra, baldintza matematikoetara bihurtuz sahiestu ezina den norbanakoaren hondatze biologiko progresiboa adierazten du, haren heriotzara daramana.

x adinaren berehalako hilkortasun zenbatekoa, urte horretan egon behar izango liratekeen heriotzen kopurua x adina duten pertsona kopuruaren arten bezala kalkulatzen da , urte osoan hilkortasunen intentsitatea konstante mantentzen bada, behatutako pertsonen kopurua konstanteki l_x-en berdina izango zen, irtetako pertsonen kopurua berehala adin bereko beste pertsona batetaz ordezkatuko balitz..

Hilkortasunaren intentsitatea adin bakoitzean aldakorra da eta garrantzitsua da berehalako aldaketa hau neurtzeko formaren bat izatea.

Baita defini dezakegu berehalako hilkortasun zenbatekoa K infinituki handitzen denean edo $1/_K$ infinituki txikia egiten denean ${}_{1/k}q_{x+t}$ -era joateko joera duen muga bezala

$$\mu_{x+t} = \lim_{k\to\infty} q_{x+t}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} k\,{}_{1/k}q_{x+t} = \lim_{k\to\infty} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1/k}}{l_{x+t}(1/k)} = -\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}$$

Hilkortasun adinaren ausazko aldagaia emanda hurrengo adierazpena lortzen dugu,

$$\Pr(x < X \le x + \Delta x / X > x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

Adierazpen honetan $f(x) = \dfrac{dF(x)}{d}$ hilkortasun adinaren ausazko aldagaiaren probabilitatearen dentsitate funtzioa dena.

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)}$$

$f(x)$ eta $1 - F(x)$ ezaugarriek ekatzen dute $\mu_x \ge 0$. Kontuan izanda μ_x ez dela 1 baino balio handiago bat izango, bai onartzen da haren balio infinitura jotzen duela *x*, *w* gehiegizko adinera jotzen duenean

Aurreko adierazpenak kontuan izanda,

$${}_{\Delta x}q_x = \Pr[x < X \le x + \Delta x / X > x] \approx \mu_x \Delta x$$

Honengatik, defini dezakegu berehalako hilkortasun zenbatekoa honela,

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}_{\Delta x}q_x}{\Delta x}$$

Kontuan izanda berehalako hilkortasun zenbatekoaren adierazpena, biziraupen funtzioaren menpe, eta aldagai aldaketa bat burutuz, ondorengoa lortzen dugu:

$$-\mu_y dy = d \log s(y)$$

Eta funtzio hau x eta $x+$ n-z integratuz,

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \log \frac{s(x+n)}{s(x)} = \log {}_n p_x$$

Gero,

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu_y dy\right)$$

$t = y - x$ bada

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t} dt\right)$$

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right)$$ bada

eta $$\frac{dF(x)}{d} = f(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right)\mu_x = {}_x p_0 \mu_x$$

$G(t)$ eta $g(t)$ bezala adierazten badugu T(x) –en , x-en etorkizuneko bizitzaren, banaketa funtzioa eta dentsitate funtzioa. Ondorengoa izando dugu $G(t)={}_t q_x$.

$$g(t) = \frac{d}{dt} {}_t q_x = \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right] = \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\right]$$

ondorioz,

$$g(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \qquad t \geq 0\text{-rako}$$

$$\frac{d}{dt}(1 - {}_t p_x) = -\frac{d}{dt} {}_t p_x = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

horrela ${}_t p_x \mu_{x+t} dt$ x gizabanakoa t eta $t+dt$ artean hiltzeko duen probabilitatea adierazten du

$$\int_0^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} dt = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} {}_n p_x = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (-\log {}_n p_x) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^{x+n} \mu_y dy = \infty$$

Ondoren hurrengo baldintza-koadroa aurkezten dugu ikasitako funtzioen balioetarako

x<0 -rako	$F(x)=0$	$f(x)=0$	$s(x)=1$	$\mu_x=0$
x=0-rako	$F(x)=0$	zehaztugabea	$s(x)=1$	zehaztugabea
x≥0-rako	Ez da gorakorra	$x>0$ $f(x)\geq 0$	Ez da gorakorra	$\mu_x \geq 0$
$\lim\limits_{x\to\infty}$	$F(\infty)=1$	$\int_0^{\infty} f(x)dt=1$	$s(\infty)=0$	$\int_0^{\infty}\mu_x dx=\infty$

Iturria: Bowers et all. *Actuarial Mathematics* (1997)

Ikusten dugu nola berahalako hilkortasun zenbatekoa edozein balio positibo har dezake eta bereziki $x \to w$ doanean, $l_x \to 0$ eta $\mu_x \to \infty$.

3.2 HILKORTASUN ETA BIZIRAUPEN PROBABILITATEEN ADIERAZPENAK, BEREHALAKO HILKORTASUN ZENBATEKOAREN MENPE

Hilkortasun tauleteko funtzioak kontuan hartuz adierazten dugu:

$$\mu_x = -\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx} = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$$

$$-dl_x = l_x \mu_x dx$$

$$l_x \mu_x = l_0 \, {}_x p_0 \mu_x = l_0 f(x)$$

$l_x \mu_x$ biderkagaia (x , $x+dx$) tartearen artean itxarondako hilkortasun dentsitatea bezala interpreta dezakegu.

$$l_x = l_0 \exp\left(-\int_0^x \mu_y dy\right)$$

$$l_{x+n} = l_x \exp\left(-\int_0^{x+n} \mu_y dy\right)$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_0^{x+n} l_y \mu_y dy$$

Ondorengo adierazpenetik abitzen bagara

$$g(t) = \frac{d}{dt}\,{}_t q_x = {}_t p_x \mu_{x+t} \qquad t \geq 0 \text{ izanda}$$

Ondorengoa lortzen dugu:

$$q_x = \int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$${}_n q_x = \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$${}_{n-1/} q_x = \int_{n-1}^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$d_x = \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

$$l_x = \int_0^\infty l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

Beste alde batetik L_x funtzioa, l_0 hasierako taldetik bizirik iraun dutenen artean *x* eta *x+1* adinen artean, bizitako itxarondako urte guztien kopurua bezala azaltzen dugu:

$$L_x = \int_0^1 t l_{x+t} \mu_{x+t} dt + l_{x+1}$$

Non integrala adierazten duen hildakoek bizitako urte kopurua *x* eta *x+1* adinen artean, eta l_{x+1} *x* eta *x+1* adinen artean bizitako urte kopurua *x+1* adina bete duten pertsonen artetik. Zatika integratuz,

$$L_x = -\int_0^1 t d l_{x+t} + l_{x+1} = -\left| t l_{x+t} \right|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t} dt$$

L_x funtzioa *x* adinean heriotz zentralen zenbatekoa (central-death-rate at age *x*) definitzeko erabiltzen dugu m_x bezala adierazia,

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}$$

x eta *x+1* adinen artean hildakoek bizi izandako batezbesteko urte kupurua $a(x)$ bezala adierazten dugu eta honela definitzen da:

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}$$

Ondorengoa onartzen badugu

$$l_{x+t} \mu_{x+t} dt = d_x dt \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Eta onartzen badugu hildakoak urtean zehar uniformeki banatuak direla, honako hau izando dugu,

$$a(x) = \int_0^1 t dt = \tfrac{1}{2}$$

$a(x)$ -rako erabilia den hurbilketa bat da, gazteen adinentzako eta adin aurreratuetarako izan ezik, zeinetan gerta daiteke hipotesia egokia ez izatea

Beste alde batetik ondorengo erlazioa finka dezakegu:

$$L_x = a(x) l_x + [1 - a(x)] l_{x+1}$$

$$L_x \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

3.3 BEREHALAKO HILKORTASUN ZENBATEKOAREN HURBILEKO KALKULUA

Adierazpen honetatik abiatuz:

$$\log p_x = -\int_0^1 \mu_{x+t} dt$$

Hurbileta terminoetan izango dugu,

$$\mu_{x+½} \approx -\log p_x$$

Era berean

$$\int_{-1}^1 \mu_{x+t} dt = -\log p_{x-1} - \log p_x$$

Ondorioz ondorengo hurbilketa lortzen dugu:

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\log p_{x-1} + \log p_x) = \frac{1}{2}(\log l_{x-1} - \log l_{x+1})$$

Taylor-en formula hartuz:

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1!}F\,'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \ldots$$

Eta biziraundako funtzioari aplikatuz, *h*-ek 1 eta -1 balioak hartzen duen unerako:

$$\begin{aligned} l_{x+1} &= l_x + l'_x + \tfrac{1}{2}l''_x + \ldots \\ l_{x-1} &= l_x - l'_x + \tfrac{1}{2}l''_x + \ldots \end{aligned}$$

Hurrengo eragiketa eginez:

$$l_{x-1} - l_{x+1} = -2l'_x + \text{Baztertzen dugun kantitate bat}$$

$$-l'_x \approx \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2}$$

Beraz, adieraz dezakegu berehalako hilkortasunen zenbatekoa honela:

$$\mu_x \approx \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} = \frac{d_{x-1} + d_x}{2l_x}$$

Beste adierazpen bat lor dezakegu h-ren balioak 1, -1, 2 eta -2 kontsideratzen badugu eta eragiketa eginez:

$$8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2}) = -12l'_x$$

Kasu honetan,

$$\mu_x \approx \frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12l_x} = \frac{7(d_{x-1} + d_x) - (d_{x-2} + d_{x+1})}{12l_x}$$

Berehalako hilkortasunen zenbatekoen aurreko adierazpenak kontuan hartuz eta ondorengo adierazpen hau ere:

$$d_{x-\frac{1}{2}} \approx \tfrac{1}{2}(d_{x-1} + d_x)$$

Lortzen dugu berehalako hilkortasunen zenbatekoaren adierazpena, heriotz zentralen zenbatekoaren menpe:

$$\mu_x \approx \frac{d_{x-\frac{1}{2}}}{l_x} = m_{x-\frac{1}{2}}$$

3.4 ADIN EZ ZEHATZETARAKO BIZIRAUPEN FUNTZIOA

Aztertuko ditugu adina zehatza ez denean biziraupen funtziorako zientzi aktuarialen erabiltzen diren hiru hipotesiak

3.4.1 Heriotzen banaketa uniformea

x zenbaki oso bat izanez,eta *t* $0<t<1$ artean egonda, kontsidera dezakegu:

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1)$$

Hipotesi honetatik abiatuz, ondorengo adierazpena ondoriozta dezakegu:

$${}_tq_x = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x)-\left[(1-t)s(x)+ts(x+1)\right]}{s(x)} = \frac{t\left[s(x)-s(x+1)\right]}{s(x)} = tq_x$$

Erlazio honengatik egile askok hipotesi honi ${}_tq_x$ [10] -en linealtasuna deitzen diote

$${}_tp_x = 1 - tq_x$$

$0 \leq eta \leq 1$, $eta + t \leq 1$ kontsideratzen badugu

$${}_yq_{x+t} = \frac{s(x+t)-s(x+t+y)}{s(x+t)}$$

Adierazpenaren zenbakitzailea ondorengoa da:

$$(1-t)s(x) + ts(x+1) - \left[(1-t-y)s(x) + (t+y)s(x+1)\right]$$

Eta izendatzailea

$$(1-t)s(x) + ts(x+1)$$

---

[10] Hans U. Gerber, [1990], *life insurance mathematics*.

Ondorioz

$$ {}_{y}q_{x+t} = \frac{y[s(x)-s(x+1)]/s(x)}{\{s(x)-t[s(x)-s(x+1)]\}/s(x)} = \frac{yq_x}{1-tq_x} $$

Berehalako hilkortasun zenbatekoari dagokionez,

$$ \mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{[s(x)-s(x+1)]}{(1-t)s(x)+ts(x+1)} $$

Izendatzaile eta zenbakitzailea *s(x)* –etaz zatituz lortzen dugu:

$$ \mu_{x+t} = \frac{q_x}{(1-tq_x)} $$

Aurreko erlazio honen ondorioz, finka dezakegu,

$$ {}_{t}p_x\mu_{x+t} \approx q_x $$

Berehalako hilkortasunen zenbatekoa hazten da (adin heldu edo zahartzaroetarako) edo gutxitzen da (haur adinetarako) adinarekiko konstanteki. Hala ere, adin gehienetarako hipotesi honek emandako benetako heriotzen hurbilketa egokiak ematen dituzte, zeren berehalako hilkortasunen zenbatekoa ez du aldaketa handirik jasotzen urte baten hasierako eta amaierako uneen artean.

3.4.2 Berehalako hilkortasun zenbateko konstantea

Hipotesi honen menpean kontsideratzen dugu berehalako hilkortasunen zenbatekoa konstate mantentzen dela urteko tarte bakoitzean. x zenbaki oso bat izanez eta $0<t<1$ egonez, ezartzen dugu

$$ s(x+t) = s(x)e^{-\mu t} $$

non $\mu = -\log p_x$

Orduan , $0 \le y \le 1$, $y+t \le 1$ izanez

$$ {}_{t}p_x = e^{-\mu t} $$

$$ {}_{t}q_x = 1-e^{-\mu t} $$

$$ {}_{y}q_{x+t} = 1-e^{-\mu y} $$

Hans U. Gerber-ren ustez, kontsideratzen dugu

$$\mu_{x+t} \approx \mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x$$

Eta ondorioz

$${}_t p_x = e^{-t}\mu_{x+\frac{1}{2}} = (p_x)^t$$

3.4.3 Balducci-ren hipotesia

Hipotesi honek Italiar aktuario baten izena darama nahiz eta ikusitako hiru hipotesiak 1862an Wittstein –ek jada proposatu zituen.

Hipotesu honek kontuan hartzen du x zenbaki oso bat izanda eta $0<t<1$

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)}$$

Hipetsi honen menpean hurrengo adierazpenak lortzen ditugu:

$${}_t q_x = \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$$

$${}_t p_x = \frac{p_x}{1-(1-t)q_x}$$

$${}_y q_{x+t} = \frac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x}$$

$0 \le y \le 1$, $y+t \le 1$ izanda

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$$

Hans U. Gerber-ek ${}_{1-t}q_{x+t}$-en linealtasunaren hipotesia deritzo eta ondorengoa onartzen du,

$${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t)q_x$$

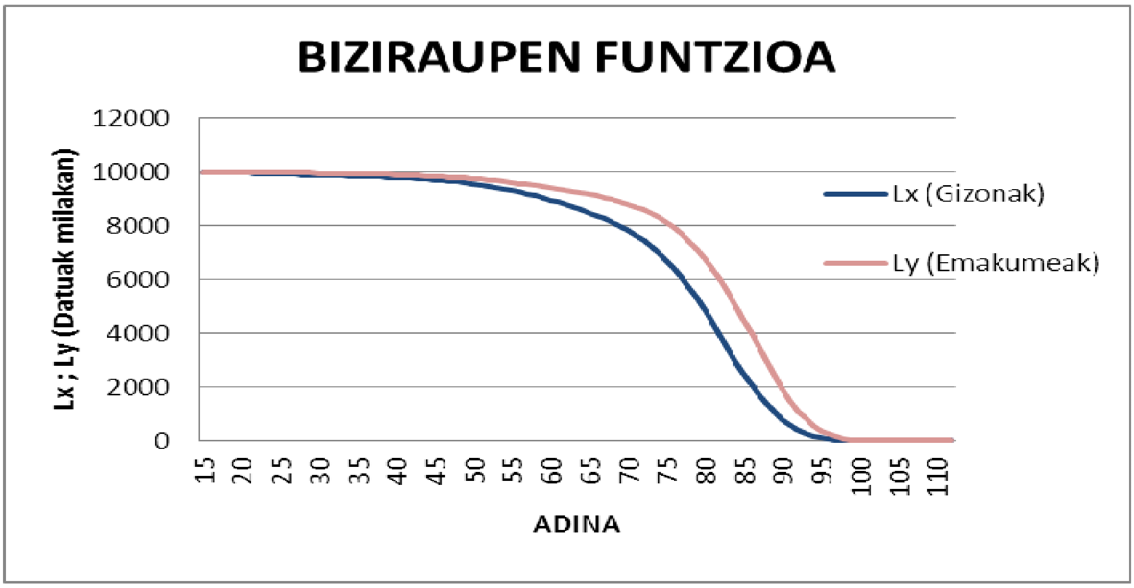
4. GAIA

4 BATEZBESTEKO BIZITZA ETA BIZITZEN INGURUKO BESTE KONTZEPTU BATZUK

4.1.- BATEZBESTEKO BIZITZA

Batezbesteko bizitzaren kontzeptua azaltzeko lehenengo bizitza kopuruaren kontzeptua definituko dugu.

Biziraupen funtzioaren irudikapen grafikoari jotzen badiogu (PASEM-2010)



Biziraupen kurbaren, abszisa aradatzen eta x adinean abszisa mozten duen puntuaren ordenatu baten artean geratzen den azalera, azaltzen digu x adinetik aurrera l_0 hasierako taldetik taldekide guztiek bizi izango duten urte kopurua taldea desagertu arte, eta hau bizitza kopuruari erreferentzia egiten dio.

Visitas kopurua $T_x (T_x \neq T(x) = T)$ bezala adierazten da eta aurreko parrafoan eman dugun definizioarekin honela adierazi dezakegu:

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt$$

$$\frac{d}{dx} T_x = -l_x$$

Baita honela adieraz dezakegu:

$$T_x = \int_0^1 l_{x+t}dt + \int_1^2 l_{x+t}dt + \int_2^3 l_{x+t}dt + \ldots$$

Kontuan hartuz biziraupen errolden funtzioaren definizio honako hau lortzen dugu:

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots$$

Onartu behar dugu bizitza kopurua hasierako taldeko norbanako guztiek ezberdin gozatu dutela. Batzuk nekez zenbait egun bakarrik bizi zituzten eta beste batzuk zahartzarora iritsi ziren. Hasierako taldea osatzen zuten norbanako guztien artean bidezko banaketa egin balitz, bakoitzari $\frac{T_x}{l_x}$ urte bizitzea tokatuko litzaioke. Zatidura honi batez besteko bizitza deitzen zaio.

Beraz, x adineko norbanako bati bizitzea tokatzen zion urte kopurua bezala definitzen dugu batez besteko bizitza, l_x taldeak (norbanakoak talde honen barnean aurkitzen delarik) bizi behar dituen urte kopuru osoa, era berdinean banatuko balirate taldekide guztien artean.

4.1.1 Batezbesteko Bizitza osoa

Kontsideratzen badugu heriotzak, urte bakoitzaren barnean, uniformeki banatzen direla, urte osoko heriotz guztiak hauen batazbestekoa egitean gertatzen direla onartzearen baliokidea da, ezarri dezakegu:

$$T_x = \frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots$$

$L_x \approx \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$ denez edozein x baliorako.

Adierazpen bera lor dezakegu baina beste bide batetik, hilkortasun funtzioa erabilita. x adinetik abiatuz, x adinean hil direnak batazbeste bakoitzak urte erdia bizi du eta multzoka $\frac{1}{2} d_x$. $x+1$ adinean hil direnak, aurrekoak baino urte bat gehiago bizi dute eta horrela behin eta berriz, horrela adieraz dezakegu :

$$T_x = \tfrac{1}{2} d_x + (1 + \tfrac{1}{2}) d_{x+1} + (2 + \tfrac{1}{2}) d_{x+2} + \ldots = \tfrac{1}{2} l_x + \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t}$$

x adina duen norbanako batentzako batazbesteko bizitza osoaren adierazpena lortzeko (complete expectation of life, Gerber-en liburuan izendatzen zaio expected futuro lifetime),

$\dot{e}_x$ bezala adierazten dena, heriotzak urte barnean uniformeki banatzen direla kontuan hartuko dugu ,hau urte osoko heriotz guztiak hauen batazbestekoa egitean gertatzen direla onartzearen baliokidea da. Ondorioz, x adineko gizabanako baten batezbesteko bizitza osoaren adierazpena honako hau da:

$$\dot{e}_x = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x$$

4.1.2 Laburtutako batezbesteko bizitza

Heriotz guztiak urte erdian ematen direla onartu ordez, urte hasieran ematen direla onartzen badugu, lortzen dugu laburtutako batezbesteko bizitza
(curtate expectation of life, Gerber-ek deritzona curtate future lifetime) e_x bezala adierazten dena.

Beraz, heriotzak urte hasieran ematen direla onartuta

$$T_x = l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots$$

kontuan hartzen ari gara x adinetik aurrera taldeak bizitako urte kopuru osoa, beraz, l_x pertsonen talde batetik hasita, baiezta dezakegu l_{x+1} urte oso bat bizi izan dutela eta bermatu dezakegu guztira, denen artean, bizi izandako urte kopuru osoak l_{x+1} direla. Bigarren urterako, l_{x+2} pertsona kopurua, beste urte oso bat bizi dute, eta guztien artean suposatzen dute bizitako urte kopuru osoak l_{x+2} dela eta horrela gainerakoetan.

Beste alde batetik, kontsideratzen badugu x adinean hil direnek ez dutela momentu bat ere ez bizi x adinetik hasita, zeren denak urte hasieran hiltzen dira eta $x+1$ adinean hil direnak urte oso bat bizi dutela, $x+2$ adinean hil direnak 2 urte oso bizi dute eta horrela behin eta berriz, T_x en adierazpen berdinera iritsiz.

Laburtutako batezbesteko bizitzari dagokion adierazepena e_x , honakoa da:

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x$$

Batezbesteko bizitza osoarekin alderatzen badugu, taldekide bakoitzak urte erdi gutxiago bizi izango luke:

$$e_x = \dot{e}_x - \tfrac{1}{2}$$

Levi –ren liburuan aurreratutako batezbesteko bizitzari buruz hitzegiten da eta honela definitzen da:

$$\ddot{e}_x = e_x + 1 = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x$$

4.1.3 Erlazioak

Laburtutako batezbesteko bizitzren adierazpenetik abiatuz:

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x}$$

Izendatzailea eta zenbakitzailea l_{x+1} -ez biderkatuz, lortzen dugu:

$$e_x = p_x(1 + e_{x+1})$$

Nondik aterako dugun

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}} = \frac{\dot{e}_x - \frac{1}{2}}{\dot{e}_{x+1} + \frac{1}{2}}$$

Atzeratutako batezbesteko bizitza

$$_{m/}e_x = \frac{l_{x+m+1} + l_{x+m+2} + \ldots}{l_x} = \sum_{t=m+1}^{\infty} {}_t p_x = {}_m p_x e_{x+m}$$

$$_{m/}\dot{e}_x = \frac{\frac{1}{2} l_{x+m} + l_{x+m+1} + l_{x+m+2} + \ldots}{l_x} = \frac{1}{2} {}_m p_x + \sum_{t=m+1}^{\infty} {}_t p_x = {}_m p_x \dot{e}_{x+m}$$

$$_{m/}\dot{e}_x = \frac{1}{2} {}_m p_x + {}_{m/}e_x$$

Aldi baterako batezbesteko bizitza

$$e_{x:\overline{n}|} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{x+n}}{l_x} = \sum_{t=1}^{n} {}_t p_x = e_x - {}_{n/}e_x$$

$$\dot{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{\frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + \frac{1}{2} l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{n} {}_t p_x - \frac{1}{2} {}_n p_x = \dot{e}_x - {}_{n/}\dot{e}_x$$

$$\dot{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{2} + e_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2} {}_n p_x$$

Aldi baterako batezbesteko bizitza geroratua

$$_{m/}e_{x:\overline{n}|} = \frac{l_{x+m+1} + l_{x+m+2} + \ldots + l_{x+m+n}}{l_x} = \sum_{t=m+1}^{m+n} {}_t p_x = {}_{m/}e_x - {}_{m+n/}e_x$$

$$ {}_{m/}\dot{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{\frac{1}{2} l_{x+m} + l_{x+m+1} + \ldots + \frac{1}{2} l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{1}{2}\, {}_m p_x + \sum_{t=m+1}^{m+n} {}_t p_x - \frac{1}{2}\, {}_{m+n} p_x = {}_{m/}\dot{e}_x - {}_{m+n/}\dot{e}_x $$

$$ {}_{m/}\dot{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{2}\, {}_m p_x + {}_{m/} e_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}\, {}_{m+n} p_x $$

$T(x) = T$ ausazko aldagaia kontuan hartuz, x adineko norbanako baten etorkizuneko bizitza adierazten duena eta haren banaketa funztioa eta dentsitate funtzioa ezagutuz:

$$ {}_t q_x = \Pr[T \le t] \qquad t \ge 0 \text{ -rako} $$

$$ \frac{d}{dt}\, {}_t q_x = {}_t p_x \mu_{x+t} $$

Batezbesteko bizitza $T(x) = T$ aldagai jarraiaren batezbesteko balioari deitzen zaioeta $\overline{e}_x$ bezala adierazten da.

$$ \overline{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty t\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt $$

Zatika integratuz ondorengo erlaziora iristen gara:

$$ \overline{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt $$

Trapezioen eredua erabiliz, integrazioaren tarteak urteko tarteetan bereiziz, ondorengo segida lortzen dugu:

$$ \overline{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{s=0}^{\infty} \int_s^{s+1} l_{x+t} dt \approx \frac{1}{l_x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{l_{x+s} + l_{x+s+1}}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x = \dot{e}_x $$

$E\left[T(x)^2\right] = \int_0^\infty t^2\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt = 2\int_0^\infty t\, {}_t p_x dt$ bada

$$ Var[T(x)] = E\left[T(x)^2\right] - E[T(x)]^2 = 2\int_0^\infty t\, {}_t p_x dt - \dot{e}_x^2 $$

Beste alde batetik finka dezakegu:

$$ {}_{m/}\overline{e}_x = \int_m^\infty (t-m)\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt \approx {}_{m/}\dot{e}_x $$

$$ \overline{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt + n\int_n^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} dt \approx \dot{e}_{x:\overline{n}|} $$

$$ {}_{m/}\overline{e}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} (t-m)\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt + n\int_{m+n}^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} dt \approx {}_{m/}\dot{e}_{x:\overline{n}|} $$

Egile batzuk batez besteko bizitzari, bizi esperantza matematikoa deitzen diote eta *x* adineko norbanako batek adin horretatik aurrera biziko dituen urte probableen kopurua bezala definitzen dute.

Ausazko aldagai diskretuekin lan egiten badugu, onartzen dugu K(x) = K, *x* adinetik aurrera bizi izandako urte kopuru osoa adierazten digu, hau ausazko aldagai diskretu bat da zeinek probabilitatea soilik puntu oso ez negatiboetan lortzen duena.

Batezbesteko bizitza laburtua honeka definitzen dugu:

$$e_x = E[K(x)] = E[K] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1} p_x$$

$$E\left[K(x)^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, {}_{k+1} p_x \text{ bada}$$

$$Var[K(x)] = E\left[K(x)^2\right] - E[K(x)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, {}_{k+1} p_x - e_x^2$$

Honako hau onartzen badugu

$$T(x) = K(x) + S(x)$$

non $S(x)$ adierazten duen hidako urtean, urtearen zatikia zeinetan *x* bizirik dagoen eta $S(x)$ banaketa jarrai bat dauka 0 eta 1 artean . Ondorengo hurbilketa ezarri dezakegu

$$\overline{e} \approx e_x + \tfrac{1}{2}$$

Aurreko adierazpen guztiak aintzakotzat hartuz, T_x bizitza kopurua bezala adierazten dugu, l_0 hasierako taldeak *x* adinaren ondoren bizitako urte kopuru guztia bezala ,

$$T_x = \int_0^{\infty} t\, l_{x+t}\mu_{x+t}\, dt = -\int_0^{\infty} t\, dl_{x+t} = \int_0^{\infty} l_{x+t}\, dt$$

4.2 HILKORTASUN BATEZBESTEKO ADINA

x adineko pertsona baten hilkortasunaren batezbesteko adina ,norbanako baten adinari gehitzen zaionean batezbesteko bizitza lortzen da: $x + \overline{e}_x$

Kalkulatu nahi badugu *x* eta *x+n* adin artean hiltzen diren pertsonen hilkortasun batezbesteko adina, ondorengoa burutuko dugu:

a) *x* eta *x+n* adin artean hildakoek bizitako urte kopurua kalkulatuko dugu , adin kopuru horien artean hildakoen bizitza kopuruari erreferentzia egiten dio

x eta $x+n$ adin artean bizitako urte kopurua hau da:

$$\int_0^n l_{x+t}dt = T_x - T_{x+n}$$

$x+n$ adina bete dutenen artean bizitako urte kopurua hau da:

$$nl_{x+n}$$

Ondorioz, x eta $x+n$ adin arteko hildakoen bizitza kopurua hau da:

$$\int_0^n tl_{x+t}\mu_{x+t}dt = T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}$$

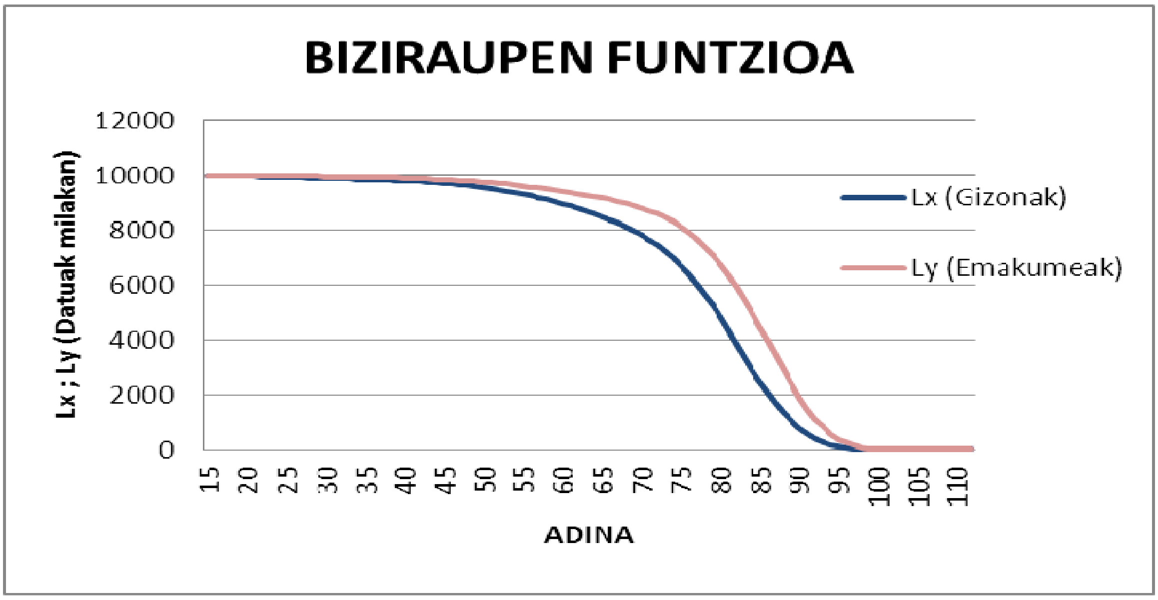
b) Kontuan hartutako adinen artean hildakoen kopurua kalkulatuko dugu

x eta $x+n$ adin artean hildakoen hilkortasunen batezbesteko adina hau da:

$$x + \frac{T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$$

4.3 BIZITZA PROBABLEA:

Norbanako baten adinari (haren hasierako adina x izanda) t urte kopurua batu egin behar zaiona $x+t$ adina betetzeko probabilitatea ½ izateko bizitza probablea deitzen zaio.



$${}_t p_x = \tfrac{1}{2}$$

Ondorioz:

$${}_t p_x = {}_t q_x = \tfrac{1}{2}$$
$$l_{x+t} = \tfrac{1}{2} l_x$$

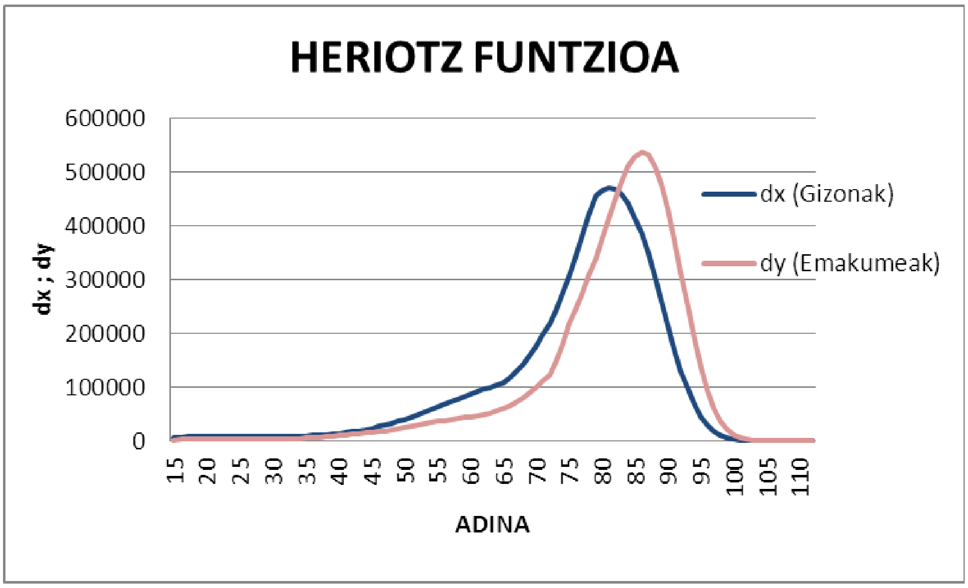
Beraz, defini dezakegu l_x hasierako taldeari erdira murrizteko falta zaizkion urte kopurua bezala edota falta diren urte kopuruak adin batera iristeko non bai adin horretara iristeko eta baita lehenago hiltzeko probabilitatea $\tfrac{1}{2}$ -ren berdina dena.

$T(x)$ ausazko aldagaia kontuan izanda, x adineko gizabanako baten bizitza probablea deitzen zaio ausazko aldagaiaren medianari, hau da, banaketa funtzioak $\tfrac{1}{2}$ balio lortzen duen t puntua adierazten du.

t-ren kalkulu praktikoa l_x–eko taulen gaineko interpolazioa eginez lortzen da.

4.4 BIZITZAREN IRAUPEN PROBABLEENA

Ohartzen bagara hilkortasun funtzioaren irudikapen grafikoan



Ikusten dugu nola 80 urte ingururako maximo bat aurkitzen dugu justu bat egiten duela pertsona kopurua handiena hiltzen den adinarekin. Nabarmena da x adineko pertsona batek, adin horretan hiltzeko beste adinetan hiltzeko baino probabilitate handiagoa duela.

$${}_{n-1/}q_x = \frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

n- garren urtean hiltzeko probabilitatea haren balio handiena hartuko du d_{x+n-1}-ek haren maximoa lortzen duenean.

Defini dezakegu bizitzaren iraupen probableena, hiltzeko probabilitate handiena aurkitzen den unerarte iristeko faltatzen diren urte kopurua bezala.

5. GAIA

5 BI PERTSONA EDO GEHIAGOKO TALDEAK

5.1 BI PERTSONA EDO GEHIAGOKO TALDEENTZAKO PROBABILITATEAK

Kasu errezenetik hasiko gara, bi gizabanakok osotatutako taldea $x_1$eta x_2 adinekoak. Kontuan hartuko ditugu plantea daitezkeen probabilitatea ezberdinak.

Lehenengoz kontsideratuko dugu bi pertsonek *n* urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea.

$$ {}_n p_{x_1x_2} = {}_n p_{x_1}\ {}_n p_{x_2} $$

Ondoren adierazten dugu, pertsona bakar batek *n* urte gehiago bizitzeko duen probabilitatea:

$$ {}_n p_{\overset{[1]}{\overline{x_1x_2}}} = {}_n p_{x_1}\ {}_n q_{x_2} + {}_n q_{x_1}\ {}_n p_{x_2} = {}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} - 2\,{}_n p_{x_1}\ {}_n p_{x_2} $$

Beste aukera bat, bi pertsonetatik bat ere ez, ez dadin n urte gehigo bizi

$$ {}_n q_{\overline{x_1x_2}} = {}_n q_{x_1}\ {}_n q_{x_2} = 1 - {}_n p_{x_1} - {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1}\ {}_n p_{x_2} $$

Aurreko hiru probabilitateen batuketa unitatea osatzen dute bertan biltzen baita bi gizabanakoetako talde batean eman daitezkeen aukera guztiak.

Hala ere proposa dezakegu beste probabilitate batzuk , hala nola, gutxienez pertsona batek *n* urte gehiago bizitzeko duen probabilitatea.

$$ {}_n p_{\overline{x_1x_2}} = {}_n p_{\overset{[1]}{\overline{x_1x_2}}} + {}_n p_{x_1x_2} = {}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} - {}_n p_{x_1}\ {}_n p_{x_2} $$

Edota gutxienez pertsona batek hurrengo n urteetan hiltzeko duen probabilitatea:

.

$$ {}_n q_{x_1x_2} = {}_n q_{x_1}\ {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1}\ {}_n q_{x_2} + {}_n q_{x_1}\ {}_n q_{x_2} = 1 - {}_n p_{x_1}\ {}_n p_{x_2} $$

Zehaztutako probabilitateekin ezarri ditzakegun erlazioak honako hauek dira:

$$ {}_n p_{\overline{x_1x_2}} + {}_n q_{\overline{x_1x_2}} = 1 $$

$$ {}_n p_{x_1x_2} + {}_n q_{x_1x_2} = 1 $$

Propasa daitezkeen beste probabilitate batzuk, x_1 eta x_2 adineko bi pertsonetako talde batetik, lehenengo heriotza *n*-garren urtean eman dadila.

$$ {}_{n-1/}q_{x_1x_2} = {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_np_{x_2} + {}_np_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} + {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} = {}_{n-1}p_{x_1x_2} - {}_np_{x_1x_2} $$

x_1 eta x_2 adineko bi pertsonetako talde batean, azkenengo heriotza *n*- garren urtean eman dadila.

$$ {}_{n-1/}q_{\overline{x_1x}} = {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2} + {}_{n-1}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} + {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} = {}_{n-1}p_{\overline{x_1x_2}} - {}_np_{\overline{x_1x_2}} $$

Bi gizabanakoetako taldearekin jarraituz beste aukera batzuk adierazten ditugu:

Bi pertsonek, *n*-garren urtean batera hil ez daitezelaren probabilitatea

$$ 1-{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} = {}_np_{x_1}\,{}_nq_{x_2} + {}_nq_{x_1}\,{}_np_{x_2} + {}_{n-1}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2} + {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2} + {}_{n-1}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} + {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2} $$

Bi pertsonek, n-garren urtean hil ez daitezelaren probabilitatea

$$ (1-{}_{n-1/}q_{x_1})(1-{}_{n-1/}q_{x_2}) = {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2} + {}_{n-1}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2} + {}_np_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2} + {}_{n-1}q_{x_1}\,{}_np_{x_2} $$

x_1 norbanakoa *n*-garren urtean hiltzearen probabilitatea baina x_2 ez.

$$ {}_{n-1/}q_{x_1}(1-{}_{n-1/}q_{x_2}) $$

x_1, x_2 eta x_3 -k osatutako talde bat badaukagu, propasa ditzakegun probabilitate ezberdinak hauek dira:

Hirurek n urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea.

$$ {}_np_{x_1x_2x_3} = {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_np_{x_3} $$

Zehazki bik *n* urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea.

$$ {}_np_{\underset{x_1x_2x_3}{\underline{[2]}}} = {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_nq_{x_3} + {}_np_{x_1}\,{}_nq_{x_2}\,{}_np_{x_3} + {}_nq_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_np_{x_3} $$
$$ = {}_np_{x_1x_2} + {}_np_{x_1x_3} + {}_np_{x_{21}x_3} - 3\,{}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_np_{x_3} $$

Zehazki batek *n* urte gehiago bizitzeko duen probabilitatea.

$$ {}_np_{\underset{x_1x_2x_3}{\underline{[1]}}} = {}_np_{x_1}\,{}_nq_{x_2}\,{}_nq_{x_3} + {}_nq_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_nq_{x_3} + {}_nq_{x_1}\,{}_nq_{x_2}\,{}_np_{x_3} $$
$$ = {}_np_{x_1} + {}_np_{x_2} + {}_np_{x_3} - 2({}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2} + {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_3} + {}_np_{x_2}\,{}_np_{x_3}) + 3\,{}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_np_{x_3} $$

Hiruretatik bat ere ez *n* urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea.

$$
\begin{aligned}
&{}_n q_{\overline{x_1x_2x_3}} = {}_n q_{x_1}\,{}_n q_{x_2}\,{}_n q_{x_3} \\
&= 1 - \left({}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_3}\right) + {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_3} + {}_n p_{x_2}\,{}_n p_{x_3} - {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_2}\,{}_n p_{x_3}
\end{aligned}
$$

Aurreko lau probabilitateen batura unitatea osatzen dute bertan agertzen baitira eman daitezkeen probabilitate guztiak 3 pertsonetako taldea izanda.

Gutxienez pertsona batek *n* urte gehiago bizitzeko duen probabilitatea.

$$
\begin{aligned}
&{}_n p_{\overline{x_1x_2x_3}} = {}_n p_{\overset{[1]}{\overline{x_1x_2x_3}}} + {}_n p_{\overset{[2]}{\overline{x_1x_2x_3}}} + {}_n p_{x_1x_2x_3} \\
&= {}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_3} - \left({}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_3} + {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_3}\right) + {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_2}\,{}_n p_{x_3}
\end{aligned}
$$

Eta hurrengo *n* urteetan gutxienez pertsona batek hiltzeko duen probabilitatea.

$$
\begin{aligned}
&{}_n q_{x_1x_2x_3} = {}_n q_{x_1}\,{}_n p_{x_2}\,{}_n p_{x_3} + {}_n p_{x_1}\,{}_n q_{x_2}\,{}_n p_{x_3} + {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_2}\,{}_n q_{x_3} \\
&+ {}_n q_{x_1}\,{}_n q_{x_2}\,{}_n p_{x_3} + {}_n q_{x_1}\,{}_n p_{x_2}\,{}_n q_{x_3} + {}_n p_{x_1}\,{}_n q_{x_2}\,{}_n q_{x_3} + {}_n q_{x_1}\,{}_n q_{x_2}\,{}_n q_{x_3} \\
&= 1 - {}_n p_{x_1}\,{}_n p_{x_2}\,{}_n p_{x_3}
\end{aligned}
$$

Zehaztutako probabilitateekin ondorengo erlazioak ezarri ditzakegu:

$$
\begin{aligned}
{}_n p_{\overline{x_1x_2x_3}} + {}_n q_{\overline{x_1x_2x_3}} &= 1 \\
{}_n p_{x_1x_2x_3} + {}_n q_{x_1x_2x_3} &= 1
\end{aligned}
$$

Suposatuko dugu 3 pertsonetako taldea eta denek *x* adin berdinarekin. Kasu honetan aurreko probabilitateen adierazpenak ondorengoak dira:

Hirurek n urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea.

$$
{}_n p_{xxx} = \left({}_n p_x\right)^3
$$

Zehazki bik *n* urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea

$$
{}_n p_{\overset{[2]}{\overline{xxx}}} = 3\left({}_n p_x\right)^2\,{}_n q_x
$$

Zehazki batek *n* urte gehiago bizitzeko duen probabilitatea

$$
{}_n p_{\overset{[1]}{\overline{xxx}}} = 3\,{}_n p_x\,\left({}_n q_x\right)^2
$$

Hiruretatik bat ere ez *n* urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea.

$$ {}_nq_{\overline{xxx}} = ({}_nq_x)^3 $$

Adierazpen hauek zabal ditzakegu m pertsona osatutako talde bateri, non guztiek adin berdina duten, *x* adina. Eta orain, kontuan hartutako *m* pertsonetatik zehazki *r* pertsona *n* urte gehiago bizitzeko duten probailitatea honako hau da:

$$ {}_np_{\underset{xxx...(m)}{\underline{[r]}}} = C_m^r({}_np_x)^r(1-{}_np_x)^{m-r} $$

Binomioa garatuz $(1-{}_np_x)^{m-r}$

$$ (1-{}_np_x)^{m-r} = 1-(m-r)\,{}_np_x + \frac{(m-r)(m-r-1)}{2!}({}_np_x)^2 - ... $$

Ondorengo adierazpena lortzen dugu

$$ {}_np_{\underset{xxx...(m)}{\underline{[r]}}} = C_m^r({}_np_x)^r - (r+1)C_m^{r+1}({}_np_x)^{r+1} + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}C_m^{r+2}({}_np_x)^{r+2} - ... $$

Eta kontuan izanda *m* pertsonetatik gutxienez *r* –k *n* urte gehiago bizitzeko duten probabilitatea hau dela:

$$ {}_np_{\underset{xxx...(m)}{\underline{(r)}}} = {}_np_{\underset{xxx...(m)}{\underline{[r]}}} + {}_np_{\underset{xxx...(m)}{\underline{[r+1]}}} + ... + {}_np_{\underset{xxx...(m)}{\underline{[m-1]}}} + {}_np_{xxx...(m)} $$

Lortzen dugu

$$ {}_np_{\underset{xxx...(m)}{\underline{(r)}}} = C_m^r({}_np_x)^r - rC_m^{r+1}({}_np_x)^{r+1} + \frac{r(r+1)}{2!}C_m^{r+2}({}_np_x)^{r+2} - ... $$

Baina kontuan hartutako taldea adin ezberdinetako m pertsonez osatua badago probabilitateen adierazpenak hauek dira:

$$ {}_np_{\underset{x_1x_2...x_m}{\underline{[r]}}} = Z^r - (r+1)Z^{r+1} + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}Z^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}Z^{r+3} + ... $$

$$ {}_np_{\underset{x_1x_2...x_m}{\underline{(r)}}} = Z^r - rZ^{r+1} + \frac{r(r+1)}{2!}Z^{r+2} - \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}Z^{r+3} + ... $$

Hau kontuan izanda

$$ Z = {}_np_{x_1} + {}_np_{x_2} + ... + {}_np_{x_m} $$

$$ Z^2 = {}_np_{x_1x_2} + {}_np_{x_1x_3} + ... + {}_np_{x_1x_m} + {}_np_{x_2x_3} + ... + {}_np_{x_{m-1}x_m} $$

...

$$ Z^{m-1} = {}_np_{x_1x_2...x_{m-1}} + {}_np_{x_1x_3...x_m} + ... + {}_np_{x_2x_3...x_m} $$

$$Z^m = {}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m}$$

5.2 HERIOTZEN ORDENA KONTUAN IZATEN DUTEN PROBABILITATEAK

Atal honetan kontsideratuko dugu eman daitezkeen probabilitate ezberdinak talde bateko heriotzen ordena kontuan izanda.

x_1 eta x_2 osatutako talde batetik abiatuko gara eta kalkulatuko dugu talde bat x_1 - en heriotzarengatik *n*-garren urtean deuseztatzeko duen probabilitatea edo berdina dena , hiltzen den lehenengoa x_1 izan dadida eta heriotza n urtean izatearen probabilitatea:

$${}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1} x_2} = {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_n p_{x_2} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}$$

x_2 - en heriotzarengatik *n*-garren urtean deuseztatzeko duen probabilitatea edo berdina dena, hiltzen den lehenengoa x_2 izan dadida eta heriotza n urtean izatearen probabilitatea:

$${}_{n-1/}q_{x_1 \overset{1}{x_2}} = {}_n p_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}$$

Aurreko bi probabilitateen batuketarengatik hurrengo erlazioa lortzen dugu:

$${}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1} x_2} + {}_{n-1/}q_{x_1 \overset{1}{x_2}} = {}_{n-1/}q_{x_1 x_2}$$

x_1 - en heriotzarengatik *n*-garren urtean taldea desagertzeko duen probabilitatea edo berdina dena, hiltzen den azkena x_1 izan dadida eta heriotza n urtean izatearen probabilitatea:

$${}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1} x_2} = {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}$$

Era berean: $${}_{n-1/}q_{x_1 \overset{2}{x_2}} = {}_{n-1}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}$$

Zehaztutako probabilitatekin ondorengo erlazioa ezarri ditzakegu:

$${}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1} x_2} + {}_{n-1/}q_{x_1 \overset{2}{x_2}} = {}_{n-1/}q_{\overline{x_1 x_2}}$$

$${}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1} x_2} + {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1} x_2} = {}_{n-1/}q_{x_1}$$

Orain planteatuko dugu eremu jarraiean adierazi ditugun hainbat erlazio, kasu honetan denborazko probabilitateekin lan egingo dugu.

$$ {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2} = \int_0^n {}_tp_{x_1}\,\mu_{x_1+t}\,{}_tp_{x_2}\,dt $$

$$ {}_nq_{\overset{2}{x_1}x_2} = \int_0^n (1-{}_tp_{x_2})\,{}_tp_{x_1}\,\mu_{x_1+t}\,dt = {}_nq_{x_1} - {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2} $$

x_1, x_2 eta x_3 adineko talde bateko pertsonen kasuan, hurrengo probabilitateak plantea ditzakegu:

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} = {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_np_{x_3} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}\,{}_np_{x_3} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_{n-1/}q_{x_3} + \frac{1}{3}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}\,{}_{n-1/}q_{x_3} $$

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}x_2x_3} = {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}\overset{1}{x_2}x_3} + {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}x_2\overset{1}{x_3}} $$

Hau kontuan izanda

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}\overset{1}{x_2}x_3} = {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2}\,{}_np_{x_3} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}\,{}_np_{x_3} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2}\,{}_{n-1/}q_{x_3} + \frac{1}{6}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}\,{}_{n-1/}q_{x_3} $$

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{3}{x_1}x_2x_3} = {}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2}\,{}_{n-1}q_{x_3} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1}q_{x_2}\,{}_{n-1/}q_{x_3} + \frac{1}{2}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}\,{}_{n-1}q_{x_3} + \frac{1}{3}\,{}_{n-1/}q_{x_1}\,{}_{n-1/}q_{x_2}\,{}_{n-1/}q_{x_3} $$

Ondoren, aztertutako probabilitateekin hurrengo erlazioak adieraz ditzakegu:

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} + {}_{n-1/}q_{x_1\overset{1}{x_2}x_3} + {}_{n-1/}q_{x_1x_2\overset{1}{x_3}} = {}_{n-1/}q_{x_1x_2x_3} $$

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}\overset{1}{x_2}x_3} = {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_3} - {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} $$

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}x_2x_3} = {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_3} + {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_2} - 2\,{}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} $$

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} + {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}x_2x_3} + {}_{n-1/}q_{\overset{3}{x_1}x_2x_3} = {}_{n-1/}q_{x_1} $$

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{3}{x_1}x_2x_3} + {}_{n-1/}q_{x_1\overset{3}{x_2}x_3} + {}_{n-1/}q_{x_1x_2\overset{3}{x_3}} = {}_{n-1/}q_{\overline{x_1x_2x_3}} $$

Hiru pertsona edo gehiagoko taldeetan beste probabilitate batzuk adieraz ditzakegu, adibidez:

$$ {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,\overline{x_2x_3}} = {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,x_2\,x_3} + {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}\,x_2\,x_3} = {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,x_2} + {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,x_3} - {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,x_2\,x_3} $$

$$ {}_{n-1/}q_{\overline{\overset{1}{x_1x_2}}\,x_3} = {}_{n-1/}q_{\overset{2}{x_1}\,\overset{1}{x_2}\,x_3} + {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,\overset{2}{x_2}\,x_3} = {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,x_3} - {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_1}\,x_2x_3} + {}_{n-1/}q_{\overset{1}{x_2}\,x_3} - {}_{n-1/}q_{x_1\,\overset{1}{x_2}\,x_3} $$

3 pertsona parte hartzen duten probabilitateetan eta heriotzen ordena zehazten denean hau da eremu jarraien adierazpena:

$$ {}_nq_{\overset{1}{x_1}\,x_2x_3} = \int_0^n {}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\,{}_tp_{x_3}\,\mu_{x_1+t}\,dt $$

$$ {}_nq_{\overset{2}{x_1}\,x_2x_3} = \int_0^n {}_tp_{\frac{[1]}{x_2x_3}}\,{}_tp_{x_1}\,\mu_{x_1+t}\,dt = {}_nq_{\overset{1}{x_1}\,x_2} + {}_nq_{\overset{1}{x_1}\,x_3} - 2\,{}_nq_{\overset{1}{x_1}\,x_2x_3} $$

$$ {}_nq_{\overset{3}{x_1}\,x_2x_3} = \int_0^n {}_tq_{\overline{x_2x_3}}\,{}_tp_{x_1}\,\mu_{x_1+t}\,dt = {}_nq_{x_1} - {}_nq_{\overset{1}{x_1}\,x_2} - {}_nq_{\overset{1}{x_1}\,x_3} + {}_nq_{\overset{1}{x_1}\,x_2x_3} $$

5.3 ZIENTZIA AKTUARIALEAN TALDEAREN KONTZEPTUA

Pertsonen taldeen artean hiru maila ezberdin banatuko ditugu: lehenengo mailako taldeak eta bigarren mailakoak.

5.3.1 Lehenengo mailako taldeak

Lehengo mailako taldeak (Joint-Life status), m pertsonetako taldeak dira zeintzuk lehenengo heriotzarekin desagertzen diren (talde baten deuseztapenari egiten dio erreferentzia) .

$T(x_1x_2...x_m)$ bezala azaltzen dugu lehenengo mailako talde baten etorkizuneko bizitzari.

$$ T(x_1x_2...x_m) = min\left[T(x_1), T(x_2), ..., T(x_m)\right] $$

non $T(x_i)$ adierazten duen *i* pertsonaren etorkizuneko bizitza. $T(x_i)$ balio ezberdinen artean independentzia suposatzen dugu.

$t > 0$ denerako

$$F_{T(x_1,x_2,...,x_m)}(t) = {}_tq_{x_1x_2...x_m} = \Pr(T(x_1,x_2,...,x_m) \le t)$$
$$= \Pr\{min[T(x_1),T(x_2),...T(x_m)] \le t\} = 1-\Pr\{min[T(x_1),T(x_2),...T(x_m)] > t\}$$
$$= 1-\Pr\{T(x_1)>t, T(x_2)>t,...T(x_m)>t\} = 1-{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_m} = 1-{}_tp_{x_1x_2...x_m}$$

$$f_{T(x_1,x_2,...,x_m)}(t) = \frac{d}{dt}\,{}_tq_{x_1x_2...x_m} = {}_tp_{x_1x_2...x_m}\,\mu_{x_1+t:x_2+t...x_m+t}$$

$$\mu_{x_1+t:x_2+t...x_m+t} = \frac{-\frac{d}{dt}\,{}_tp_{x_1x_2...x_m}}{{}_tp_{x_1x_2...x_m}} = -\frac{d}{dt}Ln\,{}_tp_{x_1x_2...x_m} = -\frac{d}{dt}Ln({}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_m})$$
$$= -\frac{d}{dt}(Ln\,{}_tp_{x_1} + Ln\,{}_tp_{x_2} + ... + Ln\,{}_tp_{x_m}) = \mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + ... + \mu_{x_m+t}$$
$$\bar{e}_{x_1x_2...x_m} = E[T(x_1,x_2...x_m)] = \int_0^\infty t f_{T(x_1,x_2...x_m)}(t)dt = \int_0^\infty {}_tp_{x_1x_2...x_m}\,dt$$

5.3.2 Bigarren mailako taldeak

Bigarren mailako taldeak (The Last-Survivor status), m pertsonetako taldeak dira zeintzuk azkenengo heriotzarekin desagertzen diren (talde baten desagertzeari egiten dio erreferentzia) .

$T(\overline{x_1x_2...x_m})$ bezala azaltzen dugu bigarren mailako talde baten etorkizuneko bizitzari.

$$T(\overline{x_1x_2...x_m}) = max[T(x_1),T(x_2),...,T(x_m)]$$

$t>0$ denerako

$$F_{T(\overline{x_1,x_2,...,x_m})}(t) = {}_tq_{\overline{x_1x_2...x_3}} = \Pr(T(\overline{x_1,x_2,...,x_m}) \le t)$$
$$= \Pr\{max[T(x_1),T(x_2),...T(x_m)] \le t\} = 1-\Pr\{max[T(x_1),T(x_2),...T(x_m)] > t\}$$
$$= 1-{}_tp_{\overline{x_1x_2...x_3}}$$

$$f_{T(\overline{x_1,x_2,...,x_m})}(t) = \frac{d}{dt}\,{}_tq_{\overline{x_1x_2...x_m}} = {}_tp_{\overline{x_1x_2...x_m}}\,\mu_{\overline{x_1+t:x_2+t:...x_m+t}}$$

$$\mu_{\overline{x_1+t:x_2+t...x_m+t}} = \frac{-\frac{d}{dt}\,{}_tp_{\overline{x_1x_2...x_m}}}{{}_tp_{\overline{x_1x_2...x_m}}}$$

$$\bar{e}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = E\left[T(\overline{x_1, x_2 \ldots x_m})\right] = \int_0^{\infty} t f_{T(\overline{x_1, x_2 \ldots x_m})}(t)\,dt = \int_0^{\infty} {}_t p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}\,dt$$

6. GAIA

6 HILKORTASUN EREDUAK

6.1 HILKORTASUN EREDU EZBERDINAK

Zientzia aktuarialaren hasieratik, XVII. mendean, biziraupen funtzioa azaltzen duen adierazpen bat aurkitzea izan da helburua. Hurrengo gai honetan azalduko ditugu legeen eredu matematiko aipagarrienak zeintzuk azaltzen duten biziraupenaren portaera. Eredu hauek biziraupen funtzioaren formaren hipotesiak abiapuntu izanda proposatuko dira, edota berehalako hilkortasun zenbatekoaren funtzioaren formaren hipotesietatik hasita.

6.1.1 Moivre-ren legea

Moivre-ren legea ez dauka interes operatiborik, baina garrantzi handiko legea kontsideratzen da erreferentzi historiko bezala

Abraham De Moivre (1667-1754) matematikaria, kontuan hartu zuen, hasiera batean (1725, Gerber: 1724) biziraupen funtzioa adinarekiko progrezio geometrikoan beherakorra zela.

$$l_x = ar^x \qquad\qquad r < 1 \text{ izanda}$$

Baina hipotesi honek azkenean ez zen eraginkorra izan zeren urteko hilkortasun zenbatekoa x –ekiko independientea zen eta adin guztietarako berdina:

$$q_x = \frac{ar^x - ar^{x+1}}{ar^x} = 1 - r$$

$$q_{x+t} = \frac{ar^{x+t} - ar^{x+t+1}}{ar^{x+t}} = 1 - r$$

Beranduago, kontsideratu zuen biziraupen funtzioa lineala zela eta haren aldaketak progresio aritmetiko beherakor baten ondoriozkoak ziren.

$$l_x = a - bx \qquad b > 0 \text{ izanda}$$

$x = 0$ denerako, $l_x = l_0 = a$ eta $x = w$ denerako , $l_w = 0$, orduan

$$l_w = l_0 - bw = 0$$

Non muturreko adina *w* bada,

$$w = \frac{l_0}{b}$$

Lege honen arabera,

$$\mu_x = \frac{b}{l_0 - bx} = \frac{1}{\frac{l_0}{b} - x} = \frac{1}{w - x}$$

Eta kontuan izanda $\frac{d}{dx}\mu_x = \mu_x^2 > 0$ dela

Ondoriozta dezakegu μ_x adinarekiko gorakorra dela. Honek adierazten du legea zentzua izan dezan adin altuak kontuan hartu behar direla (zeren adin mota hauentzako berehalako hilkortasun zenbateko gorakorra dagokio)

Beste adierazpen batzuk:

$${}_n p_x = 1 - \frac{bn}{l_0 - bx}$$

Kontuan izanda berehalako hilkortasun zenbatekoaren adierazpena, ondorengoa lortzen dugu:

$${}_n p_x = 1 - n\mu_x$$

ondorioz

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = n\mu_x$$

Hilkortasun probabilitatea zuzenki proportzionala da berehalako hilkortasun zenbatekoari

$$e_x = \sum_{t=1}^{w-x} {}_t p_x = \sum_{t=1}^{w-x} (1 - t\mu_x) = (w - x) - \mu_x \sum_{t=1}^{w-x} t$$

Progresio aritmetiko baten batuketa denez zeinetan lehenengo balioa 1 den eta azkenengoa $w - x$, arrazioa 1 izanez eta $w - x$ gai kopurua izanda eta kontuan izanda $\mu_x = \frac{1}{w - x}$ dela ondorengoa dugu:

$$e_x = (w-x)(1-\mu_x \frac{1+w-x}{2}) = (w-x) - \frac{1+w-x}{2} = \frac{w-x-1}{2}$$

6.1.2 Dormoy- ren legea

6.1.2.1 Dormoy-ren lehenengo legea

Lehengoz Dormoy ezarri zuen berehalako hilkortasunen zenbatekoa konstantea zela adin guztietarako.

$$\mu_x = a$$

Hipotesi honetatik abiatuz biziraupen funtziorako ondorengo adierazpena lortzen da:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_t dt} = l_0 e^{-[at]_0^x} = l_0 e^{-ax}$$

Biziraupen funtzio, x –en funtzio esponentzial bat da eta honela adierazten da:

$$l_x = ks^x$$

$k = l_0$ eta $s = e^{-a}$ izanda

Adierazpen honetatik lortzen da hurrengoa:

$$_n p_x = \frac{ks^{x+n}}{ks^x} = s^n$$

Baina kasu honetan errealismo gabeko emaitza lortze da, zeren probabilitate hau ez dago gizabanakoaren adinaren menpe, baizik kontuan hartutako tartearen zabaltasunaren menpe soilik. Era berean $_n q_x = 1 - s^n$

Beste alde batetik batezbesteko bizitza laburtuaren emaitza ondorengoa da:

$$e_x = \sum_{t=1}^{w-x} {}_t p_x = \sum_{t=1}^{w-x} s^t$$

6.1.2.2 Dormoy-ren bigarrengo legea

Lehenengo legearen lortutako emaitz irrealak murrizteko xedearekin, Dormoy bigarren lege bat egin zuen zeinek kontsideratzen zuen berehalako hilkortasun zenbatekoan, lehenengo legean konstantea zena, bakarrik zoria eragina izan dezakeela hilkortasunaren indarrean, adinarekiko proportzionala dena.

$$\mu_x = hx \qquad h>0 \text{ izanda}$$

$\mu_x^{'} = h > 0$ izaterakoan x-rekiko funtzio gorakar bat daukagu. Eredu hau bakarrik adin handietan aplica daiteke bertan berehalako hilkortasun zenbatekoa gorakorra baita adinarekiko.
Berehalako hilkortasun zenbatekoaren adierazpenetik abiatuta biziraupen funtziorako ondorengo espresioa lortzen dugu:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x htdt} = l_0 e^{-\left[\frac{h}{2}t^2\right]_0^x} = l_0 e^{-\frac{h}{2}x^2}$$

Normalean horrela azaltzen dena:

$$l_x = ks_2^{x^2}$$

non $k = l_0$ eta $s_2 = e^{-\frac{h}{2}x^2}$ eta arrreko adierazpena kontuan izanda, hau lortzen da:

$${}_n p_x = \frac{ks_2^{(x+n)^2}}{ks_2^{x^2}} = s_2^{(2xn+n^2)}$$

Dormoy-ren lehenengo eta bigarrengo legeak batuz hau daukagu:

$$\mu_x = a + hx \qquad \text{h>0 izanda}$$

Eta hemendik biziraupen funtzioa ateratzen dugu:

$$l_x = ks^x s_2^{x^2}$$

Ez negatiboa den funtzioa, $l_x \geq 0$ edozein x-en baliorako, beherakorra, $l_x^{'} < 0$, eta ahurra jatorriarekiko $l_x^{''} < 0$

Kasu honetan biziraupen funtzioa agerian uzten du bai x adinarekiko eta baita kontuan hartutako tartearen zabaltasunarekiko, n –rekiko, dependentzia.

$${}_n p_x = s^n s_2^{n(2x+n)} = \left[ss_2^{(2x+n)}\right]^n$$

6.1.3 Gompertz-en legea

Benjamin Gompertz (1779-1865) heriotza bi kausa independienteei (1825) egozten dio: lehenengoa behin-behinekoa, aldez aurretik ezer jakin gabe, hau da, zoria, adibidez, istripu batek osasun oneko pertsona bat bizirik gabe utz dezakeelako; eta bigarrena, hondatze edo heriotza jasateko ahultze hazkorra, hau da, zahartzaroa, zeinek gizabanakoa ahultzen du pixkanaka pixkanaka. Hilkortasunaren indarra adinarekin hazten da.

Lehenengoagatik, adin guztietan bizirik dauden pertsonen kopuru handi bat badaukagu, haren bizitza soilik zoriaren arriskuaren aurrean badago, normala da adin horietako urteetan heriotzak proportzionalak izatea urte hasieran bizirik iraun duten kopuruari eta horrela izango dugu:

$$
\begin{aligned}
&l_{x+1} = l_x - hl_x = l_x(1-h) \\
&l_{x+2} = l_{x+1} - hl_{x+1} = l_x(1-h)^2 \\
&\ldots\ldots \\
&l_{x+n} = l_{x+n-1} - hl_{x+n-1} = l_x(1-h)^n
\end{aligned}
$$

Orduan, hilkortasunaren intentsitatea konstantea da eta adin bakoitzean bizirik irauten duten norbanakoak, hasierako taldetik datoztenak, gutxitu egingo dira progresio geometrikoan.

Heriotzaren arriskua progresiboki handitzen da gure organoen ahultzearen ondorioz: zahartzaroa, bizirik irauten duten norbanakoen kopurua murriztu egingo da baina progresio handiago batean. Murrizketa hau, adinarekiko proportzionala da eta denbora tarte berdinetan, tarte infinitu txikietan, bizi indarreko zati berdinak galtzen dira, horregatik, berehalako hilkortasunen zenbatekoa hazten da denborarekiko eta bere balioarekiko proportzionalki, zati infinituki txikietan, hau da:

$$d\mu_x = \ln c\mu_x dx$$

$\ln c$ proportzionaltasun koefizientea izanda, erraztazungatik horrela idazten dena (baita letra batetaz errepresenta daiteke, adibidez, h).

μ_x -etaz zatituz

$$\frac{d\mu_x}{\mu_x} = \ln c dx$$

$$\mu_x' = \ln c\mu_x$$

Orduan hau lortzen dugu berehalako hilkortasunaren zenbatekoarako:

$$\mu_x = bc^x$$

Adierazpen honetatik abiatuz lortzen dugu

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x bc^t dt} = l_0 e^{-\left[\frac{b}{\ln c}c^t\right]_0^x} = l_0 e^{-(\frac{b}{\ln c})(c^x - 1)}$$

Eta kontuan izanda: $k = l_0 e^{\frac{b}{\ln c}}$

$$g = e^{-(\frac{b}{\ln c})}$$

Lortzen dugu:

$$l_x = kg^{c^x}$$

Aurkeztutako planteamendu hau agerian uzten du eredu honek heriotzarako arrazaoi bakarra adina kontsideratzen duela. Era berean, azaltzen da nola berehalako hilkortasunaren zenbatekoa gorakorra da x –en edozein baliorako, beraz aplika daiteke adin altuetan. Gompertz-en legea ez da taula oso batera egokitzen, haurtzaroa eta zahartzaroa kanpoan utziz.

6.1.4 Makeham-en legea

6.1.4.1 Makeham-en lehenengo legea

Gompertz-en legea aztertuz, Guillermo Mateo Makeham (1860) nabaritu zuen lege hori hainbat hilkortasun taulei aplikatuz 20 eta 80 urteko tartean, berehalako hilkortasun zenabtekoa hobeto azaltzen zen konstante bat ezartzen bazen.

$$\mu_x = a + bc^x$$

Makeham –en ikuspuntu hau Gompertz-ek heriotza bi kausa orokorrei (Zoria eta zahartzaroari) egozten diolako ematen da, eta ondoren, formula ondorioztatzean edo l_x-en espresioa, bakarrik bigarrren kausa kontuan hartzen du.

Berehalako hilkortasun zenbatekoaren adierazpenetik abiatuta lortzen dugu:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x (a+bc^t)dt} = l_0 e^{-\left[at+\frac{b}{\ln c}c^t\right]_0^x} = l_0 e^{-ax-(\frac{b}{\ln c})(c^x - 1)}$$

Eta honako hau kontuan izanda: $k = l_0 e^{\frac{b}{\ln c}}$

$$g = e^{-(\frac{b}{\ln c})}$$

ondorioz:

$$l_x = Ks^x g^{c^x}$$

$$_n p_x = s^n g^{c^x (c^n - 1)}$$

Makeham-i kritikatzen zaio zoria kontuan hartu izanda ere, harentzako kontzeptu hori formulan konstante bat bezala azaltzen zuela eta denok dakigu estadistikoki ausazko aldagai bat dela.

Lortutako adierazpena haurren adinentzako ez da egokia (hilkortasun beherakorra).

6.1.4.2 Makeham-en bigarrengo legea

Gompertz-en legetik abiatuta eta malgutasun handiagoa emateko helburuarekin (1889, PITACCO) Makeham-en lehenengo legean aurkeztutako berehalako hilkortasun zenbatekoari gehitu zion adinarekiko proportzionala zen gai bat.

$$\mu_x = a + hx + bc^x$$

Berehalako hilkortasun zenbatekoaren adierazpenetik abiatuta

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x (a+ht+bc^t)dt} = l_0 e^{-\left[at + \frac{h}{2}t^2 + \frac{b}{\ln c}c^t\right]_0^x} = l_0 e^{-ax - \frac{h}{2}x^2 - (\frac{b}{\ln c})(c^x - 1)}$$

Eta kontuan izanda:

$$k = l_0 e^{\frac{b}{\ln c}}$$

$$s_1 = e^{-a}$$

$$s_2 = e^{-\frac{h}{2}}$$

$$g = e^{-(\frac{b}{\ln c})}$$

Ondorioztatzen dugu:

$$l_x = Ks_1^x s_2^{x^2} g^{c^x}$$

$$_n p_x = s_1^n s_2^{n^2 + 2xn} g^{c^x (c^n - 1)}$$

6.1.5 Lazarus-en legea

Gompertz eta Makeham-en legeak ez zirenez adin guztietara egokitzen (bakarrik 15 edo 20 urtetik hasita), Lázarus (1867, según Pitacco) lortu nahi izan zuen adierazpen bat zeinek adin guztietara egokitzen zen eta ulertu zuen elastikotasuna emateko Makeham-en legeari bakarrik forma egokia eman behar zitzaiola:

$$\mu_x = a + b_1 c_1^x + b_2 c_2^x$$

Berehalako hilkortasun zenbateren adierazpenetik abitatuta:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x (a+b_1c_1^t+b_2c_2^t)dt} = l_0 e^{-\left[at+\frac{b_1}{\ln c_1}c_1^t+\frac{b_2}{\ln c_2}c_2^t\right]_0^x} = l_0 e^{-ax-(\frac{b_1}{\ln c_1})(c_1^x-1)-(\frac{b_2}{\ln c_2})(c_2^x-1)}$$

Eta kontuan izanda: $k = l_0 e^{\frac{b_1}{\ln c_1}+\frac{b_2}{\ln c_2}}$

$$s = e^{-a}$$

$$g_1 = e^{-\frac{b_1}{\ln c_1}}$$

$$g_2 = e^{-\frac{b_2}{\ln c_2}}$$

Ondorioztatzen dugu: $l_x = Ks^x g_1^{c_1^x} g_2^{c_2^x}$

$$_n p_x = s^n g_1^{c_1^x(c^n-1)} g_2^{c_2^x(c^n-1)}$$

6.1.6 Beste lege batzuk

6.1.6.1 Janse-nen legea

$$\mu_x = a + b_1 c_1^x + b_2 c_2^x + b_3 c_3^x + \ldots$$

$$l_x = Ks^x g_1^{c_1^x} g_2^{c_2^x} g_3^{c_3^x} \ldots$$

6.1.6.2 Risser-en legea

Hilkortasun profesionalerako $\mu_x = a + c^x(b + hx)$

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x (a+c^t(b+ht)dt} = l_0 e^{-\left[at+\frac{b}{\ln c}c^t+ht\frac{c^t}{\ln c}-h\frac{c^t}{(\ln c)^2}\right]_0^x} = l_0 e^{-ax-c^x(\frac{b}{\ln c}-\frac{h}{(\ln c)^2})-c^x(\frac{hx}{\ln c})+\frac{b}{\ln c}-\frac{h}{(\ln c)^2}}$$

Eta kontuan izanda : $k = l_0 e^{\frac{b}{\ln c}-\frac{h}{(\ln c)^2}}$

$$s_1 = e^{-a}$$

$$s_2 = e^{-\frac{b}{\ln c} + \frac{h}{(\ln c)^2}}$$

$$s_3 = e^{-\frac{h}{\ln c}}$$

$$l_x = K s_1^x s_2^{c^x} s_3^{xc^x}$$

6.1.6.3 Weibull-en legea

$$\mu_x = kx^n$$

$$l_x = l_0 e^{-\frac{k}{n+1} x^{n+1}}$$

6.1.6.4 Babbage-n legea

$$l_x = a + bx + cx^2$$

6.1.6.5 Sang-en legea

$$l_x = a + kp^x$$

6.2 AKTUARIANAK

Bi gizabanako aktuarialki baliokide izango dira adin berdina badute, beraz, adin guztietarako bizi eta hilkortasun probabilitate bera izango dute

Gizabanako indibidualetaz hitzegin ordez, pertsona taldeetaz hitzegiten badugu, bi pertsona talde baliokide izango dira uniformeki zahartzen badira eta zehaztuago, bi talde baliokide edo uniformeki zahartzen direla esango dugu adin guztietarako hilkortasun edo biziraupen probabilitate bera dutenean edota berehalako zenbateko berdinak dituztenean. *t* –ren edozein baliorako betetzan da:

$$p_{x_1+t:x_2+t:\ldots x_m+t} = p_{y_1+t:y_2+t:\ldots y_s+t}$$

$$q_{x_1+t:x_2+t:\ldots x_m+t} = q_{y_1+t:y_2+t:\ldots y_s+t}$$

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots x_m+t} = \mu_{y_1+t:y_2+t:\ldots y_s+t}$$

Pertsona talde bat pertsona kopuru berdineko talde bati baliokide denean (denek adin berekoak) adin berdineko pertsona bakoitzari aktuariana deritzogu.

6.2.1 Aktuarianen propietateak

6.2.1.1 Lehenengo propietatea

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ adin desberdineko *m* pertsonako talde batek Gompertz-en legea jarraitzen badu, talde hau ordezkatu daiteke edozein aktuariana kopuruagatik berehalako hilkortasun zenbatekoaren adierazpena honela lortuz:

$$\mu_z = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \ldots + \mu_{x_m}}{r}$$

r aktuariana kopurua izanda.

Gompertz-en legearen aburuz

$$_t p_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = {}_t p_{x_1}\, {}_t p_{x_2} \cdots {}_t p_{x_m} = g^{c^{x_1}(c^t-1)} g^{c^{x_2}(c^t-1)} \ldots g^{c^{x_m}(c^t-1)} = g^{(c^{x_1}+c^{x_2}+\ldots+c^{x_m})(c^t-1)}$$

Adin desberdineko *m* pertsonetako taldea ordezkatu dezakegu beste gizabanako talde batetaz, denak adin berdinekoak, z, bizi, hilkortasun eta berehalako zenbatekoak berdinak diren heinean. Kasu honetan biziraupen probabilitateekin lan egingo dugu

$$_t p_{z:z:\ldots:z} = {}_t p_z\, {}_t p_z \cdots {}_t p_z = g^{c^z(c^t-1)} g^{c^z(c^t-1)} \ldots g^{c^z(c^t-1)} = g^{rc^z(c^t-1)}$$

talde biak aktuarialki baliokide izateko eta haien probabilitateak berdinak izateko ondorengoa bete behar da:

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m} = rc^z$$

Berdintasunaren bi atalak biderkatzen baditugu *b* zenbakitaz

$$bc^{x_1} + bc^{x_2} + \ldots + bc^{x_m} = rbc^z$$

Ondorengoa lortzen dugu $\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \ldots + \mu_{x_m} = r\mu_z$

6.2.1.2 Bigarren propietatea

$x_1, x_2, ..., x_m$ adin desberdineko *m* pertsonako talde batek Makeham-en legea jarraitzen badu, talde hau ordezkatu daiteke aktuariana kopuru berdin batengatik (adin berdineko pertsonak izanda),*m,* berehalako hilkortasun zenbatekoaren adierazpen hau lortuz:

$$\mu_z = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + ... + \mu_{x_m}}{m}$$

m hasierako taldeko pertsona kopurua eta aktuariana kopurua izanda.

Adin desberdineko *m* pertsonako taldeak ordezkatzen dugu pertsona talde batetaz, guztiak adin berdinekoak z, eta honetarako bete egin behar da biziraupen probabilitateak berdinak izatea.

Makeham-en legeren aburuz,

$${}_t p_{x_1:x_2:...:x_m} = s^t g^{c^{x1}(c^t-1)} s^t g^{c^{x2}(c^t-1)} ... s^t g^{c^{xm}(c^t-1)} = s^{mt} g^{(c^{x1}+c^{x2}+...+c^{xm})(c^t-1)}$$

$${}_t p_{z:z:...:z} = {}_t p_z \, {}_t p_z ... {}_t p_z = s^t g^{c^z(c^t-1)} s^t g^{c^z(c^t-1)} ... s^t g^{c^z(c^t-1)} = s^{rt} g^{rc^z(c^t-1)}$$

Bi taldeak aktuarialki baliokide izateko eta haien probabilitateak berdinak izateko *r=m* dela bete behar da eta

$$c^{x_1} + c^{x_2} + ... + c^{x_m} = mc^z$$

B zenbaki batetaz biderkatzen badugu berdintasunaren bi atalak eta *m* aldiz *a* batzen badugu

$$(a + bc^{x_1}) + (a + bc^{x_2}) + ... + (a + bc^{x_m}) = m(a + bc^z)$$

Ondorengoa lortzen dugu $\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + ... + \mu_{x_m} = m\mu_z$

6.2.1.3 Hirugarren propietatea

$x_1, x_2, ..., x_m$ adin desberdineko *m* pertsonako talde batek Gompertz-en edo Makeham-en legea jarraitzen badu eta gizabanako guztiak urte kopuru bera zahartzen badira, aktuarianak ere egingo du

Kontuan izanda aktuarianen lehenengo propietatea, talde batek Gompertz-en legea jarraitzen badu, ondorengo berdintasuna betetzen da:

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m} = rc^{z}$$

Orain suposatuko dugu hasierako taldeko gizabanako guztiek *h* urte zahartzen direla. Kasu honetan suposatzen dugu adin desberdineko *m* pertsonetako taldeak *h* urte zahartu direnak, ordezkatu dezakegula pertsona talde batetaz zeintzuk kide guztiek z^{*} urte kopuru berdina dutenak eta beraz,

$$c^{x_1+h} + c^{x_2+h} + \ldots + c^{x_m+h} = rc^{z^{*}}$$

Honela ere adieraz daitekeena:

$$c^{h}(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m}) = c^{h} rc^{z} = rc^{h+z}$$

$z^{*} = z + h$ dela frogatzen dugu , hau da, aktuariana *h* urte zahartzen dela.

Aktuarianen bigarren propietatea esaten digi *m* pertsonako talde batek Makeham-en legea jarraitzen badu ordezkatu dezakegu kide kopuru berdineko aktuarianen talde batetaz eta kasu horretan:

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m} = mc^{z}$$

Suposatzen dugu hasierako taldeko pertsona guztiek *h* urte zahartu direla. Kasu horretan adin desberdineko *m* pertsonako taldeak *h* urte zahartu direnak ordezkatzen dugu z° adin kopuru berdineko talde batetaz eta ondorioz

$$c^{x_1+h} + c^{x_2+h} + \ldots + c^{x_m+h} = mc^{z^{\circ}}$$

Horrela ere adieraz dezakeguna:

$$c^{h}(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m}) = c^{h} mc^{z} = mc^{h+z}$$

$z^{\circ} = z + h$, dela frogatzen dugu, hau da, aktuarianak *h* urte zahartzen da.

7. GAIA

7 IRTEERA ANITZEKO TAULAK

7.1 IRTEERA ANITZEKO TAULA BATEN OINARRIZKO FUNTZIOAK

Atal honetan azalduko dugu irteera bat baino gehiago kontuan hartzen duten taulen oinarrizko funtzioak, irteera anitzeko taulak deritzonak. Oinarrizko funtzioak irudikatzeko ez dago nomenklatura internazionalik, horregatik, amerikar notazioa erabiliko dugu.

Kontsideratzen badugu hasierako kolektiboa bezala langileen talde bat eraiki dezakegu taula bat, irtetzeko aukera ezberdinak kontuan hartzen dituena: heriotza, balioezintazuna, erretiroa eta enpresa uztea. Irteera anitzeko taula bat egiteko beste adibide bat izango litzateke kolektibo bat zein osatuta dagoen erkidego jakin bateko pertsonetaz, zeinetan aztertzen dugun erkidego horretako hilkortasun kausa ezberdinak

$l_x^{(T)}$ funtzioa (notazio ingelesan $(al)_x$ adierazpena erabiltzen dute) adierazten digu x adin zehatzeko hasierako kolektiboan parte hartzen duten pertsona kopurua j irteera kausen menpe dagoena. Lehen aipatutako adibidean, langileen taldeei erreferentzia egiten zaiona, j 4 izango litzateke.

Hasierako kolektibotik x adinean k kausatik irtetzen den pertsona kopurua, j irteera kasuen menpean, $d_x^{(k)}$ bezala adierazten dugu(ingeles notazioan $(ad)_x^k$) eta hasierako taldetik x adinean irten den pertsona kopuru guztia j irteera kausengatik adierazten dugu $d_x^{(T)}$ bezala (ingeles notazioan $(ad)_x$).

$$d_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{j} d_x^{(k)}$$

$$l_{x+1}^{(T)} = l_x^{(T)} - d_x^{(T)}$$

$L_x^{(T)}$ hasierako taldeko parte diren x adin betea duen pertsona kopurua

$$L_x^{(T)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(T)} dt$$

Urte batena zehar banaketa uniformearen teoria kontuan hartzen badugu

$$l_{x+t}^{(T)} \approx l_x^{(T)} - t d_x^{(T)} \qquad 0 < t < 1 \text{-rako}$$

Ondorengo erlazioa ezarri dezakegu:

$$L_x^{(T)} = \int_0^1 \left[l_x^{(T)} - t d_x^{(T)} \right] dt = l_x^{(T)} - \tfrac{1}{2} d_x^{(T)}$$

Orain irteera anitzeko urteko zenbatekoak definitzera pasako gara. Hasierako talde batetik,

j irteeren menpe dagoena, urteko irteera zenbatekoa, x adinerako, k kausarengatik $q_x^{(k)}$ bezala adierazten da (ingeles notazioan $(aq)_x^k$).

$$q_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(T)}}$$

Hasierako taldetik kontsideratutako j kausengatik urteko irteera zenbatekoa x adinerako $q_x^{(T)}$ bezala azaltzen dugu (ingeles notazioan $(aq)_x$).

$$q_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} = \frac{\sum_{t=1}^{j} d_x^{(k)}}{l_x^{(T)}} = \sum_{k=1}^{j} q_x^{(k)}$$

Hasierako talde batetik x adinerako urteko biziraupen zenbatekoa adierazten digu x adineko pertsona batek hurrengo urtean taldetik irten ez dadilaren probabilitatea edo berdina dena, hasierako taldearen barnean x+1 adina betetzea. Urteko zenbatekoa adierazteko erabiliko dugun espresioa hau da $p_x^{(T)}$ (ingeles notazioan $(ap)_x$).

$$p_x^{(T)} = \frac{l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$$p_x^{(T)} + q_x^{(T)} = 1$$

Zenbateko zentralei dagokionez, hasierako taldearen, x adineko, irteera zenbateko zentrala k kausa dela medio $m_x^{(k)}$ eta irteera zenbateko zentrala x adinerako kontsideratutako j kasuak direla eta $m_x^{(T)}$ honela adierazten dira:

$$m_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{L_x^{(T)}}$$

$$m_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(T)}}$$

$$m_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{j} m_x^{(k)}$$

Irteeren banaketa uniformearen hipotesia erabiliz, lortzen dugu irteera zenbateko zentralen espresioa hasierako taldeko urteko irteeren zenbatekoaren menpe daudela.

$$m_x^{(T)} = \frac{d_x^{(T)}}{l_x^{(T)} - \frac{1}{2} d_x^{(T)}} = \frac{q_x^{(T)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(T)}}$$

$$m_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(T)} - \frac{1}{2} d_x^{(T)}} = \frac{q_x^{(k)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(T)}}$$

Urte bat baino gehiagoko tarteak hartzen baditugu, hasierako taldean, biziraupen eta irteera probabilitateak urteko zenbatekoak bezala portatzen dira.

Irteera anitzeko taulen beste funtzio oinarrizkoa berehalako zenbatekoa da. Hasierako taldearen berehalako irteera zenbatekoa kontsideratzen diren edozein j kausengatik $\mu_{x+t}^{(T)}$ bezala azaltzen dugu (ingeles notazioan $(a\mu)_{x+t}$).

$$\mu_{x+t}^{(T)} = \lim_{h\to 0}\frac{{}_h q_{x+t}^{(T)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-{}_h p_{x+t}^{(T)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{l_{x+t}^{(T)} - l_{x+t+h}^{(T)}}{h l_{x+t}^{(T)}} = -\frac{1}{l_{x+t}^{(T)}}\frac{d}{dt}l_{x+t}^{(T)} = -\frac{d}{dt}Ln\,{}_t p_x^{(T)}$$

Erlazio honetatik abiatuz $\mu_{x+t}^{(T)} = -\frac{d}{dt}Ln\,{}_t p_x^{(T)}$

$$\int_0^1 \mu_{x+t}^{(T)}dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}Ln\,{}_t p_x^{(T)}dt$$

Iristen gara hasierako taldean urtean bizirik irauteko zenbatekoaren adierazpenera, kontsideratutako j kausen berehalako irteeren zenbatekoaren menpe dagoena.

$$p_x^{(T)} = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(T)}dt}$$

Hasierako taldeko j kausa bakoitzerako berehalako irteera zenbatekoa definitzeko lehenengo kontuan hartu behar dugu $l_x^{(k)}$ funtzioa, adierazten diguna hasierako taldean parte hartzen dutenetatik x adina betetzen duten pertsona kopurua eta etorkizunean k kausatik taldetik aterako direnak:

$$l_x^{(k)} = \sum_{y=x}^{\infty} d_y^{(k)} \quad k = 1,2,\ldots,j \text{ izanik}$$

$$d_x^{(k)} = l_x^{(k)} - l_{x+1}^{(k)}$$

$$l_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{j} l_x^{(k)}$$

Hasierako taldeko berehalako irteera zenbatekoa k kausarengatik $\mu_{x+t}^{(k)}$ bezala azaltzen da eta honela definitzen da:

$$\mu_{x+t}^{(k)} = \lim_{h\to 0}\frac{{}_h q_{x+t}^{(k)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{l_{x+t}^{(k)} - l_{x+t+h}^{(k)}}{h l_{x+t}^{(T)}} = -\frac{1}{l_{x+t}^{(T)}}\frac{d}{dt}l_{x+t}^{(k)}$$

$$\mu_{x+t}^{(T)} = \sum_{k=1}^{j} \mu_{x+t}^{(k)}$$

$\mu^{(k)}_{x+t}dt$ *t* eta *t+dt* tartearen artean *k* kausarengatik irtetzeko dagoen probabilitatea adierazten du kontsideratuz ez direla irteerarik emango *t*[11] denbora baino lehen.

Irteera anitzeko taulen funtzioen adierazpenak, berehalako zenbatekoen terminoetan hauek dira:

$$d^{(k)}_x = \int_0^1 l^{(T)}_{x+t}\mu^{(k)}_{x+t}dt$$

$${}_np^{(T)}_x = e^{-\int_0^n \mu^{(T)}_{x+t}dt}$$

$${}_nq^{(T)}_x = \int_0^n {}_tp^{(T)}_x \mu^{(T)}_{x+t}dt$$

$${}_nq^{(k)}_x = \int_0^n {}_tp^{(T)}_x \mu^{(k)}_{x+t}dt$$

7.2 IRTEERA BAKARREKO TAULEKIKO ERLAZIOA

Irteera anitzeko tauletan irteera bakoitzeko irteera bateko taula bat eraiki daiteke, bakarrik irteera horretako propietate partikularren menpe dagoena.

Irteera anitzeko tauletan *j* irteera kausa kontuan hartzen dira. Irteera bakarreko tauletan bakarrik *k* irteera kausa kontuan hartzen da besteak ezabatu balitz bezala.

Irteera bakarreko taulen funtzioak irteera anitzeko taulekiko ezarrita, honela definitzen dira:

$${}_np^k_x = e^{-\int_0^n \mu^k_{x+t}dt}$$

$${}_nq^k_x = \int_0^n {}_tp^k_x \mu^k_{x+t}dt$$

$${}_np^k_x + {}_nq^k_x = 1$$

${}_np^k_x$ eta ${}_nq^k_x$ adierazpenak(kasu honetan ez dugu ez amerikar ezta ingeles nomenklatura jarraitzemen . ameritar notazioa, ${}_np'^{(k)}_x$ eta ${}_nq'^{(k)}_x$) izendatzen dira irteera probabilitate garbiak, beste ireteera kausengatik garbiak izategatiak . Probabilitate hauek izendatzeko erabilitako beste termino batzuk: irteera probabilitate independientea edo irteera probabilitate absolutua.

---

[11] BOWERS, GERBER, HICKMAN, JONES and NESBITT (1997). *Actuarial mathematics.* The Society of Actuaries.

Irteera anitzeko taula eta irteera bakarreko taulen arteko erlazioa zehazteko kontsideratzen dugu ondorengo hipotesi hau: edozein *k* kausako berehalako irteera zenbatekoa ez dagoenez denbora tarte konkretu batean zehaztuta non irteera kausa ezberdinak eragin diezaioke, kontuan hartzen da funtzio independiente bat dela beste irteera kausekiko eta orduan

$$\mu_x^k \approx \mu_x^{(k)}$$

Hipotesi honen menpe

$${}_n p_x^{(T)} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}^{(T)} dt} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}^1} e^{-\int_0^n \mu_{x+t}^2} \ldots e^{-\int_0^n \mu_{x+t}^j} = {}_n p_x^1 \, {}_n p_x^2 \cdots {}_n p_x^j$$

non

$${}_n p_x^{(T)} = \prod_{k=1}^{j} {}_n p_x^k$$

eta

$${}_n q_x^{(T)} = 1 - {}_n p_x^{(T)} = 1 - \left[(1 - {}_n q_x^1)(1 - {}_n q_x^2) \ldots (1 - {}_n q_x^j)\right]$$

Lortutako erlazioak kontuan izanda ezarri dezakegu:

$${}_t p_x^k \geq {}_t p_x^{(T)}$$

eta

$${}_t p_x^k \mu_{x+t}^k \geq {}_t p_x^{(T)} \mu_{x+t}^{(k)}$$

ondorioz

$$q_x^k = \int_0^1 {}_t p_x^k \mu_{x+t}^k dt \geq \int_0^1 {}_t p_x^{(T)} \mu_{x+t}^{(k)} dt = q_x^{(k)}$$

Irteera anitzeko eta irteera bakarreko taulen artean lortutako funtzioen artean interes handiko beste erlazio batzuk hipotesi honen menpean agertzen dira:

$${}_n m_x^k \approx {}_n m_x^{(k)}$$

Kontsideratzen badugu k kausarekiko irteera zenbateko zentralaren adierazpena k kausarekiko urteko hilkortasun zenbatekoaren menpe

$$m_x^k = \frac{d_x^k}{L_x^k} \approx \frac{d_x^k}{\frac{l_x^k + l_{x+1}^k}{2}} = \frac{q_x^k}{1 - \frac{1}{2} q_x^k} = \frac{2 q_x^k}{2 - q_x^k}$$

Eta kontuan hartzen badugu finkatutako azkenengo hipotesia,

$$q_x^k = \frac{2 m_x^k}{2 + m_x^k} \approx \frac{2 m_x^{(k)}}{2 + m_x^{(k)}} = \frac{2 \dfrac{q_x^{(k)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(T)}}}{2 + \dfrac{q_x^{(k)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(T)}}} = \frac{2 q_x^{(k)}}{2 - q_x^{(T)} + q_x^{(k)}}$$

Lortzen dugu irteera bakarreko taula baten eta irteera anitzeko taularen arteko k kausarekiko urteko irteera zenbatekoaren erlazioa.

Kontuan izanda $q_x^{(T)} = q_x^{(k)} + q_x^{(-k)}$, $q_x^{(-k)} = \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{j} q_x^{(h)}$ izanda, adieraz dezakegu aurreko erlazioa honela:

$$q_x^k = \frac{2q_x^{(k)}}{2 - q_x^{(-k)}}$$

Suposatuz irteera bakarreko hainbat taulen urteko irteera zenbatekoaren datuak ezagutzen ditugula zeinekin eraiki nahi dugun irteera anitzeko taula bat , ezarriko ditugu kontsideratutako j irteera kausa bakoitzaren urteko irteera zenbatekoa lortzeko adierazpenak.

Irteera bakarreko taula bakoitzaren irteeren banaketa uniformearen hipotesitik abiatuta

$$ {}_tp_x^k = 1 - tq_x^k \quad \text{non } k\text{=1,2,...,j} \quad \text{eta} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\frac{d}{dt}{}_tq_x^k = -\frac{d}{dt}{}_tp_x^k = {}_tp_x^k \mu_{x+t}^k = q_x^k$$

$$q_x^{(k)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \mu_{x+t}^{(k)} dt = \int_0^1 {}_tp_x^1\, {}_tp_x^2 \cdots {}_tp_x^j \mu_{\cdot+t}^{(k)} \approx q_x^k \int_0^1 \prod_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{j} (1 - {}_tq_x^h) dt$$

Adibide bezala hartzen badugu 3 irteerako taula baten eraikitzea, irteera bakarreko 3 taulen datuetatik abiatuta , urteko irteera zenbatekoen balioak honela lortzuko ditugu:

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \mu_{x+t}^{(1)} dt \approx \int_0^1 {}_tp_x^1\, {}_tp_x^2\, {}_tp_x^3 \mu_{x+t}^1 dt = q_x^1 \int_0^1 (1 - tq_x^2)(1 - tq_x^3) dt \\ &= q_x^1 \left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x^2 + q_x^3) + \tfrac{1}{3} q_x^2 q_x^3\right] \end{aligned}$$

Eta era berean

$$q_x^{(2)} = q_x^2 \left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x^1 + q_x^3) + \tfrac{1}{3} q_x^1 q_x^3\right]$$

$$q_x^{(3)} = q_x^3 \left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x^1 + q_x^2) + \tfrac{1}{3} q_x^1 q_x^2\right]$$

Beraz,

$$q_x^{(T)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} = q_x^1 + q_x^2 + q_x^3 - \left[q_x^1 q_x^2 + q_x^1 q_x^3 + q_x^2 q_x^3\right] + q_x^1 q_x^2 q_x^3$$

Beste alde batetik, $m_x^{(k)} \approx m_x^k$ hipotesia kontuan izanda, eta suposatuz irteera bakarreko taulen j-ren urteko irteera zenbatekoaren balioa ezagutzen dugula, ondorengo erlazioekin:

$$m_x^k = \frac{2q_x^k}{2 - q_x^k}$$

$$m_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{j} m_x^{(k)} \approx \sum_{k=1}^{j} m_x^k$$

Lortzen dugu irteera anitzeko taulen urteko irteera zenbatekoaren balioa:

$$q_x^{(T)} = \frac{2m_x^{(T)}}{2 + m_x^{(T)}}$$

$$q_x^{(k)} = \frac{2m_x^{(k)}}{2 + m_x^{(T)}}$$

Gai honetan azaldutako adierazpen batzuk, hainbat pertsonei dagozkion funtzio biometrikoei antzekotasun handia ematen zaio , adibidez,

$$p_x^{(T)} = p_x^1 p_x^2 \ldots p_x^j$$

$$\mu_x^{(T)} = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} + \ldots + \mu_x^{(j)}$$

8. GAIA

8 EGOERA FISIKOAREN ARABERAKO BIZTANLERIA

8.1 OINARRIZKO FUNTZIOAK

Gai honetan aztertuko dugu biztanteri baten egoera fisikoa balioezintasun taulen funtzioen ikerkuntza bat eginez. Garrantzizkoa da balioezintasuna definitzea taulak eraiki eta besteren esperientzia taula aplikatu baino lehen, zeren, hilkortasunean ez bezala, ez dago balioezintasunerako definizio bakar bat.

Haren egoera fisikoaren araberako biztanleria l_x-en balioak hartzen baditugu, biziraupen taula orokor bat eraikitzearen emaitzekoak, bi taldetan banatzen da biztanleri hori: pertsona aktiboak eta balioezinak.

- Gizabanako aktiboak edo aktibo egoeran daudenak.

Talde hau adin jakin batean aktibo moduan aurkitzen diren pertsonak osatzen dute. Irteerak edo taldeko ezgaiak emango dira bai balioezintasunengatik (gizabanako aktiboak balioezin bihurtzen direnak) eta bai hiltzeagarik. Sarrerei dagokionez, birgaituak aurkitzen ditugu, orain ezarritako moduan eman daitezkeenak:
l_x^{ia}, balioezinetako talde batetik, errekuperatzen direnak eta berriz x adineko aktiboen taldera pasatzen diren pertsona kopurua da.

Orainarte, aktibo egoerara itzultzearen fenomenoa edo birgaitzea ez du begirunerik merezi izan haren huskeriagatik eta horregatik ez da kontuan hartzen. Era honetan gizabanako aktiboen taldea, talde itxi bat kontsideratzen da non ez dauden sarreraik ematen eta irtetzeko aukerak heriotza edo balioezintasuna dira.

Orainarte esandakoarekin, l_x^{aa} hasierako talde aktiboetatik abiatuta x adinenean aktibo moduan bizirik irauten duten pertsona kopurua bezala definitzen dugu (Egia esa honen símbolo zuzena l_x^{a} izango litzateke, talde itxi bat izateagatik, baina liburu eta tauletan orokorki l_x^{aa} erabiltzen da).

- Gizabanko balioezinak edo balioezintasun egoeran.

Talde hau adin zehatz batean aurkitzen diren balioezin gizabanakoen kopuruak osatzen du. Talde honetan egongo dira, bai aurreko taldean balioezin diren pertsonetatik datozten kopurua eta baita balioezin berrien kopurua

Duela gutxi balioezin bihurtu diren pertsona kopurua l_x^{ai} bezala agertzen da eta aktiboen taldetik abiatuta, balioezin bihurtu direnak eta x adina balioezin bezala beteko dutenak dira.

Balioezinen taldea, talde ireki bat da zeinetan sarrera berriak eman daitezke balioezin berriak direla medio, eta taldearen irteerak soilik heriotza dela eta emanda daitezke, ez delako birgaitzea onartzen.

l_x^{ii} bezala azaltzen dugu x adinean bizirik irauten duten balioezin pertsona kopurua bezala edo x adina balioezin bezala betetzen duten gizabanako kopurua.

Azaldatukoaz aparte (l_x, l_x^{aa}, l_x^{ii}) taula aktuarialetan aurkitzen dugu l_x^i azaltzen duela, balioezin talde itxi batetik abiatuta, zienetan taldearen desagertzea soilik heriotza dela medio eman daiteke, x adina betetzen duen pertsona kopura da

Tauletan erabilitatako datuak ezagututa, haien arteko erlazioak zehaztera pasatako gara eta horretarako kontuan hartu behar dugu aktiboen eta balioezinen hilkortasun taulak eraikitzen direla Aseguru entitateen esperentzia kontuan izanda, zeinetan, asegurudun bakoitzak aseguratuen taldera sartzeko momentuan aktibo egoeran aurkitzen da. Beste alde batetik, ikerketa interesgarria da langileen taldearentzako zeren hauek dira batez ere balioezintasun prestazioak eta horregatik hasierako adina bezala $x_0 \neq 0$ hartzen da, hau kontuan izanda

$$l_{x_0} = l_{x_0}^{aa} \text{ eta } l_{x_0}^{ii} = 0$$

$x > x_0$, $l_x^{aa} < l_x$ denerako zeren $l_x = l_x^{aa} + l_x^{ii}$

Balioezinek aktiboekin konparatuta hilkortasun ezberdina dute, handiagoa, normala dena. Adina handitzen den heinean ezberdintasun hauek moteltzen dira eta zahartzaroko adinetara iristean balioezintasun ia ez du eraginik hilkortasunean. Beste alde batetik, balioezin bihurtu zenetik denbora pasatzen den heinean hilkortasuna, hilkortasun normalera hurbiltzen da, batez ere balioezina gaztea denean.

Esan dugun moduan aktiboen taldeko irteerark bi kausa direla medio eman daitezke: balioezintasuna eta aktibioen heriotza dela eta. Beraz, azalduko ditugu aktiboen taldeko irteeren funtzioak.

I_x x adina aktibo moduan betetzen duten pertsona kopurua eta balioezin egoera lortzen dutenek x+1 adina bete baino lehen. Ez da nazioarteko sinboloa eta beraz sinbolo ezberdinak aurkitzen ditugu gauza bera adierazteko, adibidez, Jordan-en liburuan i_x bezala azaltzen da.

d_x^{aa} x adina aktibo moduan betetzen duten pertsona kopurua eta aktibo moduan x+1 adina bete baino lehen hiltzen direna pertsona kopurua.

Era berean, x adinean balioezin bihurtzen diren pertsona kopurua I_x bezala azaltzen da eta honela osatuta dago:
d_x^{ai} x adina aktibo moduan betetzen duten pertsona kopurua eta balioezin bihurtzen direnak eta x+1 adina bete baino lehen balioezin bezala hiltzen direnak dira .
l_{x+1}^{ai} Aktiboen talde batetik abiatuta x adina aktibo moduan betetzen dutenak, balioezin bihurtzen dira eta x+1 adina balioezin bezala betetzen duten pertsona kopurua .

Beste alde batetik, eta balioezinen taldeari dagokionez, bakarrik irteera kausa batekin aurkitzen gara heriotza ez delako birgaitzea kontsideratzen eta horrela adierazten dugu:
d_x^{ii} x adina balioezin bezala betetzen duten pertsona kopurua eta balioezin bezala hiltzen direnak x+1 adina bete baino lehen (Jordan-en liburuan x adinean hildako balioezinen kopuruari egiten dio erreferentzia).

Balioezinen taldea itxia kontsideratzen badugu l_x^i, x adineko heriotz kopurua d_x^i bezala azaltzen da.

Ezarri ditzakegun hainat erlazio definitu ditugun funtzioak kontuan izanda:

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} - I_x - d_x^{aa}$$

Nondik lortzen dugun:

$$d_x^{aa} = l_x^{aa} - l_{x+1}^{aa} - I_x$$

$$I_x = l_x^{aa} - l_{x+1}^{aa} - d_x^{aa}$$

Kontuan izanda

$$I_x = d_x^{ai} + l_{x+1}^{ai}$$

Balioezinen taldeari dagokionez,

$$l_{x+1}^{ii} = l_x^{ii} - d_x^{ii} + l_{x+1}^{ai}$$

$$l_{x+1}^{i} = l_x^{i} - d_x^{i}$$

Orain biztanleriaren egoera fisikoa dela eta urteko zenbatekoak definitzera pasako gara.

x adineko aktiboen talde batetik abiatuta, l_x^{aa}, zeinetan urte bateko denbora tartean I_x balioezintasun bihurketa kasuak dauden, erlazioa ondorengoa da:

$$i_x = \frac{I_x}{l_x^{aa}}$$

Ematen digu urteko balioezintasun zenbatekoa, i_x, adierazten diguna x adina aktibo moduan betetzen duen gizabanako x+1 adina bete baino lehen balioezin bihurtzeko duen probabilitatea.

Urteko biziraupen zenbatekoei dagokionez azaldu dezakegu:
p_x^{aa} x adina aktibo moduan betezen duen gizabanakoa x +1 adina aktibo moduan betetzeko duen probabilitatea edo aktibo moduan urte bat gehiago bizitzeko probabilitatea. Pertsona aktibo baten aktibo moduan jarraitzeko urteko biziraupen zenbatekoa.

$$p_x^{aa} = \frac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}}$$

p_x^{ai} x adina aktibo moduan betetzen duen pertsona batek x +1 adina balioezin bezala betetzeko duen probabilitatea. Balioezin bihurtzen den pertsona aktibo baten urteko biziraupen zenbateko.

$$p_x^{ai} = \frac{l_{x+1}^{ai}}{l_x^{aa}}$$

p_x^{a} x adina aktibo moduan betetzen duen pertsona batek x +1 adina bai aktibo moduan edota balioezin moduan betetzeko duen probabilitatea. Hasiera batean aktiboa den pertsona baten urteko biziraupen zenbatekoa.

$$p_x^{a} = \frac{l_{x+1}^{aa} + l_{x+1}^{ai}}{l_x^{aa}} = P_x^{aa} + P_x^{ai}$$

p_x^{i} Balioezin talde itxiko partea den x adineko pertsona batek x +1 adina betetzeko probabilitatea. Balioezin pertsona baten urteko biziraupen probabilitatea.

$$p_x^{i} = \frac{l_{x+1}^{i}}{l_x^{i}}$$

Urteko hilkortasun zenbatekoei dagokionez definitu dezakegu:
q_x^{aa} x adina aktibo moduan bete duen pertsona batek, egoera horretan x+1 adina bete baino lehen hiltzeko duen probabilitatea. Pertsona aktibo baten urteko hilkortasun zenbatekoa aktibo moduan

$$q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}}$$

q_x^{ai} x adina aktibo moduan betetzen duen probabilitatea, balioezin bihurtzen dena eta x+1 adina bete baino lehen balioezin bezala hiltzeko duen probabilitatea.probabilidad. Balioezin bihurtzen den pertsona aktibo baten urteko hilkortasun zenbatekoa.

$$q_x^{ai} = \frac{d_x^{ai}}{l_x^{aa}}$$

q_x^{a} x adina aktibo moduan betetzen duen pertsona batek x +1 adina bete baino lehen hiltzeko duen probabilitatea bai aktibo moduan edota balioezin moduan. Hasiera batean aktiboa zen pertsona baten urteko hilkortasun zenbatekoa bai aktibo edo bai balioezin bezala.

$$q_x^{a} = \frac{d_x^{aa} + d_x^{ai}}{l_x^{aa}}$$

Nondik ondorioztatzen den: $q_x^{a} = q_x^{aa} + q_x^{ai}$

q_x^{i} x adina balioezin bezala betetzen duen pertsona batek x +1 adina bete baino leen hiltzeko probabilitatea. Balioezin baten urteko hilkortasun zenbatekoa..

$$q_x^{i} = \frac{d_x^{i}}{l_x^{i}}$$

8.2 DEFINITUTAKO OINARRIZKO FUNTZIOEN ARTEKO ERLAZIOAK

$$P_x^{aa} = \frac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}} = \frac{l_x^{aa} - d_x^{aa} - I_x}{l_x^{aa}} = 1 - q_x^{aa} - i_x$$

Beraz ondorioztatzen da:

$$p_x^{aa} + q_x^{aa} + i_x = 1$$

Beste alde batetik,

$$i_x = \frac{I_x}{l_x^{aa}} = \frac{d_x^{ai} + l_{x+1}^{ai}}{l_x^{aa}} = p_x^{ai} + q_x^{ai}$$

Zimmermann-en oinarrizko funtzioak izendaturiko espresioak lortzen ditugu

$$i_x = p_x^{ai} + q_x^{ai}$$

$$p_x^{a} = p_x^{aa} + p_x^{ai}$$

$$q_x^{a} = q_x^{ai} + q_x^{aa}$$

Aurreko adierazpenetatik abiatuta lortzen dugu:

$$p_x^a + q_x^a = (p_x^{aa} + p_x^{ai}) + (q_x^{aa} + q_x^{ai}) = p_x^{aa} + q_x^{aa} + i_x = 1$$

$$p_x^a + q_x^a = 1$$

Balioezinen talde itxiari dagokionez:

$$q_x^i = \frac{d_x^i}{l_x^i} = \frac{l_x^i - l_{x+1}^i}{l_x^i} = 1 - p_x^i$$

$$q_x^i + p_x^i = 1$$

$x+1$ adina aktibo moduan betetzen duten pertsona kopurua horrela lor dezakegu:

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} p_x^{aa} = l_x^{aa}(1 - q_x^{aa} - i_x)$$

$x+1$ adineko balioezin pertsonen kopurua honela burutzen da:
-x adina balioezin bezala bete duten pertsonen kopuruetatik x +1 adina balioezin bezala betetzen dutenak.

$$l_x^{ii} p_x^i$$

- x adina aktibo moduan bete duten pertsonen artetik adin horretan balioezin bihurtzen direnak eta x +1 adina balioezin bezala betetzen dutenak. Balioezintasunen banaketa uniformearen hipotesitik abiatuta, onartzen dugu balioezin berri hauek, I_x, hiltzeko arriskua jasan dezaketeela urte erdi baten tartean eta beraz x+1 adina balioezin berrien artean betetzen duten pertsona kopurua hau izango litzateke:

$$l_{x+1}^{ai} = l_x^{aa} i_x \left[1 - \frac{1}{2} q_x^i\right] = I_x \left[1 - \frac{1}{2} q_x^i\right] = l_x^{aa} p_x^{ai}$$

Beraz,

$$l_{x+1}^{ii} = l_x^{aa} i_x \left[1 - \frac{1}{2} q_x^i\right] + l_x^{ii} p_x^i$$

Eta hildako kopuruari dagokionez:

$$d_x^{aa} = l_x^{aa} q_x^{aa} = l_x^{aa}(1 - p_x^{aa} - i_x) = l_x^{aa} - l_{x+1}^{aa} - I_x$$

$$d_x^{ai} = l_x^{aa} i_x \, {}_{1/2}q_{x+\frac{1}{2}}^i \approx l_x^{aa} i_x \frac{1}{2} q_x^i$$

$$d_x^{ii} = l_x^{ii} q_x^i$$

Beste alde batetik ondorengo erlazioak ezarri ditzakegu:

$$p_x^{ai} = i_x\left[1 - \frac{1}{2}q_x^i\right] = i_x\frac{2 - q_x^i}{2} = i_x\frac{1 + p_x^i}{2}$$

$$q_x^{ai} = \frac{d_x^{ai}}{l_x^{aa}} = \frac{l_x^{aa}i_x\frac{1}{2}q_x^i}{l_x^{aa}}$$

Laceras irakasleak Hamza-ri egozten dio adierazpen hauek baina beste egileen aburuz Schaertlin-i dagokio.

8.3 BIZTANLERI OROKORREKO TAULAKO FUNTZIOEKIN DAUDEN ERLAZIOAK

Biztanleri orokorreko taula batek *x* adinean emandako heriotz kopuruaren funtzioarekin hasiko gara.

$$\begin{aligned}
d_x &= l_x - l_{x+1} = \left(l_x^{aa} + l_x^{ii}\right) - \left(l_{x+1}^{aa} + l_{x+1}^{ii}\right) = l_x^{aa} - l_{x+1}^{aa} + l_x^{ii} - l_{x+1}^{ii} \\
&= l_x^{aa} - (l_x^{aa} - d_x^{aa} - I_x) + l_x^{ii} - (l_x^{ii} - d_x^{ii} + l_{x+1}^{ai}) \\
&= d_x^{aa} + (d_x^{ai} + l_{x+1}^{ai}) + d_x^{ii} - l_{x+1}^{ai} = d_x^{aa} + d_x^{ai} + d_x^{ii}
\end{aligned}$$

Nondik lortzen dugun:

$$d_x = d_x^{aa} + d_x^{ai} + d_x^{ii}$$

Era berean ezarri dezakegu:

$$l_x q_x = l_x^{aa}\left(q_x^{aa} + q_x^{ai}\right) + l_x^{ii}q_x^i = l_x^{aa}q_x^a + l_x^{ii}q_x^i$$

Erlazio honetatik abiatuta:

$$\left(l_x^{aa} + l_x^{ii}\right)q_x = l_x^{aa}q_x^a + l_x^{ii}q_x^i$$

Eta berdintasunaren bi atalak l_x^{aa} -az zatituz

$$q_x + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}q_x = q_x^a + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}q_x^i = q_x^{aa} + q_x^{ai} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}q_x^i$$

q_x^{ai} balioak ez direnez tauletan agertzen, balio hori askatuko dugu eta lortuko dugu adierazpen bat taulek emandako datuetatik abiatuta.

$$q_x^{ai} = q_x - q_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}(q_x - q_x^{i})$$

Galbrun-en adierazpena bezala ezagutzen den espresioa lortzen dugu.

$l_x^{ii} = l_x - l_x^{aa}$ dela kontsideratzen badugu Schaertlin bezala ezaguntzen dugun adierazpenera iritsiko gara.

$$q_x^{ai} = q_x^{i} - q_x^{aa} + \frac{l_x}{l_x^{aa}}(q_x - q_x^{i})$$

Era berean lan egin dezakegu biziraupen probabilitateekin:

$$l_x p_x = l_x^{aa}\left(p_x^{aa} + p_x^{ai}\right) + l_x^{ii} p_x^{i} = l_x^{aa} p_x^{a} + l_x^{ii} p_x^{i}$$

Honako erlaziotik abiatuta:

$$\left(l_x^{aa} + l_x^{ii}\right)p_x = l_x^{aa}\left(p_x^{aa} + p_x^{ai}\right) + l_x^{ii} p_x^{i}$$

Eta berdintasunaren bi atalak l_x^{aa}-etaz zatitzen badugu:

$$p_x + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}} p_x = p_x^{a} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}} p_x^{i} = p_x^{aa} + p_x^{ai} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}} p_x^{i}$$

p_x^{ai}-ren balio kalkulatzeko asmoarekin, ez denez tauletan agertzen, balio hori askatuko dugu eta beraz lortuko dugun adierazpen tauletan agertzen diren balioen menpe aurkituko da

$$p_x^{ai} = p_x - p_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}(p_x - p_x^{i})$$

Galbrun formulari dagokion adierazpena lortzen dugu

$l_x^{ii} = l_x - l_x^{aa}$ kontutan hartzen badugu Schaertlin-en formula lortzen dugu.

$$p_x^{ai} = p_x^{i} - p_x^{aa} + \frac{l_x}{l_x^{aa}}(p_x - p_x^{i})$$

8.4 PROBABILITATEAK URTEKO ZENBATEKO TERMINIOETAN

Tauletan bakarrik urteko zenbatekoen balioak agertzen direnez, ezarriko ditugu urte bat baino denbora handiagoko probabilitateak kalkulatzeko erlazioak urteko zenbatekoen terminoetan.
Aktiboen taldeari dagokionez, ondorengo probabiliateak plantea ditzakegu:

$$ {}_n p_x^{aa} = \frac{l_{x+n}^{aa}}{l_x^{aa}} = p_x^{aa} p_{x+1}^{aa} p_{x+2}^{aa} \cdots p_{x+n-1}^{aa} $$

$$ {}_n q_x^{aa} = q_x^{aa} + {}_{1/}q_x^{aa} + {}_{2/}q_x^{aa} + \ldots + {}_{n-1/}q_x^{aa} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x^{aa} q_{x+t}^{aa} $$

$$ {}_n i_x = i_x + {}_{1/}i_x + \ldots + {}_{n-1/}i_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x^{aa} i_{x+t} $$

$$ {}_n p_x^{aa} + {}_n q_x^{aa} + {}_n i_x = 1 $$

Balioezinen taldeari dagokionez:

$$ {}_n p_x^{i} = \frac{l_{x+n}^{i}}{l_x^{i}} = p_x^{i} p_{x+1}^{i} p_{x+2}^{i} \cdots p_{x+n-1}^{i} $$

$$ {}_n q_x^{i} = q_x^{i} + {}_{1/}q_x^{i} + {}_{2/}q_x^{i} + \ldots + {}_{n-1/}q_x^{i} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x^{i} q_{x+t}^{i} $$

$$ {}_n p_x^{i} + {}_n q_x^{i} = 1 $$

Beste probabilitate batzuk:

$$ {}_n p_x^{ai} = p_x^{ai} \, {}_{n-1} p_{x+1}^{i} + p_x^{aa} p_{x+1}^{ai} \, {}_{n-2} p_{x+2}^{i} + \ldots + {}_{n-1} p_x^{aa} p_{x+n-1}^{ai} $$

$$ {}_n p_x^{ai} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x^{aa} p_{x+t}^{ai} \, {}_{n-t-1} p_{x+t+1}^{i} = {}_k p_x^{ai} \, {}_{n-k} p_{x+k}^{i} + {}_k p_x^{aa} \, {}_{n-k} p_{x+k}^{ai} $$

Galbrun eta Schaertlin-en formula baliagarriak dira ${}_n p_x^{ai}$ probabiliatearen balioa kalkulatzeko lehen adierazitako probabilitatean menpe

$$ {}_n p_x^{ai} = {}_n p_x - {}_n p_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}} ({}_n p_x - {}_n p_x^{i}) $$

$$ {}_n p_x^{ai} = {}_n p_x^{i} - {}_n p_x^{aa} + \frac{l_x}{l_x^{aa}} ({}_n p_x - {}_n p_x^{i}) $$

Balioezin bihurtzen diren aktiboen probabilitateei dagokionez, ondorengo kasuak plante ditzakegu:
-*x* adineko gizabanako aktibo bat $x+n-1$ adinean edo n urteren igarotzean balioezin egoeran hiltzeko duen probabilitatea

$$_{n-1/}q_x^{ai} = {}_{n-1}p_x^{aa}\, q_{x+n-1}^{ai} + {}_{n-1}p_x^{ai}\, q_{x+n-1}^{i}$$

$$_{n-1/}q_x^{ai} = {}_{n-1/}q_x - {}_{n-1/}q_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}({}_{n-1/}q_x - {}_{n-1/}q_x^{i})$$

$$_{n-1/}q_x^{ai} = {}_{n-1/}q_x^{i} - {}_{n-1/}q_x^{aa} + \frac{l_x}{l_x^{aa}}({}_{n-1/}q_x - {}_{n-1/}q_x^{i})$$

-*x* adineko pertsona aktibo batek hurrengo n urteetan edo x+n adina bete baino lehen balioezin egoeran hiltzeko duen probabilitatea.

$$\begin{aligned}
{}_nq_x^{ai} &= q_x^{ai} + p_x^{aa} q_{x+1}^{ai} + \ldots + {}_{n-1}p_x^{aa} q_{x+n-1}^{ai} \\
&+ p_x^{ai}\, {}_{n-1}q_{x+1}^{i} + p_x^{aa} p_{x+1}^{ai}\, {}_{n-2}q_{x+2}^{i} + \ldots + {}_{n-2}p_x^{aa}\, p_{x+n-2}^{ai} q_{x+n-1}^{i} \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x^{aa} q_{x+t}^{ai} + \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x^{ai} q_{x+t}^{i}
\end{aligned}$$

$$_nq_x^{ai} = {}_nq_x - {}_nq_x^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}({}_nq_x - {}_nq_x^{i})$$

$$_nq_x^{ai} = {}_nq_x^{i} - {}_nq_x^{aa} + \frac{l_x}{l_x^{aa}}({}_nq_x - {}_nq_x^{i})$$

Azkenik erlazio hauek aurkezten ditugu:

$$_np_x^{a} = {}_np_x^{aa} + {}_np_x^{ai}$$

$$_{n-1/}q_x^{a} = {}_{n-1/}q_x^{aa} + {}_{n-1/}q_x^{ai}$$

$$_nq_x^{a} = {}_nq_x^{aa} + {}_nq_x^{ai}$$

Hanko hau kontuan izanda,

$$_np_x^{a} + {}_nq_x^{a} = 1$$

8.5 URTEKO ZENBATEKO INDEPENDIENTEAK

Orain arte lan egin dugu urteko zenbateko dependienteekin. Ondorioztatuko ditugu 2 taulei dagozkion urteko zenbateko independienteen adierazpenak, lehengo taula kontuan hartzen du aktibo talde baten irteera kausa bakarra balioezintasuna eta bestea irteera kausa bakarra aktiboen heriotza dena.

Kontuan izanda aurreko gaiaren (7.gaia) edukia, baina nomenklatura ezberdin batekin, aurkeztuko dugu (i_x) moduan urteko balioezin zenbateko independientea, hau da, x adina aktibo moduan betetzen duen pertsona batek $x+1$ adina bete baino lehen balioezin bihurtzeko probabilitatea, aktibo taldetik irtetzeko dauden beste kausa ezberdinak kontuan izan gabe, eta kalkulatuko dugu aurreko ataletan azaldu ditugun probabilitate dependienteen arabera.

$$(i_x) \approx \frac{2i_x}{2-q_x^{aa}} = \frac{I_x}{l_x^{aa} - \frac{1}{2}d_x^{aa}}$$

Aktibo baten urteko hilkortasun zenbateko independientea aktibo moduan (q_x^{aa}) aurreko gaian ikasitako erlazioak kontuan izanda honela kalkulatzen dugu:

$$(q_x^{aa}) \approx \frac{2q_x^{aa}}{2-i_x} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa} - \frac{1}{2}I_x}$$

Aurreko erlazioetatik ondorioztatzen dugu:

$$\begin{aligned}
l_{x+1}^{aa} &= l_x^{aa} - d_x^{aa} - I_x = l_x^{aa} - \left[l_x^{aa} - \tfrac{1}{2}I_x\right](q_x^{aa}) - I_x \\
&= l_x^{aa} - l_x^{aa}(q_x^{aa}) + \tfrac{1}{2}l_x^{aa} i_x (q_x^{aa}) - l_x^{aa} i_x \\
&= l_x^{aa}\left[1-(q_x^{aa}) + \tfrac{1}{2}i_x(q_x^{aa}) - i_x\right] = l_x^{aa}\left[1-(q_x^{aa})\right]\left[1 - i_x \frac{1-\frac{1}{2}(q_x^{aa})}{1-(q_x^{aa})}\right]
\end{aligned}$$

edota

$$\begin{aligned}
l_{x+1}^{aa} &= l_x^{aa} - d_x^{aa} - I_x = l_x^{aa} - \left[l_x^{aa} - \tfrac{1}{2}I_x\right](q_x^{aa}) - I_x \\
&= l_x^{aa} - l_x^{aa}(q_x^{aa}) + \tfrac{1}{2}I_x(q_x^{aa}) - (i)_x l_x^{aa} + \tfrac{1}{2}d_x^{aa}(i_x) \\
&= l_x^{aa} - l_x^{aa}(q_x^{aa}) + \tfrac{1}{2}(q_x^{aa})(i_x)\left[l_x^{aa} - \tfrac{1}{2}d_x^{aa}\right] - (i_x)\left[l_x^{aa} - \tfrac{1}{2}d_x^{aa}\right] \\
&= l_x^{aa} - l_x^{aa}(q_x^{aa}) + \tfrac{1}{2}l_x^{aa}(i_x)(q_x^{aa}) - \tfrac{1}{4}d_x^{aa}(q_x^{aa})(i_x) - l_x^{aa}(i_x) + \tfrac{1}{2}d_x^{aa}(i_x)
\end{aligned}$$

8.6 BEREHALAKO ZENBATEKOAK

Urteko zenbatekoak eta probabilitateak bai aktiboentzatako bai balioezintasunentzako eremu jarraien adierazteko helburuarekin lortuko ditugu talde horientzako berehalako zenbatekoen adierazpenak.

Aktiboetatik irtetze edo kanporatzearen urteko zenbatekoa, bai hiltzeagatik bai balioezintasunagatik:

$$\mu^{a}_{x+t} = \lim_{h\to 0}\frac{{}_hq^{aa}_{x+t} + {}_hi_{x+t}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-{}_hp^{aa}_{x+t}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{l^{aa}_{x+t} - l^{aa}_{x+t+h}}{hl^{aa}_{x+t}} = -\frac{\frac{d}{dt}l^{aa}_{x+t}}{l^{aa}_{x+t}}$$

$$\mu^{a}_{x+t} = -\frac{d}{dt}Lnl^{aa}_{x+t} = -\frac{d}{dt}Ln\,{}_tp^{aa}_{x}$$

μ^{aa}_{x} bezala adierazten badugu aktiboen berehalako hilkortasun zenbatekoa eta γ_x aktibo talde baten baliozintasunaren berehalako zenbatekoa bezala azalduko dugu eta aktiboen taldea bi irteera kausa dituela kontuan izanda

$$\mu^{a}_{x} = \mu^{aa}_{x} + \gamma_x$$

Balioezinen taldea bakarrik irteera kausa bat kontuan hartzen duenez, hilkortasuna , μ^{i}_{x} bezala azaldu dezakegu balioezinen talde itxi baten berehalako hilkortasun zenbateko eta honela definitzen da:

$$\mu^{i}_{x+t} = \lim_{h\to 0}\frac{{}_hq^{i}_{x+t}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-{}_hp^{i}_{x+t}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{l^{i}_{x+t} - l^{i}_{x+t+h}}{hl^{i}_{x+t}} = -\frac{\frac{d}{dt}l^{i}_{x+t}}{l^{i}_{x+t}}$$

$$\mu^{i}_{x+t} = -\frac{d}{dt}Lnl^{i}_{x+t} = -\frac{d}{dt}Ln\,{}_tp^{i}_{x}$$

x+t adina aktibo moduan betetzen duten pertsonen artetik, l^{aa}_{x+t}, hil eta balioezin bezala geratzen dira *t* momento batean*t*: $l^{aa}_{x+t}\mu^{a}_{x+t}dt$. Zeinetatik balioezin moduan geratzen dira:

$$l^{aa}_{x+t}\gamma_{x+t}dt(1-\tfrac{1}{2}\mu^{i}_{x+t}dt)$$

l^{ii}_{x+t} taldetik *t* momentuan hil egiten dira hurrengoak: $l^{ii}_{x+t}\mu^{i}_{x+t}dt$

Denbora tarte infinituki txiki bat hartzen badugu , tarte horretako heriotzen kopurua zenbatzeko eta kontsideratzen badugu ondorengo hipotesi hau: denbora tarte horretan ez dugula kontuan izango hasiera batean aktibo diren pertsonen artean, balioezin bihurtzen dira eta balioezin moduan hil egiten direnak denbora tartea amaitu baino lehen. Beraz x adinean hil direnak, aktibo moduan eta balioezin moduan hil direnak dira

$$l_x \mu_x dx = l_x^{aa} \mu_x^{aa} dx + l_x^{ii} \mu_x^{i} dx$$
$$= l_x^{aa}(\mu_x^a - \gamma_x)dx + l_x^{ii}\mu_x^i dx = l_x^{aa}\mu_x^a - l_x^{aa}\gamma_x dx + l_x^{ii}\mu_x^i dx$$

Aurreko erlaziotik ondoriozta dezakegu μ_x^{aa} -ren adierazpena eta zehaztutako berehalako zenbatekoen funtzioen menpeko γ_x en balio:

$$\mu_x^{aa} = \mu_x + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}(\mu_x - \mu_x^i) = \mu_x^i + \frac{l_x}{l_x^{aa}}(\mu_x - \mu_x^i)$$

$$\gamma_x = \mu_x^a - \mu_x + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}(\mu_x^i - \mu_x) = \mu_x^a - \mu_x^i + \frac{l_x}{l_x^{aa}}(\mu_x^i - \mu_x)$$

Aktibo eta balioezin taldeari dagozkion berehalako zenbatekoak definitu ostean adierazten ditugu urteko zenbatekoei dagozkion espresioak eremu jarraiean

$$p_x^{aa} = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^a dt} = e^{-\int_0^1 (\mu_{x+t}^{aa} + \gamma_{x+t})dt}$$

$$q_x^{aa} = \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^{aa} dt$$

$$i_x = \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \gamma_{x+t} dt$$

$p_x^{aa} + q_x^{aa} + i_x = 1$ denez baita adieraz dezakegu:

$$p_x^{aa} = 1 - \int_0^1 {}_t p_x^{aa}(\mu_{x+t}^{aa} + \gamma_{x+t})dt = 1 - \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^a dt$$

Balioezin bihurtzen diren aktiboen urteko zenbatekoen espresioak hauek dira:

$$p_x^{ai} = \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \gamma_{x+t\ 1-t} p_{x+t}^i dt$$

$$q_x^{ai} = \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \gamma_{x+t\ 1-t} q_{x+t}^i dt$$

Honako hau kontuan izanda

$$p_x^i = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^i dt}$$

$$q_x^i = \int_0^1 {}_t p_x^i \mu_{x+t}^i dt$$

$p_x^i + q_x^i = 1$ denez

$$p_x^i = 1 - \int_0^1 {}_t p_x^i \mu_{x+t}^i dt$$

azkenik

$$p_x^a = p_x^{aa} + p_x^{ai} = 1 - \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^a dt + \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \gamma_{x+t\ 1-t} p_{x+t}^i dt$$

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai} = \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^{aa} dt + \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \gamma_{x+t\ 1-t} q_{x+t}^i dt$$

$p_x^a + q_x^a = 1$ denez

$$p_x^a = 1 - q_x^a = 1 - \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \mu_{x+t}^{aa} dt - \int_0^1 {}_t p_x^{aa} \gamma_{x+t\ 1-t} q_{x+t}^i dt$$

8.7 BEREZITAZUNAK

Aktibo eta balioezinen taulak taulen azkeneko adina bezala erretirorako oiho adina ezarrita daukate eta gainera aseguru praktiketan ez da kontsideratzen balioezintasuna erretiro adinaren ostean.. Beraz, ohiko erretiro adinaren ostean ez dira balioezintasun berririk emango, aktibo eta balioezinen funtzioen arteko erlazioak aldatuz.

Bi aukera aurkitzen ditugu aktibo eta balioezinekin lan egiteko erretiroko adinaren ostean. Lehenengo aukera erretiro adinaren ostean talde itxi bat bezala kontsideratzea eta bertatik irtetezeko aukera bakarra heriotza izatea eta balioezinen taldea ere itxia izango da ez direko balioezintasun gehiagorik emango. Bigarren aukera erretiro adinetik aurrera biztanleri orokorreko taulekin lan egitea da.

Lehenengo aukeren artean, aktibo eta balioezinen taldeetarako definitutako funtzioen arteko erlazioetan adina erritorarko adina baino handiagoa denean hau aurkitzen dugu:

$$p_x^{aa} + q_x^{aa} = 1$$

$$p_x^{ai} = 0 \text{ eta } q_x^{ai} = 0$$

$$p_x^a = p_x^{aa} \text{ eta } q_x^a = q_x^{aa}$$

$i_x = 0$ denez

kontuan izanda aurreko erlazioa hurrengo kalkulua planteatuko dugu:

${}_n p_x^{ai}$ supostuz $x < x_j$ eta $x + n > x_j$, x_j erretirorako ohiko adina izanez.

$$ {}_n p_x^{ai} = \sum_{k=0}^{x_j - x - 1} {}_k p_x^{aa} p_{x+k\ n-k-1}^{ai} p_{x+k+1}^i = {}_{x_j - x} p_x^{ai}\ {}_{x+n-x_j} p_{x_j}^i $$

${}_n q_x^{ai}$ ondorengoa suposatuz $x < x_j$ eta $x + n > x_j$, $q_{x+k}^{ai} = 0$ izanda $x + k \geq x_j$ denreako

$$ {}_{n}q_{x}^{ai} = \sum_{k=0}^{x_j-x-1} {}_{k}p_{x}^{aa}\left[p_{x+k}^{ai}\,{}_{n-k-1}q_{x+k+1}^{i} + q_{x+k}^{ai}\right] = {}_{x_j-x}q_{x}^{ai} + {}_{x_j-x}p_{x}^{ai}\,{}_{x+n-x_j}q_{x_j}^{i} $$

${}_{n-1/}q_{x}^{ai}$ suposatuz $x < x_j$ eta $x + n - 1 \geq x_j$,

$$ {}_{n-1/}q_{x}^{ai} = {}_{n-1}p_{x}^{ai}\,q_{x+n-1}^{i} = {}_{x_j-x}p_{x}^{ai}\,{}_{x+n-1-x_j}p_{x_j}^{i}\,q_{x+n-1}^{i} = {}_{x_j-x}p_{x}^{ai}\,{}_{x+n-1-x_j/}q_{x_j}^{i} $$

si $x \geq x_j$ ${}_{n-1/}q_{x}^{ai} = 0$

Erretirorako adinetik aurrera biztanleri orokorreko taulekin lan egiten bada eta ez bada aurkitzen banaketarik bizirik irauten dutenen artean, guztiek kolektibo orokorrean mantentzen direnez, desagertzen dira aktibo eta balioezinen ordenak.

$x \geq x_j$ denerako, probabilitate hauek $p_{x}^{aa}, q_{x}^{aa}, i_{x}, p_{x}^{ai}, q_{x}^{ai}, p_{x}^{a}, q_{x}^{a}, p_{x}^{i}, q_{x}^{i}$ zentzuz gabeko probabilitateak dira $x < x_j$ adinak izateagatik, haren aldakortasun alorrean.

Plantea dezkagu ondorengo probabilitatea x adineko pertsona aktibo batek x_j adina betetzea aktibo bezala, x_j erretirorako adin ohikoa izanez, eta bizirik irauten duela $x+n$ adineraino.

$$ {}_{x_j-x}p_{x}^{aa}\,{}_{x+n-x_j}p_{x_j} $$

Gogoratu, kasu honetan ezarri dugula hau: ${}_{n}i_{x} = {}_{x_j-x}i_{x}$ si $x < x_j$ eta $x + n > x_j$.

Kontuan izanda beste probabilitate batzuk hau bezala ${}_{n}p_{x}^{ai}$ eta ondorengoa suposatuz $x < x_j$ eta $x + n > x_j$, hasiera batean zentzuz gabekoa da baina kontsidera daiteke hurrengoa:

$$ {}_{n}p_{x}^{ai} = {}_{x_j-x}p_{x}^{ai}\,{}_{x+n-x_j}p_{x_j} $$

Era berean ${}_{n}q_{x}^{ai}$, ${}_{n-1/}q_{x}^{ai}$ hurrengoa suposatuz $x < x_j$ eta $x + n - 1 > x_j$, hasiera batean zentzu gabekoak dira baina ezarri daitezke:

$$ {}_{n}q_{x}^{ai} = {}_{x_j-x}q_{x}^{ai} + {}_{x_j-x}p_{x}^{ai}\,{}_{x+n-x_j}q_{x_j} $$

$$ {}_{n-1/}q_{x}^{ai} = {}_{x_j-x}p_{x}^{ai}\,{}_{x+n-1-x_j}p_{x_j}\,q_{x+n-1} = {}_{x_j-x}p_{x}^{ai}\,{}_{x+n-1-x_j/}q_{x_j} $$

Hurrengo probabilitateei buruz: ${}_{n}p_{x}^{a}, {}_{n}q_{x}^{a}, {}_{n}p_{x}^{i}, {}_{n}q_{x}^{i}$ si $x < x_j$ eta $x + n > x_j$

$$ {}_{n}p_{x}^{a} = {}_{x_j-x}p_{x}^{a}\,{}_{x+n-x_j}p_{x_j} $$

$${}_{n}q_x^a = {}_{x_j - x}q_x^a + {}_{x_j - x}p_x^a \, {}_{x+n-x_j}\, q_{x_j}$$

$${}_{n}p_x^i = {}_{x_j - x}p_x^i \, {}_{x+n-x_j}\, p_{x_j}$$

$${}_{n}q_x^i = {}_{x_j - x}q_x^i + {}_{x_j - x}p_x^i \, {}_{x+n-x_j}\, q_{x_j}$$

Azkenik ${}_{n-1/}q_x^a$ eta ${}_{n-1/}q_x^i$ ondorengo suposatuz $x < x_j$ eta $x + n - 1 > x_j$,

$${}_{n-1/}q_x^a = {}_{x_j - x}p_x^a \, {}_{x+n-1-x_j /}\, q_{x_j}$$

$${}_{n-1/}q_x^i = {}_{x_j - x}p_x^i \, {}_{x+n-1-x_j /}\, q_{x_j}$$

9. GAIA

9 IRTEERA ETA SARRERA ANITZEKO TAULAK

9.1 EGOERA ANITZEKO EREDUAK FUNTZIOAK

Zientzia aktuarialaren eremu deberdinen ikerketak garatzeko egoera edo irteera anitzeko ereduak tresna garrantzitsuak dira, batez ere, aplikazio handia jasaten dute eredu hauek, gaixotasunen eta baliogabetasunaren gaineko seguruen azterketetan.

Eredua Daniel Bernoulli's 1776an erabili zuen baztanga gaixotasuna talde baten gainean zuen eragina aztertzeko eta horretarako bi egoera kontuan hartu zituen, A egoera non aurkitzen diren baztanga inoiz jasan ez duten pertsonak eta B egoera non aurkitzen diren baztanga gaixotasuna jasan duten pertsonak.Ondoren egoera bakoitzerako kalkulatu zuen hilkortasun probabilitatea eta baita egoeraz aldatzeko probabilitatea. Ikerketa honen emaitzekin bi irteerako lehenengo taula eraiki zen.

Hurrengo 50 urteeran bi egile ekarpenak egin zituzten, baztanagako gaiari buruz, eta biziraupen taulak eraiki ziren kontuan izanda baztanga gaixotasuna eta haren txertatzea. Irteera anizkuneko taulen funtzioen oinarrizko erlazioei buruzko arazoak, 1843 an Antoine-Augustin Cournot eta 1867an William Makeham aztertu zituzten. Gustav du Pasquier 1913an aurkeztu zuen Markov-en katearen lehenengo aplikazioa eta baliogabetasun, egoera larriko gaixotasunen eta long term care-en seguruen aplikazio aktuarialerako oinarriak finkatu zituen. Printzipio hauek erabili gabe egon ziren XIX. Mende erdialdealdetik 1950 urterarte non Fix and Neyman Markov-en prozesuen emaitzak eta formulak Garate zituzten.

Sarrera edo irteera anitzeko taulak edota sarrera eta irteeren taulak, Increment-Decrement Life Table (IDLT)12o Multistate Life Table13, bezala ezagutuak dira anglosajon terminologían, egoera batetik beste batera pasatzeko edo jatorri egoerara itzultzearen fenomenoak aztertzeko tresna oso erabilgarriak dira, horrela gertatzen da adibidez, gizabanako talde aktibo baten ikerketan zeinetan kontuan hartzen dugun taldetik irtetzeko bai baliogabetasun bai aktibo jatorri taldera itzultzearen kausak.

Sarrera eta irteeren taulak honela defini dezakegu, ordenatuta agertzen diren balioen multzoa zeinek kontsideratzen diren egoera desberdinen arteko erlazioak eta erlazio hauek kontsideratutako egoeretan sarrerak zein irteerak onartzen dituzte. Sarrera eta irteeren

[12] ROBERT SCHOEN eta KENNETH C. LAND, 1979.

[13] JAN M. HO EM eta ULLA FUNCK JENSEN, 1982:4.

taulak defini dezakegu.

Sarrera eta irteera anitzeko taulen adibide bezala agertzen zaigu demografi esparruan Robert Schoen eta Verne E. Nelson, 1974-an aurkeztutako taula, “ezkontzei, dibortzio eta hilkortasuna”-ri buruzkoa zeinetan, notazio aktuarial estandarra erabiliz, ezkongabe jatorrizko egoeratik abiatuta non gizabanako guztiak aurkitzen diren, momenti honetatik aurrera hasten dira eskualdatzeak ematen , lehenengoz ezkontzeko egoerara eta ondoren alargun edo dibortziatura non geroago berriz ere bi egoera hauetatik ezkontzeko egoerara pasa daiteke, ahaztu barik egoera bakoitz hauetatik pasa daitezkeela heriotz egoerara eta egoera honetatik ezin zara beste egoera batera pasa.

Taula hauen aplikaziorako beste adibide bat, baina notazio ezberdin batekin kontuan hartutako ezaugarriak direla eta, Jan M. Hoem, 1970[14]-an aurkeztutako artikuluan aurkitzen dugu. Artikulu honetan lan merkaturako aplikazio bat aurkitzen dugu langile egoeratik lagabetu egoerara eta alderantziz pasatzearen azterketa, aldi berean kontuan hartuz hilkortasuna. Era beran, , Rogers A., 1975-ean aplikatu zituen sarrera eta irteeren taulak multi-eskualdeko sistemako populazioa baten hilkortasunaren eta migrazioaren ikerketan.

Medikuntzaren alorrean, Fix eta Neyman, 1951-an eredu hau erabili zuten ospitale baten pazienteen egoerei buruz hitzegiteko bai oneratze bat emateagatik, berriz gaixotzeagatik edota hiltzearen egoeraz. Eta Habermanen artikulua 1983-an sarrera eta irteeren taulak aplikatu zituen bularreko minbizirako ikerketetan, non kontuan hartzen dren errekuperazioa, hilkortasuna gaixotasun honengatik eta hilkortasuna beste gaixotasun batengatik.

Beste alde batetik, alor aktuarialean, orain arte, irteera anitzeko taulen aplikazioa ohikoagoa da zeinetan ez da aukerarik ematen lehenago egondako egoera batera itzultzeko[15]. Honen ondorioz, aldi baterako ezintazuna bezalako fenomenoak ezin dira agertu taula hauetan, zeren aldi baterako egoera bat denez ohiko aktibitatea garatzeko gaitasunaren errekuperazioa egoera beraren bezezko ezaugarri bat da.

Sarrera eta irteeren taulen eredua definitzeko, honela izendatua TID, alor aktuarialetan aplikatzen dena, kontsideratzen da kasu orokorra zeinetan barnean erlazionatutako K taula

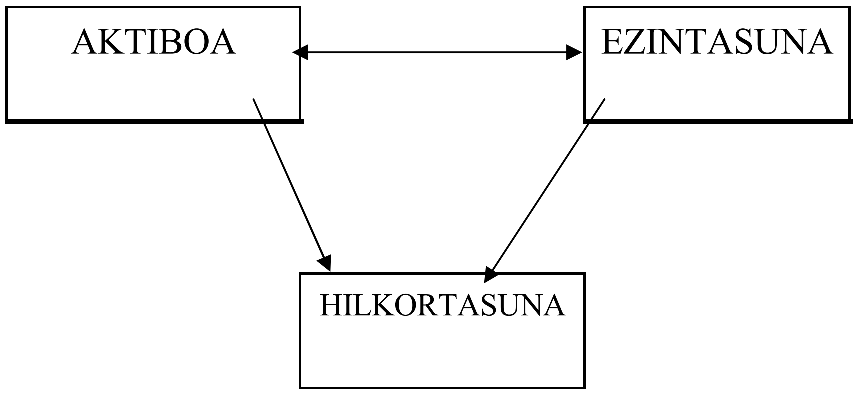
---

14 "Point estimation of forces of transition in demographic Models".

15 Aktuario baten formakuntzarako matematika aktuarialen oinarrizko liburuak: "Life contingences" JORDAN-ena edo "Actuarial Mathematics" GERBER-ena... bakarrik aplikatzen dituzte irteera anitzeko taulak fenomeno aktuarialei.

konbinatzen diren zeinetan taula bakoitza beste taulen K-1 sarrerak dituzte eta beste taulen K-1 eta heriotzaren irteereak.

1 Irudia



Notazio aktuarial estandarra dela eta ondorengo funtzioak definitzen ditugu:

$$l_{x+n}^{A} = {}_n l_x^{AA} + \sum_{i \neq A,F} {}_n l_x^{iA}$$

l_{x+n}^{A} A egoeran dauden pertsonen kopurua $x+n$ adinean

${}_n l_x^{AA}$ A egoeran dauden pertsonen kopurua $x+n$ adinean, x adinean egoera (A) berdinean zeudelarik

${}_n l_x^{iA}$ A egoeran dauden pertsonen kopurua $x+n$ adinean, x adinean ezintasun egoeran (i) zeudelarik

$n = 0$ bada;

$${}_0 l_x^{AA} = l_x^{A}$$

$${}_0 l_x^{iA} = 0 \qquad i \neq A, F \text{ izanda}$$

Bestaldetik,

$$l_{x+n}^{A} = l_x^{A} - \sum_{j \neq A} {}_n^h d_x^{Aj} - \sum_{\forall h} {}_n^h d_x^{AF} + \sum_{i \neq A} {}_n^h d_x^{iA}$$

Non l_{x+n}^{A} eta l_x^{A}; A egoeran dauden pertsonen kopurua $x+n$ adinean eta x adinean

${}_{n}^{h}d_{x}^{Aj}$ h egoeran x adinean dauden pertsonen kopurua eta n epearen barruan j egoerara pasatu direnak (A egoeratik). *h* egoerak edozein *k* egoera izan daiteke (hilkortasuna izan ezik). *j* egoerak edozein *k* egoera izan daiteke, A eta hilkortasun egoerak izan ezik.

${}_{n}^{h}d_{x}^{AF}$ h egoeran x adinean dauden pertsonen kopurua eta n epearen barruan heriotza egoerara pasatu direnak (A egoeratik). *h* egoerak edozein *k* egoera izan daiteke (hilkortasuna izan ezik).

${}_{n}^{h}d_{x}^{iA}$ h egoeran x adinean dauden pertsonen kopurua eta n epearen barruan A egoerara pasatu direnak (i egoeratik). *h* egoerak edozein *k* egoera izan daiteke (hilkortasuna izan ezik). *i* egoerak edozein *k* egoera izan daiteke, A eta hilkortasun egoerak izan ezik.

Lehen aipatu dugun adibidea (1. Irudia) kontutan hartuz, dauden egoerak: Aktibo (A egoera), ezintasuna (I egoera) eta hilkortasuna (F egoera). *x+n* adinean aktibo eta ezintasun egoeran egongo diren pertsonen kopurua honako hauek izango dira:

$$l_{x+n}^{A} = {}_{n}l_{x}^{AA} + {}_{n}l_{x}^{IA}$$

$$l_{x+n}^{I} = {}_{n}l_{x}^{II} + {}_{n}l_{x}^{AI}$$

Kontutan hartuz:

$$l_{x+n}^{A} = l_{x}^{A} - {}_{n}^{A}d_{x}^{AI} - {}_{n}^{I}d_{x}^{AI} - {}_{n}^{A}d_{x}^{AF} - {}_{n}^{I}d_{x}^{AF} + {}_{n}^{A}d_{x}^{IA} + {}_{n}^{I}d_{x}^{IA}$$

$$l_{x+n}^{I} = l_{x}^{I} - {}_{n}^{I}d_{x}^{IA} - {}_{n}^{A}d_{x}^{IA} - {}_{n}^{A}d_{x}^{IF} - {}_{n}^{I}d_{x}^{IF} + {}_{n}^{I}d_{x}^{AI} + {}_{n}^{A}d_{x}^{AI}$$

- Errolda funtzioa errepresentatzen dituzten ekuazioak egoera ezberdinen dagokion eredu anitzeko taulan:

Suposatuz *i* eta j egoerak:

$${}_{n}L_{x}^{ij} = \frac{n}{2}\left({}_{0}l_{x}^{ij} + {}_{n}l_{x}^{ij}\right)$$

Berriro, lehen aipatu dugun adibidea kontutan hartzen badugu (1. Irudia) hurrengo errolda funtzioak daukagu ${}_{n}L_{x}^{AA}$, ${}_{n}L_{x}^{AI}$, ${}_{n}L_{x}^{II}$ eta ${}_{n}L_{x}^{IA}$,

$$ {}_nL_x^{AA} = \frac{n}{2}\left({}_0l_x^{AA} + {}_nl_x^{AA}\right) = \frac{n}{2}\left(l_x^{A} + {}_nl_x^{AA}\right) $$

$$ {}_nL_x^{AI} = \frac{n}{2}\left({}_0l_x^{AI} + {}_nl_x^{AI}\right) = \frac{n}{2}\,{}_nl_x^{AI} $$

$$ {}_nL_x^{II} = \frac{n}{2}\left({}_0l_x^{II} + {}_nl_x^{II}\right) = \frac{n}{2}\left(l_x^{I} + {}_nl_x^{II}\right) $$

$$ {}_nL_x^{IA} = \frac{n}{2}\left({}_0l_x^{IA} + {}_nl_x^{IA}\right) = \frac{n}{2}\,{}_nl_x^{IA} $$

- Berehalako hilkortasun zenbatekoaren ekuazioak.

Oraingoan, suposatzen dugu *h* eta *i* egoerek edozein *k* egoerak adierazten dute eta *j* egoerak edozen k egoera adierazten du eta hilkortasun egoerak, berehalako hilkortasun i egoeratik j egoerara n epearen barruan igarotuz, honela azaltzen da,

$$ {}_nm_x^{ij} \approx {}_n^hm_x^{ij} = \frac{{}_n^hd_x^{ij}}{{}_nL_x^{hi}} \quad i \neq j $$

Irudiaren adibidea hartuz gero:

$$ {}_nm_x^{AI} \approx {}_n^Am_x^{AI} = \frac{{}_n^Ad_x^{AI}}{{}_nL_x^{AA}} $$

$$ {}_nm_x^{AI} \approx {}_n^Im_x^{AI} = \frac{{}_n^Id_x^{AI}}{{}_nL_x^{IA}} $$

$$ {}_nm_x^{AF} \approx {}_n^Am_x^{AF} = \frac{{}_n^Ad_x^{AF}}{{}_nL_x^{AA}} $$

$$ {}_nm_x^{AF} \approx {}_n^Im_x^{AF} = \frac{{}_n^Id_x^{AF}}{{}_nL_x^{IA}} $$

$$ {}_nm_x^{IA} \approx {}_n^Im_x^{IA} = \frac{{}_n^Id_x^{IA}}{{}_nL_x^{II}} $$

$$ {}_nm_x^{IA} \approx {}_n^Am_x^{IA} = \frac{{}_n^Ad_x^{IA}}{{}_nL_x^{AI}} $$

$$ {}_nm_x^{IF} \approx {}_n^Im_x^{IF} = \frac{{}_n^Id_x^{IF}}{{}_nL_x^{II}} $$

$$ {}_nm_x^{IF} \approx {}_n^Am_x^{IF} = \frac{{}_n^Ad_x^{IF}}{{}_nL_x^{AI}} $$

9.2 TRANSIZIO PROBABILITATEAK

Egoera anitzeko ereduan eman daiteken egoera aldaketen probabilitateari, transizio probabilitatea deituko diogu.

Markov-en teoria kontutan hartuz, prozesu estokastiko batean $\{Z_x : x \geq 0\}$, non denbora parametroak *x* (adina) erlazionaturik dago *S* egoerekin, *S* zenbaki osoa (positiboa) izanik (1 baino handiagoa)

$$ {}_n p_x^{ij} = pr(Z_{x+n} = j / Z_x = i) $$

nos indican la probabilidad de que una persona de edad *x* adineko persona batek *i* egoeran, *x+n* adinean *j* egoerara pasatzeko duen probabilitatea adierazten du. *i* eta *j* egoerak, *S* egoeren barruan kontsideratuz.

Transizio probabilitateak matrize baten barruan ordenatzen dira eta hurrengo propietateak eman behar dira,

$$ {}_n p_x^{ij} \geq 0 \quad \text{eta} \quad \sum_{j \in S} {}_n p_x^{ij} = 1 $$

Non (egoera absorbentean),

$$ {}_n p_x^{ij} = 1 \;\; ; i = j \text{ bada} $$
$$ {}_n p_x^{ij} = 0 \;\; ; i \neq j \text{ bada} $$

Adibidea (1. Irudia) kontutan hartuz,

$$ \begin{pmatrix} {}_n p_x^{AA} & {}_n p_x^{AI} & {}_n p_x^{AF} \\ {}_n p_x^{IA} & {}_n p_x^{II} & {}_n p_x^{IF} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

${}_n p_x^{AA}$ x adineko pertsona aktibo batek, *x+n* adinean aktibo jarraitzeko duen probabilitatea

${}_n p_x^{AI}$ x adineko pertsona aktibo batek, *x+n* adinean ezintasun egoeran egoteko duen probabilitatea

${}_n p_x^{AF}$ x adineko pertsona aktibo batek, *x+n* adinean hilda egoteko duen probabilitatea

${}_n p_x^{IA}$ x adineko pertsona ezintasun batek, $x+n$ adinean aktibo egoeran egoteko duen probabilitatea.

${}_n p_x^{II}$ x adineko pertsona ezistasun batek, $x+n$ adinean ezintasunarekin jarraitzeko duen probabilitatea

${}_n p_x^{IF}$ x adineko pertsona ezistasun batek, $x+n$ adinean hilda egoteko duen probabilitatea

Erlazioak:

$${}_n p_x^{AA} = \frac{{}_n l_x^{AA}}{{}_0 l_x^{AA}} = \frac{{}_n l_x^{AA}}{l_x^{A}}$$

$${}_n l_x^{AA} = l_x^{A} - {}_n^A d_x^{AI} - {}_n^A d_x^{AF} + {}_n^A d_x^{IA}$$

$${}_n p_x^{AI} = \frac{{}_n l_x^{AI}}{l_x^{A}}$$

$${}_n l_x^{AI} = {}_n^A d_x^{AI} - {}_n^A d_x^{IF} - {}_n^A d_x^{IA} \quad \text{izanda}$$

$${}_n p_x^{AF} = \frac{{}_n l_x^{AF}}{l_x^{A}}$$

$${}_n l_x^{AF} = {}_n^A d_x^{AF} + {}_n^A d_x^{IF} \quad \text{izanda}$$

Betetzen da: $${}_n p_x^{AA} + {}_n p_x^{AI} + {}_n p_x^{AF} = 1$$

Ezintasunatik abiatuz:

$${}_n p_x^{IA} = \frac{{}_n l_x^{IA}}{{}_0 l_x^{II}} = \frac{{}_n l_x^{IA}}{l_x^{I}}$$

non,

$${}_n l_x^{IA} = {}_n^I d_x^{IA} - {}_n^I d_x^{AF} - {}_n^I d_x^{AI}$$

$${}_n p_x^{II} = \frac{{}_n l_x^{II}}{l_x^{I}}$$

$${}_n l_x^{II} = l_x^{I} - {}_n^I d_x^{IA} - {}_n^I d_x^{IF} + {}_n^I d_x^{AI} \quad \text{izanda}$$

$$ {}_n p_x^{IF} = \frac{{}_n l_x^{IF}}{l_x^I} $$

$$ {}_n l_x^{IF} = {}_n^I d_x^{IF} + {}_n^I d_x^{AF} \qquad \text{izanda} $$

9.3 BEREHALAKO ZENBATEKO TRANSIZIOAK

Egoera anitzeko ereduetan, berehalako zenbatekoak, μ_x^{ij} eta μ_x^{ii} *i, j* edozein egoera izanda.

$i \neq j$ bada

$$ \mu_x^{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{\Delta t} p_x^{ij}}{\Delta t} $$

$i = j$ bada

$$ \mu_x^{ii} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - {}_{\Delta t} p_x^{ii}}{\Delta t} $$

Kontutan hartuz,

$$ {}_t p_x^{ii} + \sum_{i \neq j} {}_t p_x^{ij} = 1 $$

$$ \mu_x^{ii} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sum_{i \neq j} {}_{\Delta t} p_x^{ij}}{\Delta t} = -\sum_{i \neq j} \mu_x^{ij} $$

Matrize bat eraiki nahi badugu, hurrengo betetzen da:

$$ \mu_{x+t}^{ii} \leq 0 $$

$i \neq j$ izanda

$$ \mu_{x+t}^{ij} \geq 0 $$

$$ \mu_{x+t}^{ii} + \sum_{i \neq j} \mu_{x+t}^{ij} = 0 $$

$x{+}t$ adinerako matrizea lehengo adibidearen araberan (1. Irudia), horrelakoa izango litzateke:

$$\begin{pmatrix} \mu_{x+t}^{AA} & \mu_{x+t}^{AI} & \mu_{x+t}^{AF} \\ \mu_{x+t}^{IA} & \mu_{x+t}^{II} & \mu_{x+t}^{IF} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

${}_t\overline{p}_x^{ii}$ adierazteko berehalako zenbateko funtzioaren araberan, lehenbizi, deribatua (t-ren araberan) kalkulatuko dugu,

$$\frac{d}{dt}{}_t\overline{p}_x^{ii} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}\overline{p}_x^{ii} - {}_t\overline{p}_x^{ii}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_t\overline{p}_x^{ii}\,{}_{\Delta t}\overline{p}_{x+t}^{ii} - {}_t\overline{p}_x^{ii}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_t\overline{p}_x^{ii}({}_{\Delta t}\overline{p}_{x+t}^{ii} - 1)}{\Delta t}$$

$$= {}_t\overline{p}_x^{ii}\mu_{x+t}^{ii} = -{}_t\overline{p}_x^{ii}\sum_{i \neq j}\mu_{x+t}^{ij}$$

hemendik

$$\frac{\frac{d}{dt}{}_t\overline{p}_x^{ii}}{{}_t\overline{p}_x^{ii}} = \frac{d}{dt}\ln{}_t\overline{p}_x^{ii} = -\sum_{i \neq j}\mu_{x+t}^{ij}$$

Non, probabilitatea, berehalako zenbatekoaren araberan,

$${}_n\overline{P}_x^{ii} = e^{-\int_0^n \sum_{i \neq j}\mu_{x+t}^{ij}dt}$$

Transizio probabilitateentzako egoera aldaketaren bat dagoenean, Chapman-Kolmogorov ekuazioa kontutan hartuz

$${}_{t+k}p_x^{ij} = \sum_{\forall h}{}_t p_x^{ih}\,{}_k p_{x+t}^{hj}$$

Hurrengo eragiketa egiten dugu,

$$\frac{d}{dt}{}_t p_x^{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}p_x^{ij} - {}_t p_x^{ij}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_t p_x^{ij}\,{}_{\Delta t}\overline{p}_{x+t}^{jj} + \sum_{h \neq j}{}_t p^{ih}\,{}_{\Delta t}p_{x+t}^{hj} - {}_t p_x^{ij}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_t p_x^{ij}({}_{\Delta t}\overline{p}_{x+t}^{jj} - 1) + \sum_{h \neq j}{}_t p^{ih}\,{}_{\Delta t}p_{x+t}^{hj}}{\Delta t}$$

$$=-{}_tp_x^{ij}\sum_{j\neq i}\mu_{x+t}^{ji}+\sum_{h\neq j}{}_tp_x^{ih}\mu_{x+t}^{hj}$$

Orain, $x+t$ adineko pertsona batek j egoeran jarraitzeko probabilitatea n-t epearen zehar biderkatzen badugu,

$$\int_0^n \frac{d}{dt}{}_tp_x^{ij}\;{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}dt=\int_0^n \left(-{}_tp_x^{ij}\sum_{j\neq i}\mu_{x+t}^{ji}+\sum_{h\neq j}{}_tp_x^{ih}\mu_{x+t}^{hj}\right){}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}dt$$

Integrala garatuz,

$$\int_0^n \frac{d}{dt}{}_tp_x^{ij}\;{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}dt=\left[{}_tp_x^{ij}\;{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}\right]_0^n-\int_0^n {}_tp_x^{ij}\frac{d}{dt}{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}dt$$

Kontutan hartuz,

$${}_0P_x^{ij}=0 \quad i\neq j \text{ izanda}$$

$${}_0P_x^{jj}=1$$

Sabiendo que

$$\frac{d}{dt}{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}=\frac{d}{dt}\frac{{}_n\overline{p}_x^{jj}}{{}_t\overline{p}_x^{jj}}=-{}_n\overline{p}_x^{jj}\frac{\frac{d}{dt}{}_t\overline{p}_x^{jj}}{({}_t\overline{p}_x^{jj})^2}=-{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}\frac{\frac{d}{dt}{}_t\overline{p}_x^{jj}}{{}_t\overline{p}_x^{jj}}={}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}\sum_{j\neq i}\mu_{x+t}^{ji}$$

Integralaren emaitza,

$${}_np_x^{ij}-\int_0^n {}_tp_x^{ij}\;{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}\sum_{j\neq i}\mu_{x+t}^{ji}dt$$

Azkenik, lortzen dugu.

$${}_nP_x^{ij}=\int_0^n\sum_{h\neq j}{}_tp_x^{ih}\mu_{x+t}^{hj}\;{}_{n-t}\overline{p}_{x+t}^{jj}dt$$

BIBLIOGRAFIA

Oinarrizko bibliografia

Alegre, A. (1990). *Valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez*. Edicions Universitat de Barcelona. Barcelona.

Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, A.M. eta Rojo J.L. (2006). *Estadística actuarial vida*. Edicions Universitat de Barcelona.

BOE 174 zk (2012/07/21). *Resolución de 6 de julio de 2012 de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones.*

BOE 244 zk (2000/10/11). *Resolución de 3 de octubre de 2000 de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones.*

Haberman, S. eta Pitacco, E. (1999). *Actuarial models for disability insurance.* Cahpman & Hall/CRC Press LLC. United States of America.

Lopez Cachero, M. eta Lopez de la Manzanara, J. (1996). *Estadística para actuarios*. Fundación Mapfre Estudios. Madrid.

Palacios, H. E. (1996). *Introducción al cálculo actuarial*. Ed. Mapfre. Madrid.

Pérez Hernandez, A. (2004). *Aplicación de las nuevas tecnologías a la previsión social y seguros de vida, utilizando métodos de estadística actuarial.* CD-ROM. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.

Vegas Perez, A. (1981). *Estadística, Aplicaciones Econométricas y Actuariales.* Ed. Pirámide. Madrid.

Gehigarrizko Bibliografia

Bowers, N.L., Gerber, H.G., Hickman, J.C., Jones, D.A. eta Nesbitt, C.J. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries. Itasca, Illinois.

Gerber, H.U., (1997). *Life Insurance Mathematics.* Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Swiss Association of Actuaries Zürich.

Jordan, C.W. (1991). *Life Contingencies*. The Society of Actuaries. Chicago.

Lasheras, A. (1948). *Matemática del seguro*. Ed. Dossat. Barcelona.

Legina, J. (1989). *Fundamentos de demografía*. Siglo XXI. Madrid.

Levi, E. (1973). *Curso de matemática financiera y actuarial, volumen II*. Editorial Bosch. Barcelona.

Pavía, J.M. (2010). *101 ejercicios resueltos de estadística actuarial vida*. Ibergarceta plublicaciones. España.

Internet

Aktuarioak.org
Actuarios.org