Gida duten problemak

Leire Legarreta, Luis Martínez
Kurtsoa "Grafo teoriako oinarrizko hastapenak"(EHU-ko 2013ko O.C.W proiektua)

1. Baldin eta $\mathcal{G}$, $n > 1$ ordenako grafoa bada, frogatu $\mathcal{G}$ grafoak gutxienez maila berdineko bi erpin dituela.

   Laguntza: Frogatu emaitza n gaineko indukzioa erabili. Suposatuz emaitza ez dela betetzen n balioarentzat, frogatu $\mathcal{G}$ grafoak erpin isolatu bat duela, eta ondoren indukzio hipotesia aplikatuta lortu kontraesan bat.

2. Baldin eta $\mathcal{G}$ grafoa bada, frogatu $\mathcal{G}$ edo $\mathcal{G}^c$ grafo konexua dela. Ziurta daiteke $\mathcal{G}$ edo $\mathcal{G}^c$ grafo ez-konexua dela?

   Laguntza: Baldin eta $\mathcal{G}$ ez-konexua bada, ohartu $\mathcal{G}$ grafoaren osagarrian, osagai konexu desberdinetako edozein bi erpin lotuta daudela. Problemaren bigarren zatirako, egokia den grafo zikliko bat kontutan hartu.

3. Frogatu grafo bat bi zatiko partiketakoa dela baldin eta soilik baldin ez baditu onartzen ordena bakoitiko ziklorik.

   Laguntza: Nahikoa da emaitza grafo konexuentzako frogatzea. Baldin eta grafoa bi zatiko partiketakoa bada, nabaria da grafoak ez dituela onartzen ordena bakoitiko ziklorik. Kontrako norabidea frogatzeko: Lehenengo eta behin, grafo konexu batetan bi erpinen arteko distantzia, bi erpin hauek lotzen dituzten bide guztien arteko luzera txikiena gisa definitzen da. Ondoren, baldin eta grafo konexu batek ez baditu ordena bakoitiko ziklorik onartzen, eta baldin eta finkatzen badugu grafoko edozein u erpina, frogatu grafoa bi zatiko partiketakoa dela, A eta B alderdidunak, non A u erpinagandik distantzia bikoiti batetara dauden erpinetaz osatuta dagoen, eta B ordea, u erpinagandik distantzia bakoiti batetara dauden erpinetaz osatuta dagoen.

4. Izan bitez $\mathcal{G}_1$ eta $\mathcal{G}_2$ erpin komun gabeko bi grafo eulertar konexuak. Izan bitez u_1, $\mathcal{G}_1$-eko erpin bat eta u_2, $\mathcal{G}_2$-ko beste erpin bat. Osa dezagun $\mathcal{G}$ grafoa ondoko eran: $\mathcal{G}_1$-ren erpin eta ertz guztien bildura gehi $\mathcal{G}_2$-ren erpin eta ertz guztien bildura gehi u_1u_2 erpina. Zer esan daiteke sortutako $\mathcal{G}$ grafo berriari buruz?

   Laguntza: Kontutan hartu grafo berriaren erpinen mailen parekidetasuna.

5. Izan bedi $\mathcal{G} = (V, A)$ grafoa. $\mathcal{G}$ grafoaren lerroen grafoa, $L(\mathcal{G})$ bidez denotatzen dena, grafo berri bat da, non bere erpinen multzoa $\mathcal{G}$ grafoaren ertz guztiak osatzen duten A multzoa den, eta non $L(G)$ grafo berriko bi erpin, albo-erpinak diren, $\mathcal{G}$ grafoko ertz gisa kontsideratuz mutur komun bat baldin badute. Baldin eta $\mathcal{G}$ grafo eulertarra bada, frogatu $L(\mathcal{G})$ grafo Hamiltondarra dela.

   Laguntza: Frogatu $\mathcal{G}$ grafo baten edozein zirkuitu eulertarra, $L(\mathcal{G})$ grafoaren ziklo hamiltondarra dela.

6. Grafo konexu baten ertz bat zubia dela esaten da, baldin eta ertza hori kentzerakoan grafo berria ezkonexua bada. Frogatu zuhaitz bateko edozein ertza zubia dela.

   Laguntza: Izan bitez $\mathcal{G}$ grafo bat eta a, $\mathcal{G}$ grafoko ertz bat. Demagun absurdura eramanez $\mathcal{G} - \{a\}$ grafoa konexua dela. Orduan frogatu $\mathcal{G} - \{a\}$ zuhaitza dela. Ohartu gaitezen kontraesan batera heltzen garela, $\mathcal{G} - \{a\}$ grafoko erpinen eta ertzen kopurua zenbakituz.

7. Frogatu bat baino ordena handiagoko edozein zuhaitz bi zatiko partiketako zuhaitza dela.

   Laguntza: Erabili 3. probleman frogatutako emaitza.

8. Baldin eta planarrak diren bi grafok, erpin, ertz eta aurpegi kopuru berdinak badituzte, grafo hauek nahitaez isomorfoak izan behar dute?

   Laguntza: Har itzazu ordena berdina duten bi zuhaitz.

9. Izan bedi k osagai konexu dituen grafo baten adierazpen planarra, n erpin, m ertz eta c aurpegi dituena. Frogatu $n - m + c = k + 1$ dela.

   Laguntza: Aplikatu Eulerren formula osagai konexu bakoitzari.

10. Baldin eta $\mathcal{G}$, n ordenako grafoa bada, frogatu $\chi(\mathcal{G}) = 1$ dela baldin eta soilik baldin $\mathcal{G}$ eta E_n grafo isomorfoak badira, eta $\chi(\mathcal{G}) = n$ dela baldin eta soilik baldin $\mathcal{G}$ eta K_n grafo isomorfoak badira.

    Laguntza: Norabide bat berehalakoa da kasu bietan. Beste norabiderako, baldin eta $\chi(\mathcal{G}) = 1$ eta grafoa ez hutsa badira, kontraesan bat lortu ertz bat duelaren ekintzarekiko. Bestalde, baldin eta $\chi(\mathcal{G}) = n$ bada, n gaineko indukzioz frogatu $\mathcal{G}$, K_n-ren isomorfoa dela, kontutan harturik zenbaki kromatikoak $\chi(\mathcal{G}) \leq \Delta(\mathcal{G}) + 1$ desberdintza betetzen duela.

11. Izan bitez A multzoa eta $S_1, ..., S_n$, A multzoaren azpimultzoak. Definizioz $S_1, ..., S_n$-ren adierazle desberdinen sistema bat, A-ren B azpimultzo bat da, zeinentzat S_i bakoitzak B multzoarekin elementu komun bakarra duen. Emanda $S_1, ..., S_n$, A-ren azpimultzoak, frogatu azpimultzo hauentzat adierazle desberdinen sistema bat existitzen dela baldin eta soilik baldin edozein $i \in \{1, ..., n\}$ baliorentzat, $S_1, ..., S_n$ multzoen artean aukeratutako edozein i multzoen bidura, i edo tamaina handiagokoa bada.

    Laguntza: Bi zatiko partiketako grafo egoki bati, $S_1, ..., S_n$ eta A, hurrenez hurren partiketa onartzen duenari, Hall-en teorema aplikatu.