# Problemen bilduma

Leire Legarreta, Luis Martínez

Kurtsoa "Grafo teoriako oinarrizko hastapenak"(EHU-ko 2013ko O.C.W proiektua)

1. Baldin eta $\mathcal{G}$, $n > 1$ ordenako grafoa bada, frogatu $\mathcal{G}$ grafoak gutxienez maila berdineko bi erpin dituela.

2. Baldin eta $\mathcal{G}$ grafoa bada, frogatu $\mathcal{G}$ edo $\mathcal{G}^c$ grafo konexua dela. Ziurta daiteke $\mathcal{G}$ edo $\mathcal{G}^c$ grafo ez-konexua dela?

3. Frogatu grafo bat bi zatiko partiketakoa dela baldin eta soilik baldin ez baditu onartzen ordena bakoitiko ziklorik.

4. Izan bitez $\mathcal{G}_1$ eta $\mathcal{G}_2$ erpin komun gabeko bi grafo eulertar konexuak. Izan bitez $u_1$, $\mathcal{G}_1$-eko erpin bat eta $u_2$, $\mathcal{G}_2$-ko beste erpin bat. Osa dezagun $\mathcal{G}$ grafoa ondoko eran: $\mathcal{G}_1$-ren erpin eta ertz guztien bildura gehi $\mathcal{G}_2$-ren erpin eta ertz guztien bildura gehi $u_1u_2$ erpina. Zer esan daiteke sortutako $\mathcal{G}$ grafo berriari buruz?

5. Izan bedi $\mathcal{G} = (V, A)$ grafoa. $\mathcal{G}$ grafoaren lerroen grafoa, $L(\mathcal{G})$ bidez denotatzen dena, grafo berri bat da, non bere erpinen multzoa $\mathcal{G}$ grafoaren ertz guztiak osatzen duten $A$ multzoa den, eta non $L(G)$ grafo berriko bi erpin, albo-erpinak diren, $\mathcal{G}$ grafoko ertz gisa kontsideratuz mutur komun bat baldin badute. Baldin eta $\mathcal{G}$ grafo eulertarra bada, frogatu $L(\mathcal{G})$ grafo Hamiltondarra dela.

6. Grafo konexu baten ertz bat zubia dela esaten da, baldin eta ertza hori kentzerakoan grafo berria ezkonexua bada. Frogatu zuhaitz bateko edozein ertza zubia dela.

7. Frogatu bat baino ordena handiagoko edozein zuhaitz bi zatiko partiketako zuhaitza dela.

8. Baldin eta planarrak diren bi grafok, erpin, ertz eta aurpegi kopuru berdinak badituzte, grafo hauek nahitaez isomorfoak izan behar dute?

9. Izan bedi $k$ osagai konexu dituen grafo baten adierazpen planarra, $n$ erpin, $m$ ertz eta $c$ aurpegi dituena. Frogatu $n - m + c = k + 1$ dela.

10. Baldin eta $\mathcal{G}$, $n$ ordenako grafoa bada, frogatu $\chi(\mathcal{G}) = 1$ dela baldin eta soilik baldin $\mathcal{G}$ eta $E_n$ grafo isomorfoak badira, eta $\chi(\mathcal{G}) = n$ dela baldin eta soilik baldin $\mathcal{G}$ eta $K_n$ grafo isomorfoak badira.

11. Izan bitez $A$ multzoa eta $S_1, ..., S_n$, $A$ multzoaren azpimultzoak. Definizioz $S_1, ..., S_n$-ren adierazle desberdinen sistema bat, $A$-ren $B$ azpimultzo bat da, zeinentzat $S_i$ bakoitzak $B$ multzoarekin elementu komun bakarra duen. Emanda $S_1, ..., S_n$, $A$-ren azpimultzoak, frogatu azpimultzo hauentzat adierazle desberdinen sistema bat existitzen dela baldin eta soilik baldin edozein $i \in \{1, ..., n\}$ baliorentzat, $S_1, ..., S_n$ multzoen artean aukeratutako edozein $i$ multzoen bidura, $i$ edo tamaina handiagokoa bada.