Soluciones a los problemas del método simplex

1. Forma estándar de los modelos.

1.1

$$
\begin{aligned}
\text{max } z &= 2x_1 + 4x_2 - 4x'_3 + 4x''_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{sujeto a} & \\
3x_1 + 2x_2 + 4x'_3 - 4x''_3 - x_4 &= 1 \\
4x_1 - 3x_2 &= 2 \\
2x_1 + x_2 + 6x'_3 - 6x''_3 + x_5 &= 3 \\
x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Observación: Cambio de variable $x_3 = x'_3 - x''_3$.

1.2

$$
\begin{aligned}
\text{max } (-z) &= -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{sujeto a} & \\
x_1 - 5x_2 + 6x_3 - x_4 &= 8 \\
-x_1 + 4x_2 - x_5 &= 12 \\
2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1.3

$$
\begin{aligned}
\text{max } (-z) &= 2x'_1 - 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{sujeto a} & \\
-2x'_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\
-2x'_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \\
x'_1 + 3x_2 - x_5 &= 3 \\
x'_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Observación: Cambio de variable $x'_1 = -x_1$.

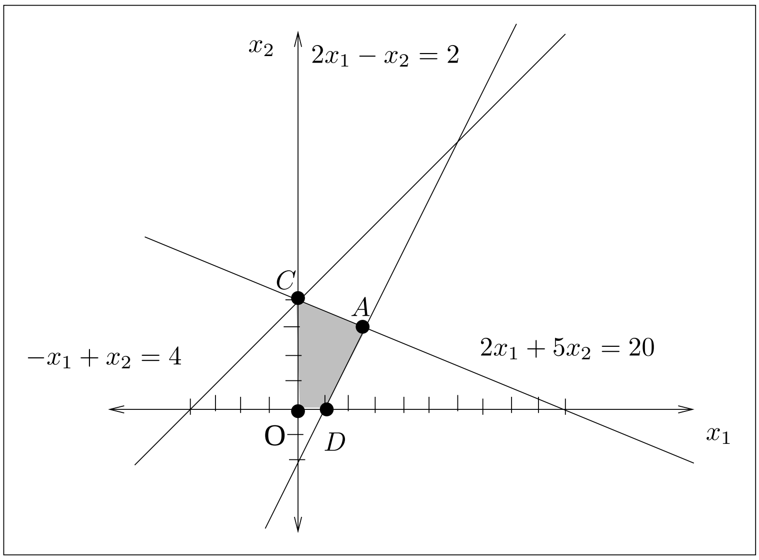
1.4

$$
\begin{aligned}
&\max z = -3x_1' - 7x_2 + 5x_3' - 5x_3'' + 0x_4 + 0x_5 \\
&\text{sujeto a} \\
&\qquad -x_2 + x_3' - x_3'' - x_4 = 9 \\
&\qquad x_1' - 2x_3' + 2x_3'' - x_5 = 5 \\
&\qquad -4x_1' - x_2 = 6 \\
&\qquad x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Observación: Cambios de variable $x_1' = -x_1$ y $x_3 = x_3' - x_3''$.

2. Cálculo de soluciones básicas y puntos extremos en la solución gráfica.

2.1 Solución gráfica.



2.2 y 2.3. Soluciones factibles básicas $\longleftrightarrow$ Puntos extremos.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$. Es una solución factible básica; $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 3$, corresponde al punto A.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -42 \end{pmatrix} \ngeq \mathbf{0}$. No es una solución factible; no corresponde a ningún punto extremo.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$. Es una solución factible básica degenerada; $x_1 = 0, x_2 = 4$, corresponde al punto C.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$. Es una solución factible básica; $x_1 = 1, x_2 = 0$, corresponde al punto D.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix} \not\geq \mathbf{0}$. No es una solución factible, no corresponde a ningún punto extremo.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \\ 10 \end{pmatrix} \not\geq \mathbf{0}$. No es una solución factible, no corresponde a ningún punto extremo.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix} \not\geq \mathbf{0}$. No es una solución factible, no corresponde a ningún punto extremo.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$. Es una solución factible básica degenerada; $x_1 = 0, x_2 = 4$, corresponde al punto C.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$. Es una solución factible básica degenerada. $x_1 = 0, x_2 = 4$, corresponde al punto C.

– $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5), \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$. Es una solución factible básica; $x_1 = 0, x_2 = 0$, corresponde al punto O.

3. Solución óptima: $x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 7$.

4. La solución correspondiente a la base $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ es óptima porque todos los indicadores son mayores o iguales que cero,

$$z_4 - c_4 = 1,\ z_5 - c_5 = 2,\ z_6 - c_6 = 1.$$

Solución óptima: $x_1^* = 1, \quad x_2^* = 3, \quad x_3^* = 1, \quad z^* = 13.$

5. Comprobación de los cálculos de la tabla.

5.1 El vector $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene errores porque $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1$.

5.2 El vector $\mathbf{y}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ no tiene errores porque $\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5$.

5.3 Cálculos que faltan en la tabla.

$$\mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$z_3 - c_3 = -1,$$

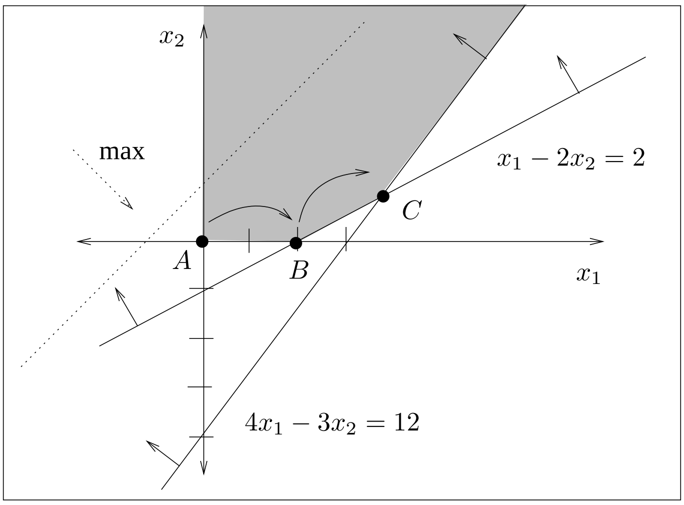
$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad z = 8.$$

6. Cálculo de la solución óptima y puntos extremos en la gráfica.

6.1 Aplicando el algoritmo simplex se recorren 3 soluciones básicas, la tercera es la solución óptima.

- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 0, x_2 = 0 \quad \to A.$
- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4), \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 2, x_2 = 0 \quad \to B.$
- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad x_1^* = \frac{18}{5}, x_2^* = \frac{4}{5} \quad \to C.$

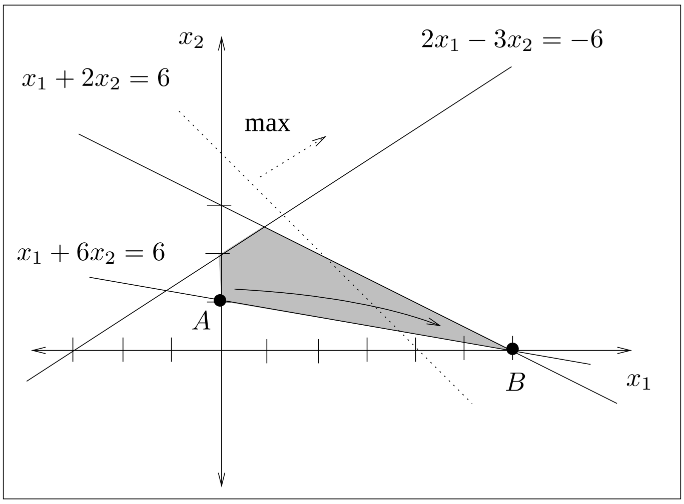
En la gráfica se observa a qué punto extremo corresponde cada solución básica y el recorrido del algoritmo.



6.2 Aplicando el algoritmo simplex se recorren cuatro soluciones básicas, la cuarta es la solución óptima.

- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_{w1}, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5), \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$
- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5), \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 0, x_2 = 1 \quad \to A.$
- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5), \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 6, x_2 = 0 \quad \to B.$
- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1^* = 6, x_2^* = 0 \quad \to B.$

En la gráfica se observa a qué punto extremo corresponde cada solución básica y el recorrido del algoritmo.



7. Soluciones óptimas utilizando el algoritmo simplex.

   7.1 Solución óptima única: $x_1^* = 0, \quad x_2^* = 8, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 16.$

   7.2 Solución óptima única: $x_1^* = -1, \quad x_2^* = 7, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = -12.$

   7.3 Solución óptima única: $x_1^* = 5, \quad x_2^* = 6, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = -13.$

   7.4 Soluciones óptimas múltiples: $z^* = 24$,

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 2, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 2,$$

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 3, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 0.$$

   7.5 Soluciones óptimas múltiples: $z^* = -73$

$$x_1^* = \frac{9}{2}, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = \frac{1}{2}, \quad x_5^* = 0,$$

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 23, \quad x_5^* = 9.$$

   7.6 Problema infactible.

   7.7 Solución no acotada.

   7.8 Problema infactible.