4. Gaia: Espezifikazio ekuazionala

6. Ariketa-orria

1. Hurrengo espezifikazio ekuazionaletan hutsuneak (___) bete.

1.1. A arbola bitarraren hosto kopurua kalkulatzen duena.

Mota: $arbit(T)$
Lag: nat
Eragiketa:
$hostoKop$: $arbit(T) \rightarrow nat$
Ekuazioak:
(1) $hostoKop(\underline{\ hutsa\ }) = 0$
(2) $hostoKop(\underline{\ errotu(x, ezk, esk)\ }) =$
$1 + hostoKop(ezk) + hostoKop(esk)$

1.2. Sekuentzia baten alderantzizkoa kalkulatzen duena.

Mota: $sekuentzia(T)$
Lag: (ez dago)
Eragiketa:
$alderantzizkoa$: $sekuentzia(T) \rightarrow sekuentzia(T)$
Ekuazioak:
(1) $alderantzizkoa(\underline{\ \langle\ \rangle\ }) = \langle\ \rangle$
(2) $alderantzizkoa(\underline{\ x \bullet S\ }) = alderantzizkoa(S) \ @ \ \langle x \rangle$

2. Hurrengo espezifikazio ekuazionaletan ekuazioak osatu.

2.1. Sekuentzia bat (T motako elementuz osatua) arbola bitar baten (T motako elementuz osatua) *adar osoa* den ala ez erabakitzen duena. Konkretuki, funtzio horrek erabakitzen du ea sekuentziak (datua) arbolaren (datua) errotik hostoren batera joateko pasa behar diren adabegi guztiak dauzkan, eta pasatako ordena berean.

Soluzioa:

Mota: $sekuentzia(T)$
Lag: $arbit(T)$, $bool$
Eragiketa:
$adarra\_da?$: $sekuentzia(T) \times arbit(T) \rightarrow bool$
Ekuazioak:
(1) $adarra\_da?(\langle\ \rangle, hutsa) = true$
(2) $adarra\_da?(\langle\ \rangle, errotu(y, ezk, esk)) = false$
(3) $adarra\_da?(x \bullet S, hutsa) = false$
(4) $adarra\_da?(x \bullet S, errotu(y, ezk, esk)) =$

$$\begin{cases} true & \text{baldin } x = y \ \wedge \ hutsa\_da?(S) \wedge \\ & \qquad\qquad hutsa\_da?(ezk) \wedge \\ & \qquad\qquad hutsa\_da?(esk) \\ adarra\_da?(S, ezk) \vee & \\ adarra\_da?(S, esk) & \text{baldin } x = y \ \wedge \ \neg hutsa\_da?(S) \\ false & \text{bestela} \end{cases}$$

2.2. Elementu bat sekuentzia batean zenbat aldiz agertzen den erabakitzen duena.

Soluzioa:

Mota: $sekuentzia(T)$
Lag: nat
Eragiketa:
$agerpenKop$: $T \times sekuentzia(T) \rightarrow nat$
Ekuazioak:
(1) $agerpenKop(x, \langle\ \rangle) = 0$
(2) $agerpenKop(x, y \bullet S) = \begin{cases} 1 + agerpenKop(x, S) & \text{baldin } x = y \\ agerpenKop(x, S) & \text{bestela} \end{cases}$

2.3. Bi sekuentzia ordenatuen nahasketa ordenatua egiten duena.

Soluzioa:

Mota: $sekuentzia(T)$
Lag: (ez dago)
Eragiketa:
$nahastu$: $sekuentzia(T) \times sekuentzia(T) \rightarrow sekuentzia(T)$
Ekuazioak:
(1) $nahastu(\langle\ \rangle, \langle\ \rangle) = \langle\ \rangle$
(2) $nahastu(\langle\ \rangle, y \bullet S) = y \bullet S$
(3) $nahastu(x \bullet R, \langle\ \rangle) = x \bullet R$
(4) $nahastu(x \bullet R, y \bullet S) = \begin{cases} x \bullet nahastu(R, y \bullet S) & \text{baldin } x \leq y \\ y \bullet nahastu(x \bullet R, S) & \text{bestela} \end{cases}$

2.4. Arbola bitar baten adabegi kopurua kalkulatzen duena.

Soluzioa:

Mota: $arbit(T)$
Lag: nat
Eragiketa:
$adabegiKop$: $arbit(T) \rightarrow nat$
Ekuazioak:
(1) $adabegiKop(hutsa) = 0$
(2) $adabegiKop(errotu(x, ezk, esk)) =$
$1 + adabegiKop(ezk) + adabegiKop(esk)$

3. Idatzi ondoko funtzioei dagozkien ekuazioak, lehendik espezifikatuta dauden *pila*, *sekuentzia* eta *arbit* datu-mota abstraktuen aberasgarri gisa.

3.1. Elementu bat arbola bitar batean zenbat aldiz agertzen den erabakitzen duena.

Soluzioa:

Mota: $arbit(T)$
Lag: *bool*
Eragiketa:
  $agertzen\_da?$: $T \times arbit(T) \rightarrow bool$
Ekuazioak:
  (1) $agertzen\_da?(x, hutsa) = false$
  (2) $agertzen\_da?(x, errotu(y, ezk, esk)) =$

$$\begin{cases} true & \text{baldin } x \leq y \\ agertzen\_da?(x, ezk) \ \vee \ agertzen\_da?(x, esk) & \text{bestela} \end{cases}$$

3.2. Arbola bitar baten muga kalkulatzen duena (muga = hostoen sekuentzia).

Soluzioa:

Mota: $arbit(T)$
Lag: $sekuentzia(T)$
Eragiketa:
  $muga$:$arbit(T) \rightarrow sekuentzia(T)$
Ekuazioak:
  (1) $muga(hutsa) = \langle \ \rangle$
  (2) $muga(errotu(x, ezk, esk)) =$

$$\begin{cases} \langle x \rangle & \text{baldin } hutsa\_da?(ezk) \wedge hutsa\_da?(esk) \\ muga(x, ezk)@ & \\ \qquad muga(x, esk) & \text{bestela} \end{cases}$$

3.3. Bi arbola bitar emanda, bata bestearen ispilu-iridua den ala ez erabakitzen duena.

Soluzioa:

Mota: $arbit(T)$
Lag: *bool*
Eragiketa:
  $ispilua\_da?$: $arbit(T) \times arbit(T) \rightarrow bool$
Ekuazioak:
  (1) $ispilua\_da?(hutsa, hutsa) = true$
  (2) $ispilua\_da?(errotu(x, ezk1, esk1), hutsa) = false$
  (3) $ispilua\_da?(hutsa, errotu(y, ezk2, esk2)) = false$
  (4) $ispilua\_da?(errotu(x, ezk1, esk1), errotu(y, ezk2, esk2)) =$

$$\begin{cases} ispilua\_da?(ezk1, ezk2) \wedge & \\ \qquad ispilua\_da?(esk1, esk2) & \text{baldin } x = y \\ false & \text{bestela} \end{cases}$$

3.4. Arbola bitar bat inordenaz korrituta lortzen den sekuentzia itzultzen duena

Soluzioa:

Mota: $arbit(T)$
Lag: $sekuentzia(T)$
Eragiketa:
$inorder$: $arbit(T) \rightarrow sekuentzia(T)$
Ekuazioak:
(1) $inorder(hutsa) = \langle\ \rangle$
(2) $inorder(errotu(x, ezk, esk)) = \langle x \rangle @ inorder(ezk) @ inorder(esk)$

3.5. Arbola bitarren pila bateko arbola guztiak inordenaz korrituta lortzen den sekuentzia itzultzen duena.

Soluzioa:

Mota: $pila(arbit(T))$
Lag: $sekuentzia(T)$
Eragiketa:
$inorderPila$: $pila(arbit(T)) \rightarrow sekuentzia(T)$
Ekuazioak:
(1) $inorderPila(pilahutsa) = \langle\ \rangle$
(2) $inorderPila(pilaratu(P, A)) = inorder(A) @ inorderPila(P)$

3.6. P pilak eta S sekuentziak elementu berak eta ordena berean dituzten erabakitzen duena: P-ko gailurrekoa S-ko lehenengoari egokitzen zaio.

Soluzioa:

Mota: $pila(T)$
Lag: $sekuentzia(T)$, $bool$
Eragiketa:
$berdinak$: $pila(T) \times sekuentzia(T) \rightarrow bool$
Ekuazioak:
(1) $berdinak(pilahutsa, \langle\ \rangle) = true$
(2) $berdinak(pilaratu(P, x), \langle\ \rangle) = false$
(3) $berdinak(pilahutsa, y \bullet S) = false$
(4) $berdinak(pilaratu(P, x), y \bullet S) = \begin{cases} berdinak(P, S) & \text{baldin } x = y \\ false & \text{bestela} \end{cases}$

3.7. A arbola bitarra emanda A-ko adabegi batzuen sekuentzia itzultzen duena. Sekuentziarako aukeratzen diren adabegiek honako propietate hau betetzen dute: ezkerreko azpi-arbolaren pisua eskuinekoarena baino handiagoa edo berdina da.

Espezifikatu baita ere arbola bitarren gaineko *pisu* funtzioa.

Soluzioa:

Mota: $arbit(T)$
Lag: $sekuentzia(T)$, nat
Eragiketa:
  $segida$: $arbit(T) \to sekuentzia(T)$
  $pisu$: $arbit(T) \to nat$
Ekuazioak:
  (1) $segida(hutsa) = \langle\ \rangle$
  (2) $segida(errotu(x, ezk, esk)) =$
$$\begin{cases} \langle x \rangle @ segida(ezk) @ segida(esk) & \text{baldin } pisu(ezk) \geq pisu(esk) \\ segida(ezk) @ segida(esk) & \text{bestela} \end{cases}$$
  (3) $pisu(hutsa) = 0$
  (4) $pisu(errotu(x, ezk, esk)) = x + pisu(ezk) + pisu(esk)$

3.8. Idatzi *bikoiztu* funtzioaren espezifikazio ekuazionala. *bikoiztu* funtzioak banan-banan bikoitzen ditu sekuentzia bateko elementu guztiak.

Adibidez, $bikoiztu(\langle a, d, k, f \rangle)$ funtzioaren emaitza $\langle a, a, d, d, k, k, f, f \rangle$ da.

Soluzioa:

Mota: $sekuentzia(T)$
Lag: (ez dago)
Eragiketa:
  $bikoiztu$: $sekuentzia(T) \to sekuentzia(T)$
Ekuazioak:
  (1) $bikoiztu(\langle\ \rangle) = \langle\ \rangle$
  (2) $bikoiztu(x \bullet S) = \langle x, x \rangle @ bikoiztu(S)$

3.9. *Aurrizki* funtzioaren espezifikazio ekuazionala idatzi. *aurrizki* funtzioak, S sekuentzia eta n zenbaki arrunta emanda, S-ko n hasierako elementuez osatutako azpi-sekuentzi itzultzen du. S sekuentziak n elementu ez badauzka, orduan S sekuentzia itzultzen du.

Adibidez:

- $aurrizki(\langle 4, 4, 2, 1, 1, 8 \rangle, 3) = \langle 4, 4, 2 \rangle$
- $aurrizki(\langle 4, 4, 2, 1, 1, 8 \rangle, 9) = \langle 4, 4, 2, 1, 1, 8 \rangle$

Soluzioa:

Mota: $sekuentzia(T)$
Lag: (ez dago)
Eragiketa:
  $aurrizki$: $sekuentzia(T) \times nat \to sekuentzia(T)$
Ekuazioak:
  (1) $aurrizki(\langle\ \rangle, n) = \langle\ \rangle$
  (2) $aurrizki(x \bullet S, n) = \begin{cases} \langle\ \rangle & \text{baldin } n = 0 \\ x \bullet segida(S, n-1) & \text{bestela} \end{cases}$

4. Aurreko atalean definitutako funtzioak erabiliz, honako enuntziatuak adierazten dituzten asertzioak idatzi.

4.1. S eta R sekuentzia ordenatuen nahasketa eginda, T sekuentziaren alderantzizkoa lortzen da.

Soluzioa:

$$\{\ nahastu(S,R) = alderantzizkoa(T)\ \}$$

4.2. S sekuentziako elementuei P pilaren arbola bitar guztiak inordenan korrituz lortutako elementuak kateatuz sortzen den sekuentzia bat dator A arbola bitarra inordenan korrituz lortzen den sekuentziarekin.

Soluzioa:

$$\{\ S \ @\ inorderPila(P) = inorder(A)\ \}$$

5. Frogatu formaki hurrengo propietateak.

5.1. Edozein S sekuentzia ez-hutsetarako:

$$\{\ S = lehena(S) \bullet hondarra(S)\ \}$$

Soluzioa: S sekuentzia hutsa ez denez, orduan $S = x \bullet R$, non R sekuentzia bat den ($R \in sekuentzia(T)$) eta x edozein elementu ($x \in T$). Beraz:

$$\begin{aligned}
& lehena(S) \bullet hondarra(S) \\
&\quad = \underbrace{lehena(x \bullet R)}_{(s.2)} \bullet hondarra(x \bullet R) \\
&\quad = x \bullet \underbrace{hondarra(x \bullet R)}_{(s.4)} \\
&\quad = x \bullet R \\
&\quad = S
\end{aligned}$$

5.2. Edozein A arbola bitar ez-hutsetarako:

$$\{\ A = errotu(erroa(A), ezker(A), eskuin(A))\ \}$$

Soluzioa: A arbol bitar hutsa ez denez, orduan $A = errotu(x, ezk, esk)$, non ezk eta esk arbol bitar diren ($ezk \in arbit(T) \ \wedge \ esk \in arbit(T)$), eta x edozein elementu ($x \in T$). Beraz:

$$\begin{aligned}
& errotu(erroa(A), ezker(A), eskuin(A)) \\
&\quad = errotu(\underbrace{erroa(errotu(x, ezk, esk))}_{(a.2)}, ezker(errotu(x, ezk, esk)), \\
&\qquad\qquad eskuin(errotu(x, ezk, esk))) \\
&\quad = errotu(x, \underbrace{ezker(errotu(x, ezk, esk))}_{(a.4)}, eskuin(errotu(x, ezk, esk))) \\
&\quad = errotu(x, ezk, \underbrace{eskuin(errotu(x, ezk, esk))}_{(a.6)}) \\
&\quad = errotu(x, ezk, esk) \\
&\quad = A
\end{aligned}$$

5.3. P pila Q pilan iraulita lortzen den pilaren altuera bi pilen altueren batura da.

Soluzioa:

Mota: $pila(T)$
Lag: nat
Eragiketa:
    $irauli$: $pila(T) \times pila(T) \rightarrow pila(T)$
    $altuera$: $pila(T) \rightarrow nat$
Ekuazioak:
    (1) $irauli(pilahutsa, q) = q$
    (2) $irauli(pilaratu(p, x), q) = irauli(p, pilaratu(q, x))$
    (3) $altuera(pilahutsa) = 0$
    (4) $altuera(pilaratu(p, x)) = 1 + altuera(p)$

Frogatu behar dugun propietatea hurrengoa da:

$$\{ \; altuera(irauli(P, Q)) = altuera(P) + altuera(Q) \; \}$$

Indukzio bidezko frogapena egingo dugu eta indukzioa P pilaren gainean erabiliko dugu.

Oinarrizko kasua $P = pilahutsa$ da:

$$\begin{aligned}
& altuera(irauli(P, Q)) \\
& \quad = \quad altuera(\underbrace{irauli(pilahutsa, Q)}_{(1)}) \\
& \quad = \quad altuera(Q) \\
& \quad = \quad \underbrace{\;0\;}_{(3)} + altuera(Q) \\
& \quad = \quad altuera(pilahutsa) + altuera(Q) \\
& \quad = \quad altuera(P) + altuera(Q)
\end{aligned}$$

Indukzio-kasua $P = pilaratu(R, x)$ da, non $x \in T$ eta $R \in pila(T)$, eta erabiliko dugun indukzio-hipotesia hurrengoa da:

$$\textbf{(I.H.)} \qquad \{ \; altuera(irauli(R, Q)) = altuera(R) + altuera(Q) \; \}$$

Frogapena honako hau da:

$$
\begin{aligned}
& altuera(irauli(P, Q)) \\
= \;& altuera(\underbrace{irauli(pilaratu(R, x), Q)}_{(2)}) \\
= \;& \underbrace{altuera(irauli(R, pilaratu(Q, x)))}_{(I.H.)} \\
= \;& altuera(R) + \underbrace{altuera(pilaratu(Q, x))}_{(4)} \\
= \;& altuera(R) + 1 + altuera(Q) \\
= \;& \underbrace{1 + altuera(R)}_{(4)} + altuera(Q) \\
= \;& altuera(pilaratu(R, x)) + altuera(Q) \\
= \;& altuera(P) + altuera(Q)
\end{aligned}
$$

5.4. Edozein A arbola bitarren adabegi kopurua $2^{sakon(A)} - 1$ da gehienez.

Soluzioa:

<u>Mota</u>: $arbit(T)$
<u>Lag</u>: nat
<u>Eragiketa</u>:
  $adabegiKop$: $arbit(T) \to nat$
  $sakon$: $arbit(T) \to nat$
<u>Ekuazioak</u>:
  (1) $adabegiKop(hutsa) = 0$
  (2) $adabegiKop(errotu(x, ezk, esk)) =$
    $1 + adabegiKop(ezk) + adabegiKop(esk)$
  (3) $sakon(hutsa) = 0$
  (4) $sakon(errotu(x, ezk, esk)) = 1 + max(sakon(ezk), sakon(esk))$

Hurrengo propietatea frogatu behar dugu:

$$\{ \; adabegiKop(A) \leq 2^{sakon(A)} - 1 \; \}$$

Indukzio bidezko frogapena egingo dugu eta indukzioa A arbol bitarren gainean erabiliko dugu.

<u>Oinarrizko kasua</u> $A = hutsa$ da:

$$
\begin{aligned}
& adabegiKop(A) \\
= \;& \underbrace{adabegiKop(hutsa)}_{(1)} \\
= \;& 0 \\
= \;& \underbrace{2^0}_{(3)} - 1 \\
= \;& 2^{sakon(hutsa)} - 1 \\
= \;& 2^{sakon(A)} - 1
\end{aligned}
$$

Indukzio-kasua $A = errotu(x, Ezk, Esk)$ da, non $x \in T$ eta $Ezk \in arbit(T) \wedge Esk \in arbit(T)$, eta erabiliko dugun indukzio-hipotesia hurrengoa da:

(I.H. 1) $\{ \ adabegiKop(Ezk) \leq 2^{sakon(Ezk)} - 1 \ \}$

(I.H. 2) $\{ \ adabegiKop(Esk) \leq 2^{sakon(Esk)} - 1 \ \}$

Frogapena honako hau da:

$$\begin{aligned}
& adabegiKop(A) \\
= \quad & \underbrace{adabegiKop(errotu(x, Ezk, Esk))}_{(2)} \\
= \quad & 1 + \underbrace{adabegiKop(Ezk)}_{(I.H.1)} + adabegiKop(Esk) \\
\leq \quad & 1 + (2^{sakon(Ezk)} - 1) + \underbrace{adabegiKop(Esk)}_{(I.H.2)} \\
\leq \quad & 1 + (2^{sakon(Ezk)} - 1) + (2^{sakon(Esk)} - 1) \\
\leq \quad & 1 + 2 \times 2^{max(sakon(Ezk), sakon(Esk))} - 2 \\
= \quad & 1 + \underbrace{2^{1+max(sakon(Ezk), sakon(Esk))}}_{(4)} - 2 \\
= \quad & 1 + 2^{sakon(A)} - 2 \\
= \quad & 2^{sakon(A)} - 1
\end{aligned}$$