Programación entera

1. El modelo de programación entera.

2. Aplicaciones de la programación entera.

3. Solución gráfica de problemas enteros.

4. El algoritmo de ramificación y acotación.

5. El algoritmo de ramificación y acotación 0-1.

Modelos de programación entera

Modelo lineal entero

$$
\begin{aligned}
\text{opt } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeto a} & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \lesseqqgtr b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \lesseqqgtr b_2 \\
& \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \lesseqqgtr b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \text{ y enteras}
\end{aligned}
$$

Modelo lineal 0-1

$$
\begin{aligned}
\text{opt } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeto a} & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \lesseqqgtr b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \lesseqqgtr b_2 \\
& \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \lesseqqgtr b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n = 0, 1
\end{aligned}
$$

- Modelos de programación entera pura: todas las variables toman valores enteros.
- Modelos de programación entera 0-1: todas las variables son binarias.
- Modelos de programación entera mixta: algunas variables toman valores enteros y otras valores continuos.

Ejemplo 1

Día	Personas necesarias
1. Lunes	15
2. Martes	13
3. Miércoles	15
4. Jueves	18
5. Viernes	14
6. Sábado	16
7. Domingo	10

- Cada persona debe trabajar cinco días seguidos y descansar 2.
- x_j: número de personas que entran el dia j, $j = 1, \ldots, 7$.

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{sujeto a} & \\
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &\geq 18 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 14 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 16 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 10 \\
x_1, \ldots, x_7 &\geq 0 \text{ y enteras}
\end{aligned}
$$

- Capacidad de la mochila: 12 kg.
- Número de objetos: 4. Peso y valor objetos (ver tabla).

	1	2	3	4
Peso (kg)	3	6	5	5
Valor (euros)	15	25	12	10

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el objeto } j \text{ es seleccionado} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\max\ z = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4$$

sujeto a

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ó } 1$$

Ejemplo 3

Distancias entre ciudades (tiempo)

	1	2	3	4	5	6
1	0	35	20	40	30	60
2	35	0	45	35	20	70
3	20	45	0	15	55	20
4	40	35	15	0	65	35
5	30	20	55	65	0	40
6	60	70	20	35	40	0

- Construir una estación a no más de 30 minutos de cada ciudad.
- $x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se construye en } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{sujeto a} & \\
x_1 + x_3 + x_5 &\geq 1 \\
x_2 + x_5 &\geq 1 \\
x_1 + x_3 + x_4 + x_6 &\geq 1 \\
x_3 + x_4 &\geq 1 \\
x_1 + x_2 + x_5 &\geq 1 \\
x_3 + x_6 &\geq 1 \\
x_j = 0 \text{ ó } 1\ , \quad j &= 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

Restricción i $\rightarrow$ hay una estación a no más de 30 minutos de la ciudad i.

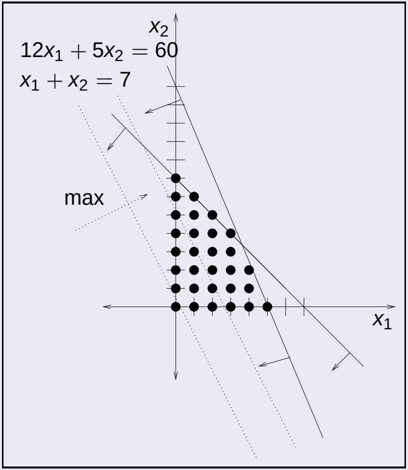
$$\max \; z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$



- Enumerar las soluciones.
- Elegir la mejor.

Modelo entero y modelo relajado

El modelo entero (PE)

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad z = \; & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ y enteras} \end{aligned}$$

El modelo relajado (PR)

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad z = \; & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Problema entero- PE

$$\begin{aligned} \max \; z = \; & 80x_1 + 45x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ x_1 + x_2 & \leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 & \leq 60 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

Problema relajado-PR

$$\begin{aligned} \max \; z = \; & 80x_1 + 45x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ x_1 + x_2 & \leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 & \leq 60 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

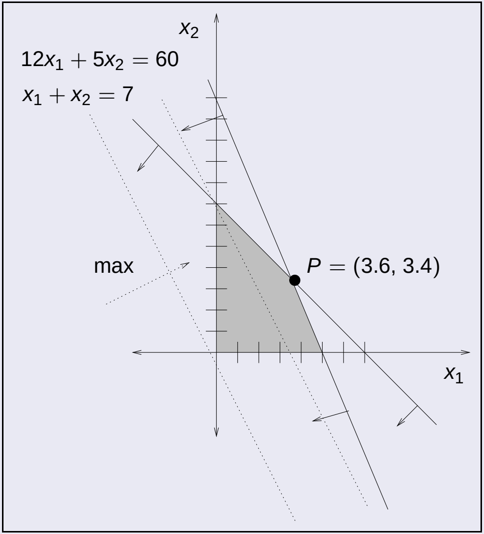
Solución gráfica del modelo relajado

Problema entero- PE

$$\begin{aligned} \max\ z &= 80x_1 + 45x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

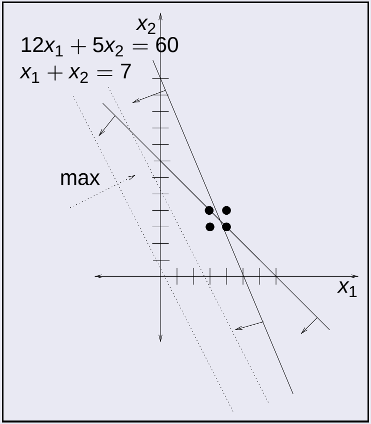
Problema relajado-PR

$$\begin{aligned} \max\ z &= 80x_1 + 45x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Solución óptima del PR: $\mathbf{x}_{PR}$=(3.6, 3.4) y $z_{PR} = 440$.

Aproximaciones por redondeo: $(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)$.



- Solución óptima: $(4,4)$
- $(4,4)$ no cumple las restricciones.

Solución de problemas enteros

- **Cota superior**. El valor óptimo del PR es una cota superior para el valor óptimo del PE.
- **Solución candidata**.
  - Cumple las restricciones.
  - Es óptima si no se encuentra una mejor.
  - Proporciona una **cota inferior** para el PE.
- **Ramificación**. Dividir la región del problema en dos, quitando un trozo en el que no hay soluciones del PE. Se crean dos problemas relajados.
- **Acotación**. Resolver los dos problemas creados, el valor óptimo de cada uno de los problemas relajados es una cota superior en esa rama.

P2

$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

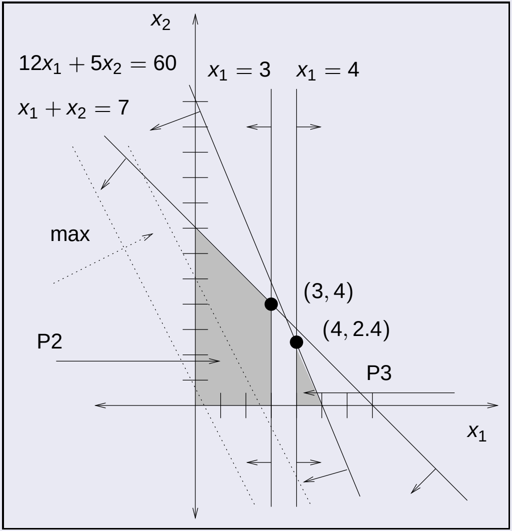
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ \mathbf{x_1 \leq 3}, x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

P3

$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ \mathbf{x_1 \geq 4}, x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



▸ arbol

Solución gráfica

Ramificación y acotación del P3

P4

$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

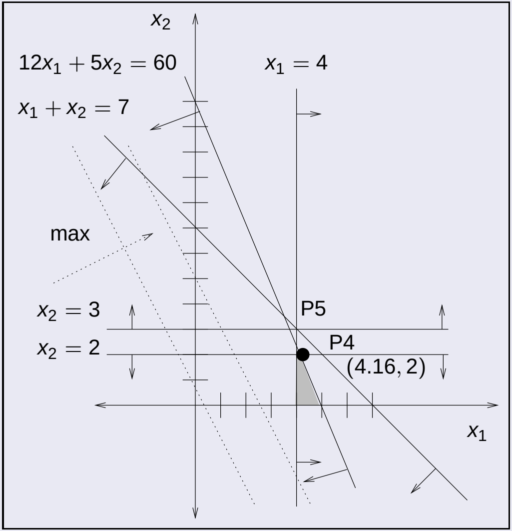
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \mathbf{x_1 \geq 4},\ \mathbf{x_2} &\leq \mathbf{2} \end{aligned}$$

P5

$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \mathbf{x_1 \geq 4},\ \mathbf{x_2} &\geq \mathbf{3} \end{aligned}$$



▸ arbol

Solución gráfica

Ramificación y acotación del P4

P6

$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$\mathbf{x_1 \geq 4,\ x_2 \leq 2,\ x_1 \leq 4}$$

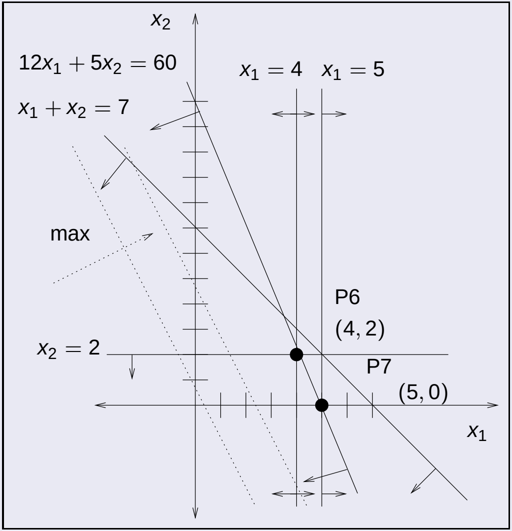
P7

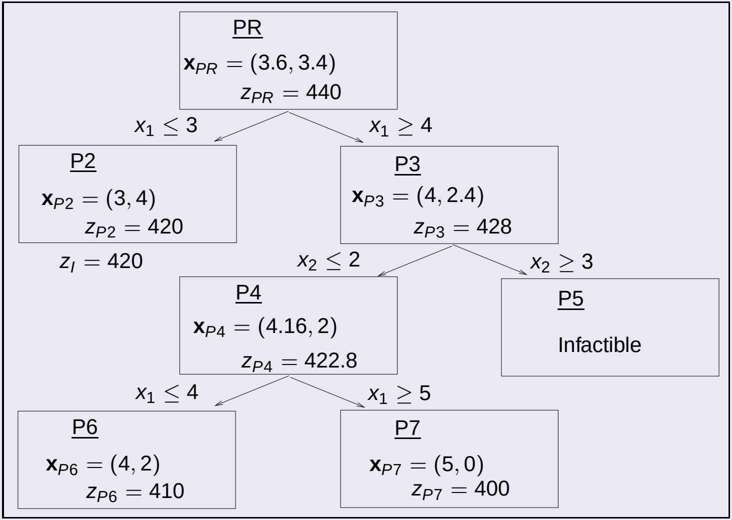
$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$\mathbf{x_1 \geq 4,\ x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 5}$$

arbol




PR
$\mathbf{x}_{PR} = (3.6, 3.4)$
$z_{PR} = 440$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
P2
$\mathbf{x}_{P2} = (3, 4)$
$z_{P2} = 420$
$z_I = 420$
P3
$\mathbf{x}_{P3} = (4, 2.4)$
$z_{P3} = 428$
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
P4
$\mathbf{x}_{P4} = (4.16, 2)$
$z_{P4} = 422.8$
P5
Infactible
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
P6
$\mathbf{x}_{P6} = (4, 2)$
$z_{P6} = 410$
P7
$\mathbf{x}_{P7} = (5, 0)$
$z_{P7} = 400$

Paso 1. Inicialización. Resolver el PR.

- Si la solución óptima es entera parar y esa solución es óptima también para el problema entero.
- En otro caso, fijar una cota inferior z_I para el valor óptimo del problema entero. Si no se conoce ninguna solución candidata para el problema entero, hacer $z_I = -\infty$.

Paso 2. Ramificación. Seleccionar un problema no terminal. Elegir una variable x_j que, teniendo que ser entera, tome un valor no entero en la solución actual. Crear dos nuevos problemas añadiendo $x_j \leq [x_j], \;\; x_j \geq [x_j] + 1$

Paso 3. Acotación. Resolver cada uno de los dos problemas recien creados.

Paso 4. Problemas terminales. Son terminales los problemas que cumplen una de las siguientes condiciones:

(1) El problema es infactible.

(2) $z_S \leq z_I$.

(3) $z_S > z_I$ y la solución es entera. Se actualiza la cota inferior haciendo $z_I = z_S$ y esta solución entera es la solución candidata.

Si todos los problemas son terminales, parar. La solución óptima es la candidata. Si no hay candidata el PE es infactible

Si hay problemas no terminales, volver al Paso 2.

.

arbol

Paso1. Inicialización.

$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	20	5	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{25}{7}$

$z_I = -\infty$.

Paso 2. Ramificación. La solución del PR no es entera. Elegir x_1 y crear P2 y P3.

Paso 3. Acotación. Resolver (análisis de sensibilidad).

Solución P2 $\rightarrow x_1 \leq 3$

Primera iteración (continuación)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	1	0	0	0	1	3

Operaciones elementales: fila 3 $-$ fila 2.

	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	0	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

No factibilidad primal $\rightarrow$ simplex dual.

	0	0	45	0	35	420
$\mathbf{a}_2$	0	1	1	0	-1	4
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	0	1	3
$\mathbf{a}_4$	0	0	-5	1	-7	4

$\rightarrow$ Tabla óptima

Solución P3 $\rightarrow -x_1 \leq -4$

Primera iteración (continuación)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	-1	0	0	0	1	-4

Operación elemental: fila 3 $+$ fila 2.

	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	0	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$-\frac{3}{7}$

No factibilidad primal $\rightarrow$ simplex dual.

	0	0	0	9	28	428
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	0	-1	4
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$

$\rightarrow$ Tabla óptima.

Paso 4. Problemas terminales. P2 $\rightarrow z_S = 420 > z_I$ y $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$. El problema es terminal $\rightarrow$ nueva cota: $z_I = z_S = 420$.
P3 no es terminal.
Volver al Paso 2.

Segunda iteración.

Paso 2. Ramificación. Seleccionar P3 y la variable x_2.
Ramificar $\rightarrow x_2 \leq 2$ y $x_2 \geq 3 \rightarrow$ P4 y P5.

Paso 3. Acotación. Resolver P4 y P5.

Paso 4. Problemas terminales.
P5 $\rightarrow$ infactible $\rightarrow$ terminal.
P4 $\rightarrow z_S = 422.8 > z_I = 420$ y solución no entera, no terminal.

Volver al Paso 2.

Tercera iteración

Paso 2. Ramificación. Elegir P4 y la variable $x_1 \rightarrow$ P6 y P7.

Paso 3. Acotación. Resolver P6 y P7.

Paso 4. Problemas terminales.
P6 $\rightarrow z_S = 410 < z_I = 420 \rightarrow$ terminal.
P7 $\rightarrow z_S = 400 < z_I = 420 \rightarrow$ terminal.

Todos los problemas son terminales.

La solución óptima es la solución candidata:

$$x_1^* = 3,\ x_2^* = 4,\ z^* = z_I = 420$$

Modelo lineal 0-1

$$
\begin{aligned}
\text{opt } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeto a} & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\begin{smallmatrix}\le\\=\\\ge\end{smallmatrix} b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\begin{smallmatrix}\le\\=\\\ge\end{smallmatrix} b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\begin{smallmatrix}\le\\=\\\ge\end{smallmatrix} b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &= 0, 1
\end{aligned}
$$

Modelo relajado

$$
\begin{aligned}
\text{opt } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeto a} & \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &= 0, 1
\end{aligned}
$$

Se quitan todas las restricciones excepto la condición de ser binarias para las variables.

Problema 0-1

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 4y_1 + 6y_2 - 4 \\
\text{sujeto a} & \\
-2y_1 + 3y_2 &\le 8 \\
-y_1 - y_2 &\le 16 \\
y_1, y_2 &= 0 \text{ ó } 1
\end{aligned}
$$

Problema relajado (PR)

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 4y_1 + 6y_2 - 4 \\
\text{sujeto a} & \\
y_1, y_2 &= 0 \text{ ó } 1
\end{aligned}
$$

Cambio de variable. Elegir en la función objetivo el menor coeficiente en valor absoluto, $c_2 = -4$; por ser negativo $x_2 = 1 - y_1$. Elegir el siguiente, $c_1 = 6$; por ser positivo $x_1 = y_2$.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 - 4x_2 \\ \text{sujeto a}& \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ -x_1 + x_2 &\leq 17 \\ x_1, x_2 &= 0 \text{ ó } 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4y_1 + 6y_2 - 4 \\ \text{sujeto a}& \\ -2y_1 + 3y_2 &\leq 8 \\ -y_1 - y_2 &\leq 16 \\ y_1, y_2 &= 0 \text{ ó } 1 \end{aligned}$$

Solución parcial. Es una solución donde el valor de alguna variable está sin fijar.

Complección. Se obtiene a partir de la solución parcial dando valor a todas las componentes que están sin fijar.

Soluciones parciales:

$$(1, 1, -), \quad (0, -, -) \quad (0, 1, -)$$

Complecciones de la solución parcial $(0, -, -)$:

$$(0, 0, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 1, 1)$$

Ejemplo

Problema 0-1

$$\max\ z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ ó } 1$$

PR

$$\max\ z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ ó } 1$$

- $c_1 = 1 \leq c_2 = 2 \leq c_3 = 4.$
- Ordenar las soluciones del PR.

  $\mathbf{x} = (1,1,1) \rightarrow \mathbf{x} = (0,1,1) \rightarrow \mathbf{x} = (1,0,1) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0,0,1), \cdots$

Solución de problemas enteros

- **Cota superior**. El valor óptimo del PR es una cota superior para el valor óptimo del problema 0-1.
- **Solución candidata**.
  - Cumple las restricciones.
  - Es óptima si no se encuentra una solución mejor.
  - Da una **cota inferior** para el problema 0-1.
- **Ramificación**. Elegir en una solución parcial el valor 0 ó el valor 1 para la siguiente variable, creando así dos problemas.
- **Acotación**. Calcular la mejor complección para cada problema. El valor del objetivo en dicha complección es una cota superior en esa rama.

Paso 1: Inicialización.

Si $\mathbf{x}$=(1, . . . , 1), satisface las restricciones es óptima y parar.
En otro caso, si $\mathbf{x} = (0, 1, \ldots, 1)$ satisface las restricciones, es óptima y parar.
Si no, fijar una cota inferior z_I. Asociar al problema el índice $k = 1$.

Paso 2: Ramificación. Seleccionar un problema no terminal y ramificar en dos, añadiendo, respectivamente, $x_k = 0$ y $x_k = 1$.

Paso 3: Acotación. Para cada nuevo problema, hacer $\mathbf{x}_S$ igual a la complección que tiene 0 la componente $k+1$ y 1 en el resto. Calcular el valor z_S.
Asociar a estos problemas el índice $k = k+1$.

Paso 4: Problemas terminales Son terminales los problemas que verifiquen alguna de las siguientes condiciones:

(a) $z_S \leq z_I$
(b) Si $z_S > z_I$ e $\mathbf{x}_S$ es factible. Entonces actualizar $z_I = z_S$
(c) Ninguna complección satisface todas las restricciones. El problema es infactible.

Si todos los problemas son terminales parar. En otro caso, ir al Paso 2.

arbol 0-1

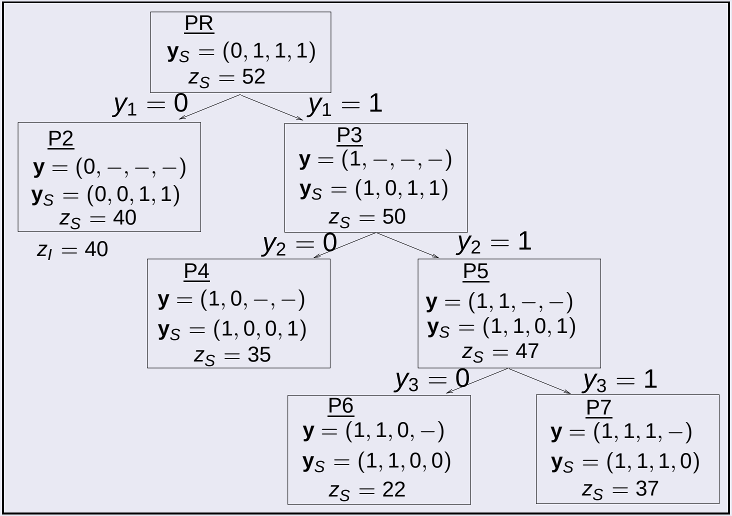
$$\begin{aligned} \max\ z &= 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4 \\ \text{sujeto a} & \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 &\leq 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &= 0 \text{ ó } 1 \end{aligned}$$

Cambio de variable: $x_4 = y_1$, $x_3 = y_2$, $x_1 = y_3$, $x_2 = y_4$.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4 \\ \text{sujeto a} & \\ 5y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 6y_4 &\leq 12 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &= 0 \text{ ó } 1 \end{aligned}$$

Aplicación del algoritmo

Solución del ejemplo de la mochila



algoritmo 0-1