1. El problema del transporte.
   1. Forma matricial.
   2. Teoremas y definiciones.
   3. El método de la esquina noroeste.
   4. El método de Vogel.
   5. La tabla del transporte.
   6. El algoritmo del transporte.
2. El problema de asignación.
   1. El método Hungaro.
   2. El algoritmo de asignación.

El problema de transporte

Orígenes: $O_1, \ldots, O_m$. Destinos: $D_1, \ldots, D_n$.

- Oferta de O_i: a_i, $i = 1, \ldots, m$.
- Demanda de D_j: b_j, $j = 1, \ldots, n$.
- c_{ij} coste de transporte de O_i a D_j .
- x_{ij}: unidades a enviar desde O_i hasta D_j.

$$
\begin{aligned}
\min \ z \ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{sujeto a} & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Forma estándar del problema de transporte

$$\min \; z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

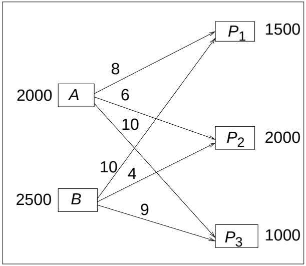
sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

Datos del problema



Modelo en forma estándar

$$\min\ z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

sujeto a

$$\begin{array}{ccccccl}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 2000 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 2500 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = 1500 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & = 2000 \\
 & & x_{33} & & & +x_{33} & = 1000
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Estructura de la matriz **A**

$$\min\ z \;=\; (8,\ 6,\ 10,\ 10,\ 4,\ 9)\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2500 \\ 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Forma matricial

	D_1	D_2	$\cdots$	D_n	Oferta
O_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
O_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
O_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Demanda	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Figura: Forma matricial para el problema del transporte

Forma matricial para el ejemplo

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A	8	6	10	2000
B	10	4	9	2500
Demanda	1500	2000	1000	

Ejemplo 1

Un problema de producción → 4 trimestres

1. Capacidad de producción: 150 unidades cada trimestre.
2. Demanda: 200, 150, 200 y 100 cada trimestre.
3. Coste unitario de producción: 2.
4. Coste unitario de almacenamiento: 0.5.
5. x_{ij} : unidades producidas en i para la demanda de j.
6. No se pueden satisfacer las demandas con retraso.

	1	2	3	4	Oferta
1	2	2.5	3	3.5	150
2	M	2	2.5	3	150
3	M	M	2	2.5	150
4	M	M	M	2	150
Demanda	200	150	200	100	

Ejemplo 2

Un problema de producción → 4 clientes

1. Producción mensual en las plantas A, B y C: 1500 unidades en cada planta.
2. Demanda de los clientes: 1000, 1200, 1500 y 1000.
3. Beneficio unitario: 110.
4. Costes unitarios de envío:

	1	2	3	4
A	30	10	25	20
B	15	25	30	10
C	20	30	15	20

	1	2	3	4	Oferta
A	80	100	85	90	1500
B	95	85	80	100	1500
C	90	80	95	90	1500
Demanda	1000	1200	1500	1000	

Problema equilibrado

El problema es equilibrado si $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

1. **Caso 1.** La oferta es menor que la demanda:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Crear un origen ficticio, O_{m+1}, con oferta

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

y costes de transporte

$$c_{m+1,j} = 0, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Equilibrar el problema

La demanda mayor que la oferta

	1	2	3	Oferta
1	2	4	3	10
2	6	1	4	20
Demanda	20	20	20	

- Oferta total = $a_1 + a_2 = 10 + 20 = 30$.
- Demanda total = $b_1 + b_2 + b_3 = 20 + 20 + 20 = 60$.
- Origen ficticio 3 $\rightarrow$ oferta $a_3 = 60 - 30 = 30 \rightarrow$ costes $c_{31} = c_{32} = c_{33} = 0$.

	1	2	3	Oferta
1	2	4	3	10
2	6	1	4	20
3	0	0	0	30
Demanda	20	20	20	

Problema equilibrado

2. **Caso 2.** La demanda es menor que la oferta:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Crear un destino ficticio, D_{n+1}, con demanda

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

y costes de transporte

$$c_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Equilibrar el problema

La oferta mayor que la demanda

	1	2	3	Oferta
1	3	2	1	50
2	6	4	4	50
Demanda	20	20	20	

- Oferta total = $a_1 + a_2 = 50 + 50 = 100$.
- Demanda total = $b_1 + b_2 + b_3 = 20 + 20 + 20 = 60$.
- Destino ficticio 4 $\rightarrow$ demanda $b_4 = 100 - 60 = 40 \rightarrow$ costes $c_{14} = c_{24} = 0$.

Problema equilibrado

	1	2	3	4	Oferta
1	3	2	1	0	50
2	6	4	4	0	50
Demanda	20	20	20	40	

Teorema

Para que el problema de transporte tenga solución es condición necesaria y suficiente que la oferta total sea igual a la demanda total.

Teorema

Un problema de transporte equilibrado siempre tiene una solución factible.

Teorema

Todo problema de transporte equilibrado tiene una solución básica factible. Esta solución tiene,como máximo, $m + n - 1$ variables positivas.

Tabla de flujos de transporte

	D_1	D_2	$\cdots$	D_n	Oferta
O_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
O_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
O_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
Demanda	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Figura: Tabla de flujos del problema de transporte

Solución factible básica inicial

El método de la esquina noroeste

Paso 0. Equilibrar el problema.

Paso 1. Elegir la esquina noroeste (i, j) de la tabla de flujos.

Paso 2. Asignar el mayor flujo posible de transporte, x_{ij}, en esa posición.

$$x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}.$$

Actualizar la oferta a_i y la demanda b_j.

- Si el mínimo es a_i, la oferta del origen O_i será cero y se prescinde de la fila i para asignaciones posteriores. Se actualiza la demanda a $b_j - a_i$.
- Si el mínimo es b_j, el destino D_j queda satisfecho y se prescinde de la columna j en las asignaciones posteriores. Se actualiza la oferta a $a_i - b_j$.
- Si a_i y b_j tienen el mismo valor, la oferta y la demanda son cero al mismo tiempo. Se prescinde de la fila i y de la columna j en asignaciones posteriores.

Paso 3. Se pueden dar dos casos.

- Si queda sólo una fila o sólo una columna, se asignan todas las unidades que están sin asignar. Parar.
- En otro caso, ir al Paso 1.

Ejemplo

Primera iteración

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A_1	8	6	10	2000
A_2	10	4	9	2500
Demanda	1500	2000	1000	

- Paso 0. Equilibrar el problema.
  Oferta $= 2000 + 2500 = 1500 + 2000 + 1000 =$ Demanda $\longrightarrow$ equilibrado
- Paso 1. Elegir la esquina noroeste: fila 1 y columna 1.
- Paso 2. Asignar $x_{11} = \min\{2000, 1500\} = 1500$
  Nueva oferta A : $2000 - x_{11} = 500$. Nueva demanda: P_1 : $1500 - x_{11} = 0$.
  Destino P_1 satisfecho. Prescindir de la columna 1 en cálculos posteriores.
- Paso 3. Queda más de una fila y de una columna sin sombrear en la tabla. Ir al Paso 1.

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A_1	*			2000
A_2				2500
Demanda	1500	2000	1000	

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A_1	1500			~~2000~~ 500
A_2				2500
Demanda	~~1500~~	2000	1000	

Ejemplo

Segunda iteración

- Elegir la esquina noroeste: fila 1 y columna 2.
- Asignar $x_{12} = \min\{500, 2000\} = 500$.
- Actualizar la oferta y la demanda. A_1 satisfecho
- Sólo queda un origen; asignar $x_{22} = 1500$ y $x_{23} = 1000$

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A_1	1500	500		~~2000~~ ~~500~~
A_2				2500
Demanda	~~1500~~	~~2000~~ 1500	1000	

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A_1	1500	500		2000
A_2		1500	1000	2500
Demanda	1500	2000	1000	

- Solución.

$$x_{11} = 1500,\ x_{12} = 500,\ x_{13} = 0,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 1500,\ x_{23} = 1000$$

- Coste de transporte.

$$z = (8 \times 1500) + (6 \times 500) + (4 \times 1500) + (9 \times 1000) = 30000$$

El método de Vogel se diferencia del método de la esquina noroeste en la elección de casilla para hacer asignaciones.

En el método de Vogel para elegir casilla se calculan las diferencias por filas y por columnas.

- $DF_i =$ diferencia en valor absoluto de los 2 costes menores de la fila i.
- $DC_j =$ diferencia en valor absoluto de los 2 costes menores de la columna j.

Cálculo de una solución factible básica inicial

El método de Vogel

Paso 0. Equilibrar el problema.

Paso 1. Calcular las diferencias por fila y por columna en la tabla de costes. Seleccionar la fila o columna de mayor diferencia y en ella la casilla (i, j) de mínimo coste c_{ij}.

Paso 2. En la tabla de flujos, asignar a la variable x_{ij} el flujo máximo posible en la posición seleccionada.

$$x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}.$$

Actualizar la oferta a_i y la demanda b_j.

- Si el mínimo es a_i, la nueva oferta del origen O_i es cero y se prescinde de la fila i para asignaciones posteriores. Se actualiza la demanda a $b_j - a_i$.
- Si el mínimo es b_j, el destino D_j queda satisfecho y se prescinde de la columna j en asignaciones posteriores. Se actualiza la oferta a $a_i - b_j$.
- Si a_i y b_j tienen el mismo valor, la oferta y la demanda se hacen cero al mismo tiempo. Se prescinde de la fila i y de la columna j en asignaciones posteriores.

Paso 3. Se pueden dar dos casos.

- Si queda sólo una fila o sólo una columna, se asignan todas las unidades que están sin asignar. Parar.
- En otro caso, ir al Paso 1.

Primera iteración

Paso 1. Calcular DF_i y DC_j. Elegir la posición $c_{22} = 4$.

Tabla de costes

	P_1	P_2	P_3	Oferta	DF_i
A	8	6	10	2000	2
B	10	4	9	2500	5
Dem.	1500	2000	1000		
DC_j	2	2	1		

Tabla de flujos

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A				2000
B		*		2500
Dem.	1500	2000	1000	

Paso 2. y **Paso 3.** Asignar y actualizar.

Tabla de costes

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A	8	6	10	2000
B	10	4	9	2500
Dem.	1500	2000	1000	

Tabla de fujos

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A				2000
B		2000		500
Dem.	1500	0	1000	

- Elegir c_{11}.
- Asignar $x_{11} = \min\{1500, 2000\} = 1500$.
- Actualizar las ofertas y las demandas. El destino 1 queda satisfecho.

Tabla de costes

	P_1	P_2	P_3	Ofer.	DF_i
A	8	6	10	2000	2
B	10	4	9	2500	1
Dem.	1500	2000	1000		
DC_j	2		1		

Tabla de flujos

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A	1500			500
B		2000		500
Dem.	0	0	1000	

Sólo queda una columna $\rightarrow$ asignar todas las cantidades.

Tabla de costes

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A	8	6	10	2000
B	10	4	9	2500
Dem.	1500	2000	1000	

Tabla de Flujos

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A	1500		500	2000
B		2000	500	2500
Dem.	1500	2000	1000	

- Solución:

$$x_{11} = 1500,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 500,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 2000,\ x_{23} = 500$$

- Coste de transporte:

$$z = (8 \times 1500) + (10 \times 500) + (4 \times 2000) + (9 \times 500) = 29500$$

El problema dual

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, \ldots, m, \ \ j = 1, \ldots, n$$

Variables duales: $u_1, \ldots, u_m$ y $v_1, \ldots, v_n$.
El problema dual.

$$\max\ G = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

sujeto a

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n$$

$$u_i, v_j : \text{no restringidas}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo

$$\min\ z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

sujeto a

$$\begin{array}{llllllll}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 2000 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 2500 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = 1500 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & = 2000 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & = 1000
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Variables duales: u_1, u_2, v_1, v_2 y v_3.
El problema dual.

$$\max\ G = 2000u_1 + 2500u_2 + 1500v_1 + 2000v_2 + 1000v_3$$

sujeto a

$$\begin{array}{llllll}
u_1 & & +v_1 & & & \leq 8 \\
u_1 & & & +v_2 & & \leq 6 \\
u_1 & & & & +v_3 & \leq 10 \\
 & u_2 & +v_1 & & & \leq 10 \\
 & u_2 & & +v_2 & & \leq 4 \\
 & u_2 & & & +v_3 & \leq 9
\end{array}$$

u_i, v_j : no restringidas

Variable que entra en la base

x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, las variables de decisión.
c_{ij} los costes de transporte y $\mathbf{a}_{ij}$ los vectores de la matriz $\mathbf{A}$ del modelo.
$z_{ij} - c_{ij}$ indicador asociado a la variable x_{ij}.

$$z_{ij} - c_{ij} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{ij} - c_{ij}.$$

$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ es el vector de variables duales,

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n).$$

$$z_{ij} - c_{ij} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)\mathbf{a}_{ij} - c_{ij}.$$

$\mathbf{a}_{ij}$ sólo tiene componentes con valor 1 en las posiciones i y $m + j$.

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Cálculo de las variables duales. $z_{ij} - c_{ij} = 0$ para todas las variables x_{ij} que son básicas. Teniendo en cuenta que el objetivo es minimizar, se pueden dar dos casos.

- Si $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, la solución es óptima.
- Si existe $z_{ij} - c_{ij} > 0$, la solución puede ser mejorada. Para mejorarla, entra en la base la variable asociada al mayor $z_{ij} - c_{ij}$ positivo.

Ejemplo

Cálculo de indicadores

Tabla de costes

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A	8	6	10	2000
B	10	4	9	2500
Dem.	1500	2000	1000	

Tabla de flujos

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A	1500	500		2000
B		1500	1000	2500
Dem.	1500	2000	1000	

Variables básicas: x_{11}, x_{12}, x_{22} y x_{23}. Variables duales: u_1, u_2, v_1, v_2, v_3.

$$\begin{array}{lllll}
x_{11} \text{ es básica} & \Rightarrow & z_{11} - c_{11} = 0 & \Rightarrow & u_1 + v_1 - 8 = 0 \\
x_{12} \text{ es básica} & \Rightarrow & z_{12} - c_{12} = 0 & \Rightarrow & u_1 + v_2 - 6 = 0 \\
x_{22} \text{ es básica} & \Rightarrow & z_{22} - c_{22} = 0 & \Rightarrow & u_2 + v_2 - 4 = 0 \\
x_{23} \text{ es básica} & \Rightarrow & z_{23} - c_{23} = 0 & \Rightarrow & u_2 + v_3 - 9 = 0
\end{array}$$

Haciendo $u_1 = 0 \rightarrow v_1 = 8, v_2 = 6, u_2 = -2$ y $v_3 = 11$.

- $z_{13} - c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 11 - 10 = 1 > 0$
- $z_{21} - c_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 8 - 10 = -4 < 0$

$z_{13} - c_{13} = 1 > 0 \rightarrow x_{13}$ entra en la base.

1. En el problema de transporte equilibrado las variables que pertenecen a la base no forman un ciclo.
2. Se puede encontrar un único ciclo formado por las variables que pertenecen a la base y la variable que entra en la base.
3. Asignar un flujo positivo a la variable que entra en la base; alguna variable que forma parte del ciclo debe tomar el valor cero y dejar la base. Hay flujos que tienden a aumentar y otros a disminuir para mantener el equilibrio del ciclo. Elegir entre los flujos que tienden a disminuir el menor para sumar y restar en las posiciones del ciclo.

Regla para encontrar el ciclo.

Considerar la variable que entra en la base como flujo positivo. Eliminar filas y columnas que tengan un único flujo positivo. El proceso comienza eliminando filas, después columnas. Repetir hasta que no se puedan eliminar más líneas. Las casillas básicas que no han sido eliminadas forman el ciclo único.

Ejemplo (continuación)

Variable que entra: x_{13}.
Variables del ciclo: $x_{13}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$.
Flujos que disminuyen: x_{12} y x_{23}.

$$\min\{x_{12} = 500, x_{23} = 1000\} = x_{12}.$$

Variable que sale: x_{12}

Sale / Entra

	P_1	P_2	P_3	Ofer.
A	1500	500 $\downarrow$	$\uparrow$	2000
B		1500 $\uparrow$	1000 $\downarrow$	2500
Dem.	1500	2000	1000	

	P_1	P_2	P_3	Oferta
A	1500		500	2000
B		2000	500	2500
Dem.	1500	2000	1000	

- Solución:

$$x_{11} = 1500,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 500,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 2000,\ x_{23} = 500.$$

- Coste de transporte:

$$z = (8 \times 1500) + (10 \times 500) + (4 \times 2000) + (9 \times 500) = 29500.$$

Tabla de transporte

	v_1	v_2	$\cdots$	v_n	
u_1	$z_{11}-c_{11}$ $\boxed{c_{11}}$ x_{11}	$z_{12}-c_{12}$ $\boxed{c_{12}}$ x_{12}	$\cdots$	$z_{1n}-c_{1n}$ $\boxed{c_{1n}}$ x_{1n}	a_1
u_2	$z_{21}-c_{21}$ $\boxed{c_{21}}$ x_{21}	$z_{22}-c_{22}$ $\boxed{c_{22}}$ x_{22}	$\cdots$	$z_{2n}-c_{2n}$ $\boxed{c_{2n}}$ x_{2n}	a_2
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
u_m	$z_{m1}-c_{m1}$ $\boxed{c_{m1}}$ x_{m1}	$z_{m2}-c_{m2}$ $\boxed{c_{m2}}$ x_{m2}	$\cdots$	$z_{mn}-c_{mn}$ $\boxed{c_{mn}}$ x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Ejemplo

Tabla de transporte

Sale

Entra

	$v_1 = 8$	$v_2 = 6$	$v_3 = 11$	
$u_1 = 0$	8 1500	6 500	1 10 	2000
$u_2 = -2$	-4 10 	4 1500	9 1000	2500
	1500	2000	1000	

Paso 1. Equilibrar el problema.

Paso 2. Calcular una solución factible básica inicial.

Paso 3. Calcular los valores $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$.

Paso 4. Calcular los valores $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ para los vectores no básicos.

- Si para toda variable no básica $z_{ij} - c_{ij} < 0$, la solución actual es óptima única. Parar.
- Si para toda variable no básica $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ y existe un valor $z_{ij} - c_{ij} = 0$, entonces hay soluciones óptimas múltiples. Elegir dicha variable para entrar e ir al Paso 5.
- Si existe $z_{ij} - c_{ij} > 0$ entonces la solución puede ser mejorada. Elegir como variable de entrada la asociada al mayor indicador entre los positivos. Ir al paso 5.

Paso 5. Encontrar el ciclo. Nueva solución. Ir al Paso 3.

Solución degenerada

Problema con m orígenes y n destinos

Solución factible básica no degenerada $\rightarrow m + n - 1$ variables mayores que cero.

Solución factible básica degenerada $\rightarrow$ menos de $m + n - 1$ variables mayores que cero.

Cuando una solución es degenerada hay que distinguir entre los flujos nulos que corresponden a variables básicas y aquellos que corresponden a variables no básicas.

Elegir entre variables que toman un valor cero alguna que pueda ser básica.

Ejemplo

	1	2	3	Oferta
1	3	2	1	15
2	1	2	3	10
3	2	3	1	14
Demanda	10	6	12	

- Equilibrar el problema.
- Solución factible básica inicial, Vogel.

3	2	1 4	0 11	15
1 10	2	3	0	10
2	3 6	1 8	0	14
10	6	12	11	

- Variables positivas=5 $\longrightarrow$ degenerada.
- Elegir para ser básica una de las variables: $x_{11}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}$.

Soluciones óptimas múltiples

Solución óptima.

	$v_1 = 4$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	$v_5 = 6$	
$u_1 = 0$	$\boxed{4}$ 40	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{2}$ 40	-3 $\boxed{6}$	-3 $\boxed{9}$	100
$u_2 = 1$	-1 $\boxed{6}$	-2 $\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 30	-1 $\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 90	120
$u_3 = 1$	0 $\boxed{5}$	$\boxed{2}$ 30	-3 $\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 90	-1 $\boxed{8}$	120
	40	50	70	90	90	

- $z_{ij} - c_{ij} \leq 0 \rightarrow$ solución óptima.
- $z_{31} - c_{31} = 0 \rightarrow$ óptimos múltiples.
- Variable de entrada x_{31}. Variable de salida x_{32}.

Nueva solución óptima.

$\boxed{4}$ 10	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{2}$ 40	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	100
$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 90	120
$\boxed{5}$ 30	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 90	$\boxed{8}$	120
40	50	70	90	90	

El problema de asignación

n orígenes (O_i), n destinos (D_j). c_{ij} coste de asignar O_i a D_j.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el origen } O_i \text{ es asignado al destino } D_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Tabla de costes

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & D_1 & D_2 & \dots & D_n \\
\hline
O_1 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\
O_2 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O_n & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\
\hline
\end{array}
$$

Figura: Costes de asignación

Si el número de orígenes es distinto del número de destinos, equilibrar el problema creando lineas ficticias con costes 0.

Teoremas

Teorema

Si las variables x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, *son solución óptima para un problema de asignación con función objetivo* $z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$, *esos mismos valores son solución óptima del problema cuya función objetivo es* $z' = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c'_{ij} x_{ij}$, *siendo* $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, *con* u_i *y* v_j *constantes.*

Teorema

Si $c_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ *y* $z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 0$, *entonces* x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, *es solución óptima.*

Teorema de König

Obtención y asignación de ceros.

- Hacer todos los costes mayores o iguales que cero.
- Hacer operaciones en las filas y columnas para obtener el mayor número de ceros.
- Asignar el mayor número de ceros.

El método para resolver el problema de asignación se basa en el Teorema de König. Este teorema asegura que *el número de ceros que se pueden asignar independientemente en filas y columnas es igual al mínimo número de filas y/o columnas que cubren todos los ceros*.

Algoritmo de asignación

Objetivo: minimizar

Paso 1. Equilibrar el problema.

Paso 2. Restar en cada fila $u_i = \min_j \{c_{ij}\} \rightarrow c'_{ij} = c_{ij} - u_i$.

Paso 3. Restar en cada columna $v_j = \min_i \{c'_{ij}\} \rightarrow c''_{ij} = c'_{ij} - v_j$.

Paso 4. Elegir la fila o columna con menor número de ceros, asignar uno y eliminar los de la misma fila y columna. Repetir la asignación en filas y columnas continuando por aquella que tenga el mínimo número de ceros sin eliminar.
-Si en todas las filas hay un cero asignado, solución óptima. Parar.
-Si hay alguna fila que no tenga cero asignado ir al Paso 5.

Paso 5. Mínimo número de filas y/o columnas que cubren todos los ceros.
(a) Marcar las filas que no tienen ceros asignados.
(b) Marcar las columnas que tienen ceros eliminados en las filas marcadas en el paso anterior.
(c) Marcar las filas que tienen ceros asignados en las columnas marcadas en el paso anterior.
- Repetir (b) y (c) hasta que ya no se puedan marcar más filas y/o columnas.
Filas no marcadas y columnas marcadas cubren todos los ceros. Ir al Paso 6.

Paso 6. Crear nuevos ceros. Elegir el elemento mínimo que no está cubierto. Restarlo a todos los elementos de las filas no cubiertas y sumarlo a los elementos de las columnas cubiertas. Ir al Paso 4.

Calcular la asignación óptima para la siguiente tabla de costes.

	1	2	3	4
A	58	58	60	54
B	66	70	70	78
C	106	104	100	95
D	52	54	64	54

Paso 1. El problema es equilibrado.

Paso 2. Restar en cada fila el mínimo: 54, 66, 95 y 52.

	1	2	3	4
A	4	4	6	0
B	0	4	4	12
C	11	9	5	0
D	0	2	12	2

Ejemplo (continuación)

Paso 3. Restar en cada columna el mínimo; 0, 2, 4 y 0.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cline{2-5} A & 4 & 2 & 2 & 0 \\ B & 0 & 2 & 0 & 12 \\ C & 11 & 7 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 8 & 2 \\ \cline{2-5} \end{array}$$

Paso 4. Asignar ceros. Asignar $(A, 4)$. Eliminar $(C, 4)$. El resto tiene más de un cero o no tiene cero.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cline{2-5} A & 4 & 2 & 2 & \boxed{0} \\ B & 0 & 2 & 0 & 12 \\ C & 11 & 7 & 1 & \cancel{0} \\ D & 0 & 0 & 8 & 2 \\ \cline{2-5} \end{array}$$

Columnas. Asignar $(D, 2)$ y eliminar $(D, 1)$. Asignar $(B, 3)$ y eliminar $(B, 1)$.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cline{2-5} A & 4 & 2 & 2 & \boxed{0} \\ B & \cancel{0} & 2 & \boxed{0} & 12 \\ C & 11 & 7 & 1 & 0 \\ D & \cancel{0} & \boxed{0} & 8 & 2 \\ \cline{2-5} \end{array}$$

Ejemplo (continuación)

Paso 5. Marcar lineas.

	1	2	3	4	
A	4	2	2	$\boxed{0}$	*X*
B	$\boxed{0}$	2	$\cancel{0}$	12	
C	11	7	1	$\cancel{0}$	*X*
D	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	8	2	
				X	

Lineas cubiertas= ceros asignados $<$ 4.

Paso 6. Crear nuevos ceros.

	1	2	3	4
A	3	1	1	0
B	0	2	0	13
C	10	6	0	0
D	0	0	8	3

Volver al Paso 4.

Ejemplo (continuacion)

Paso 4. Asignar ceros.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
A & 3 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
B & \boxed{0} & 2 & \cancel{0} & 13 \\
C & 10 & 6 & \boxed{0} & \cancel{0} \\
D & \cancel{0} & \boxed{0} & 8 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Ceros asignados= 4 $\longrightarrow$ solución óptima.

Solución óptima:
$A \longrightarrow 4$

$B \longrightarrow 1$

$C \longrightarrow 3$

$D \longrightarrow 2$

Coste óptimo:
$c_{A4} + c_{B1} + c_{C3} + c_{D2} = 54 + 66 + 100 + 54 = 274$

Soluciones óptimas múltiples

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
A	8	6	$\boxed{0}$	7	4
B	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2	1	3
C	1	3	2	M	$\boxed{0}$
D	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
E	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$

- Ceros asignados= 5 $\longrightarrow$ solución óptima.
- Solución: $A \longrightarrow P_3$, $B \longrightarrow P_1$, $C \longrightarrow P_5$, $D \longrightarrow P_2$ y $E \longrightarrow P_4$.
- Coste: $c_{A3} + c_{B1} + c_{C5} + c_{D2} + c_{E4} = 10 + 7 + 9 + 0 + 0 = 26$

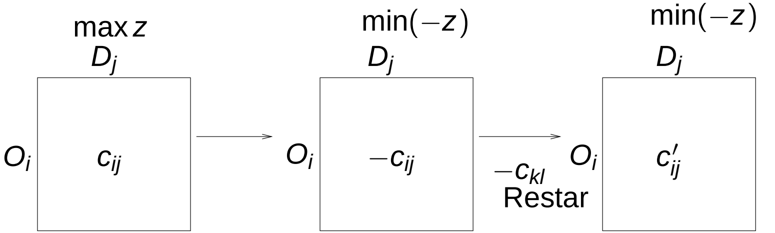
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
A	8	6	$\boxed{0}$	7	4
B	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	2	1	3
C	1	3	2	M	$\boxed{0}$
D	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
E	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$

- Ceros asignados= 5 $\longrightarrow$ solución óptima.
- Solución: $A \longrightarrow P_3$, $B \longrightarrow P_2$, $C \longrightarrow P_5$, $D \longrightarrow P_1$, $E \longrightarrow P_4$
- Coste: $c_{A3} + c_{B2} + c_{c5} + c_{D1} + c_{E4} = 10 + +7 + 9 + 0 + 0 = 26$

Problema de maximización

Si el objetivo es maximizar $\rightarrow \min(-z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} -c_{ij} x_{ij}$.

Si los costes de asignación se han hecho negativos:



$$-c_{kl} = \min\{-c_{ij} / -c_{ij} < 0\}$$

$$c'_{ij} = -c_{ij} + c_{kl} \qquad c'_{ij} \geq 0$$