

- 1 Formas simétricas.
- 2 Relación primal-dual.
- 3 Dualidad: el caso general.
- 4 Teoremas de dualidad.
- 5 Condiciones de holgura complementaria.
- 6 Solución dual óptima en la tabla.
- 7 Interpretación económica.
- 8 Coste económico e interpretación del método simplex.
- 9 El método simplex dual.
 - 1 El algoritmo simplex dual.
 - 2 El algoritmo simplex dual con restricción artificial.
- 10 Solución de modelos.

- 1 Definición de problema dual. Solución de uno de los modelos para obtener la solución de ambos.
- 2 Interpretación económica. Interpretación del método simplex.
- 3 El algoritmo simplex dual, más eficaz para resolver algunos modelos lineales.
- 4 Aplicación del algoritmo simplex dual en el análisis de sensibilidad y la programación entera.

$$\max z = x_1 - 3x_2 + x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Objetivo max, restricciones \leq , variables no negativas.

$$\max z = x_1 - 3x_2 + x_3$$

sujeto a

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -2$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max z = x_1 - x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo min, restricciones \geq , variables no negativas.

$$\min (-z) = -x_1 + x_2$$

sujeto a

$$-3x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Primal

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sujeto a

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Dual

$$\min G = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

- Matriz del primal: $\mathbf{A} \rightarrow m$ restricciones y n variables.
Matriz del dual: $\mathbf{A}^T \rightarrow n$ restricciones y m variables.
- \mathbf{b} vector de recursos del problema primal y vector de costes del problema dual.
- \mathbf{c} vector de costes del problema primal y vector de recursos del problema dual.
- N° de restricciones del primal = N° de variables del dual.
- N° de variables del primal = N° de restricciones del dual.

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

El dual asociado.

$$\min G = 2y_1 + y_2$$

sujeto a

$$y_1 + 3y_2 \geq 2$$

$$-y_1 - y_2 \geq -1$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Objetivo: max	\iff	Objetivo: min
restricción $i \leq b_i$	\iff	variable $i \geq 0$
restricción $i = b_i$	\iff	variable i no restringida
restricción $i \geq b_i$	\iff	variable $i \leq 0$
variable $i \geq 0$	\iff	restricción $i \geq c_i$
variable i no restringida	\iff	restricción $i = c_i$
variable $i \leq 0$	\iff	restricción $i \leq c_i$

Tabla: Relación primal-dual: caso general

Primal

$$\max z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 : \text{no rest.}$$

Dual

$$\min G = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -4$$

$$-y_1 - 5y_2 + 2y_3 = -1$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 : \text{no rest.}$$

Resultados considerando la forma primal-dual simétrica.

$$\begin{aligned} & \textbf{Primal} \\ \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textbf{Dual} \\ \min G &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Teorema

El dual del problema dual es el problema primal.

Objetivo primal minimizar \rightarrow Objetivo dual maximizar \rightarrow las relaciones de la tabla se leen de derecha a izquierda.

Teorema (Dualidad débil)

Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son soluciones factibles del primal y dual, respectivamente, entonces,

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y} = G.$$

Corolario

Si las soluciones factibles \mathbf{x}^ e \mathbf{y}^* verifican $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$, entonces \mathbf{x}^* e \mathbf{y}^* son óptimas para el primal y el dual, respectivamente.*

Corolario

Si el problema primal es factible y no acotado, el dual no tiene solución.

Corolario

Si el problema dual es factible y no acotado, el primal no tiene solución.

Cálculo del dual y solución gráfica

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

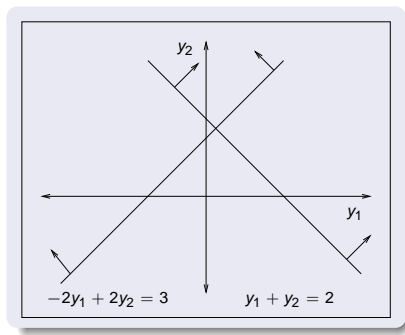
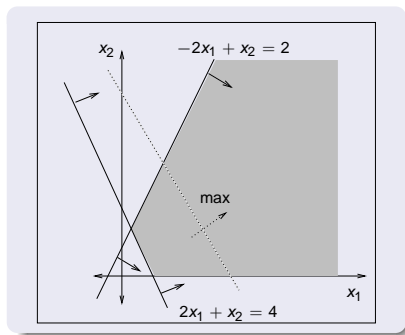
$$\min G = 2y_1 + 4y_2$$

sujeto a

$$-2y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 \geq 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0$$



El primal es no acotado y el dual es infactible.

Teorema

Si existe una solución óptima \mathbf{x}^ del problema primal, entonces existe una solución óptima \mathbf{y}^* del problema dual. De la misma forma, si existe una solución óptima \mathbf{y}^* del problema dual, entonces existe una solución óptima \mathbf{x}^* del problema primal. En ambos casos $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = G^*$.*

Ejemplo.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min G = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Soluciones: $\mathbf{x}^T = (1, 1)$, $\mathbf{y}^T = (1, 1, 1) \rightarrow z = 5 \leq 10 = G$.

Soluciones óptimas: $\mathbf{x}^{*T} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\mathbf{y}^{*T} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow z^* = \frac{11}{2} = G^*$.

Teorema

Dadas dos soluciones factibles \mathbf{x}^ e \mathbf{y}^* para el primal y dual respectivamente, son óptimas si y sólo si se verifica*

$$\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) + \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = 0$$

\mathbf{x}^* solución factible del primal $\rightarrow \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$

\mathbf{y}^* solución factible del dual $\rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) \geq 0$$

$$\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) \geq 0$$

$$\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) = 0, \quad \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = 0$$

- 1 Si una variable primal es estrictamente positiva, la correspondiente restricción dual se verifica con igualdad.

$$\mathbf{x}^* > \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

- 2 Si una restricción primal no se verifica con igualdad, la correspondiente variable dual toma el valor cero.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* < \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{y}^* = \mathbf{0}.$$

- 3 Si una variable dual es estrictamente positiva, la correspondiente restricción primal se verifica con igualdad.

$$\mathbf{y}^* > \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

- 4 Si una restricción dual no se verifica con igualdad, la correspondiente variable primal toma el valor cero.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y}^* > \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{0}.$$

$$\max z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\mathbf{x}^{*T} = \left(\frac{13}{5}, \frac{6}{5}, 0 \right) \quad \rightarrow$$

$$\min G = 5y_1 + 4y_2$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$2y_1 - y_2 \geq 1$$

$$y_1 + 3y_2 \geq -2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$\min G = 5y_1 + 4y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 3$$

$$2y_1 - y_2 - y_4 = 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_5 = -2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

Variables del primal

$$x_1^* = \frac{13}{5} > 0$$

$$x_2^* = \frac{6}{5} > 0$$

$$x_3^* = 0$$

Restricciones del primal

$$\frac{13}{5} + 2 \times \frac{6}{5} = 5$$

$$2 \times \frac{13}{5} - \frac{6}{5} = 4$$

Restricciones del dual

$$\Rightarrow y_1^* + 2y_2^* = 3 \Rightarrow y_3^* = 0$$

$$\Rightarrow 2y_1^* - y_2^* = 1 \Rightarrow y_4^* = 0$$

$$\Rightarrow y_1^* + 3y_2^* - y_5^* = -2 \Rightarrow y_5^* = 6$$

Variables del dual

$$\Rightarrow \text{calcular el valor de } y_1^* \Rightarrow y_1^* = 1$$

$$\Rightarrow \text{calcular el valor de } y_2^* \Rightarrow y_2^* = 1$$

Teorema

*Considerar dos modelos primal-dual simétricos. Si \mathbf{B} es base óptima para el problema primal, entonces $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ es solución óptima del problema dual.*

Indicadores $z_j - c_j$ asociados a los vectores de la matriz \mathbf{I} :

$$\mathbf{a}_j \in \mathbf{I} \rightarrow z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j.$$

Vector de indicadores:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{c}_I^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{c}_I^T.$$

$$\text{Indicadores } +\mathbf{c}_I^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{y}^{*T}.$$

Base inicial formada por variables de holgura

$$\max z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Tablas primera y óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-3	-1	2	0	0	0
\mathbf{a}_4	1	2	1	1	0	5
\mathbf{a}_5	2	-1	3	0	1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	6	1	1	9
\mathbf{a}_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
\mathbf{a}_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{5}$

$$(z_4 - c_4, z_5 - c_5) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{c}_j^T = (1, 1) - \mathbf{c}_j^T.$$

$$\mathbf{c}_j^T = (c_4, c_5) = (0, 0) \rightarrow \text{Solución dual óptima: } \mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (1, 1).$$

Con variables artificiales

$$\min z = x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- $\min \rightarrow \max$
- Variables de holgura: x_4, x_5 .
- Variables artificiales: w_1, w_2 .

$$\max (-z) = -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mw_1 - Mw_2$$

sujeito a

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 3x_2 - x_4 + w_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 - x_5 + w_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2 \geq 0$$

Solución dual óptima en la tabla

Con variables artificiales

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	
	$-3M+1$	$-4M+2$	0	M	M	0	0	$-10M$
a_3	4	3	1	0	0	0	0	12
a_{w1}	1	3	0	-1	0	1	0	6
a_{w2}	2	1	0	0	-1	0	1	4
	$-\frac{5}{3}M + \frac{1}{3}$	0	$0 - \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}$	$M \frac{4}{3}M - \frac{2}{3}$	$M \frac{4}{3}M - \frac{2}{3}$	0	0	$-2M - 4$
a_3	3	0	1	1	0	-1	0	6
a_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	2
a_{w2}	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	2
	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$M - \frac{3}{5}$	$M - \frac{1}{5}$	$-\frac{22}{5}$
a_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	12
a_2	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
a_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$

$$(z_3 - c_3, z_{w_1} - c_{w_1}, z_{w_2} - c_{w_2}) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{c}_I^T = (0, M - \frac{3}{5}, M - \frac{1}{5})$$

$$\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{c}_I^T + \mathbf{c}_I^T = (0, M - \frac{3}{5}, M - \frac{1}{5}) + (0, -M, -M)$$

Solución óptima: $(0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$. Los signos aparecen cambiados en la tabla por el cambio min \rightarrow max.

\mathbf{B} base óptima primal $\longrightarrow \mathbf{x}^*$ solución óptima primal y z^* valor óptimo.

\mathbf{y}^* solución óptima dual y G^* valor óptimo.

Si \mathbf{b} cambia a $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \longrightarrow \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}$.

$$\hat{G}^* = \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = G^* + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = z^* + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b}$$

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \geq 0$$

Si $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq 0$, $\hat{\mathbf{x}}_B$ es óptima. Incremento del objetivo: $\mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b}$.

Si $\Delta b_i = 1$ y el resto es cero $\longrightarrow \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = (y_1^*, \dots, y_i^*, \dots, y_m^*) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = y_i^*$

y_i^* es el precio sombra del recurso i .

$$\max z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	6	1	1	9
a_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
a_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{5}$

- Si $b_1 = 5 \rightarrow b_1 + \Delta b_1 = 6$.

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

y_1^* es el precio sombra del recurso $b_1 \rightarrow \hat{z}^* = z^* + y_1^* = 9 + 1 = 10$

- Si $b_2 = 4 \rightarrow b_2 + \Delta b_2 = 3$.

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

y_2^* es el precio sombra del recurso $b_2 \rightarrow \hat{z}^* = z^* - y_2^* = 9 - 1 = 8$

En una empresa se fabrican 4 productos: 1, 2, 3 y 4. En la producción se utilizan 3 recursos: A, B y C. En la Tabla se da la cantidad de recurso necesario por unidad de producto, la disponibilidad de cada recurso y el beneficio unitario.

Recurso	Productos				Disponibilidad Recurso
	1	2	3	4	
A	2	3	1.5	4	300
B	2	4	3	1	500
C	5	1	2	2	250
Beneficio	4	3	6	2	

x_j : unidades del producto j que se producen.

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 + 1.5x_3 + 4x_4 \leq 300$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 500$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 250$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Coste económico de las variables primales

Supongamos ahora que una empresa competidora quiere comprar los recursos

$b_1 = 300$, $b_2 = 500$ y $b_3 = 250$ a precios unitarios y_1 , y_2 e y_3 .

El objetivo de la segunda empresa es obtener los recursos a mínimo coste.

$$\min G = 300y_1 + 500y_2 + 250y_3.$$

- Coste económico del producto 1 $\rightarrow 2y_1 + 2y_2 + 5y_3$.
- Beneficio del producto 1 $\rightarrow 4$.
- Primera restricción dual: $2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 4$.

Modelo dual

$$\min G = 300y_1 + 500y_2 + 250y_3$$

sujeto a

$$2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 4$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3$$

$$1.5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 6$$

$$4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

En el algoritmo simplex, si x_j no es básica puede pasar a ser básica en una iteración posterior si $z_j - c_j < 0$.

Interpretación de la condición:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j - c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j.$$

$$\text{Si } z_j - c_j < 0, \text{ entonces } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i < c_j.$$

El coste económico de la actividad j es menor que el beneficio, la actividad es rentable.

El algoritmo simplex primal. Comenzar eligiendo como primera base la canónica, calcular una solución primal factible y terminar cuando se obtiene la factibilidad dual \rightarrow tabla óptima.

El algoritmo simplex dual.

Partir de la forma simétrica de maximización, sumar variables de holgura para elegir como primera base la canónica. Comenzar por una tabla con factibilidad dual, hacer iteraciones hasta conseguir factibilidad primal \rightarrow tabla óptima.

Si en la primera tabla no hay factibilidad dual añadir una restricción artificial.

El objetivo es maximizar. Elegir $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ formada por variables de holgura.

Paso 1. Construir la primera tabla con $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$.

Paso 2. Factibilidad primal.

- Si $x_{Bi} \geq 0, i = 1, \dots, m$, la **solución es óptima**. Parar.
- Si existe $x_{Bi} < 0$, se puede mejorar. Ir al Paso 3.

Paso 3. Cambio de base.

- Sale de la base \mathbf{a}_r tal que

$$x_{Br} = \min_i \{x_{Bi} / x_{Bi} < 0\} \rightarrow r \text{ es la fila pivote.}$$

- Entra en la base \mathbf{a}_k tal que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} / y_{rj} < 0 \right\} \rightarrow k \text{ es la columna pivote.}$$

y_{rk} es el pivote.

Si no existe $y_{rj}, j = 1, \dots, n$, negativo, el problema es **infactible**. Parar.

Paso 4. Calcular una nueva tabla con las mismas operaciones elementales definidas en el algoritmo simplex. Ir al Paso 2.

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max (-z) = -3x_1 - 2x_2$$

sujeto a

$$-x_1 - 2x_2 \leq -3$$

$$2x_1 - x_2 \leq -2$$

$$-x_1 - 4x_2 \leq -7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max (-z) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

sujeto a

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = -3$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = -2$$

$$-x_1 - 4x_2 + x_5 = -7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	3	2	0	0	0	0
\mathbf{a}_3	-1	-2	1	0	0	-3
\mathbf{a}_4	2	-1	0	1	0	-2
\mathbf{a}_5	-1	-4	0	0	1	-7

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

En la primera tabla hay factibilidad dual.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		3	2	0	0	0	0
0	a_3	-1	-2	1	0	0	-3
0	a_4	2	-1	0	1	0	-2
0	a_5	-1	-4	0	0	1	-7
		$\frac{5}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$
0	a_3	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	a_4	$\frac{9}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
-2	a_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
		7	0	0	2	0	-4
0	a_3	-4	0	1	-2	0	1
0	a_5	-9	0	0	-4	1	1
-2	a_2	-2	1	0	-1	0	2

$-\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{4}$

 -2
 2
 1

Solución óptima: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$, $z^* = 4$.

- 1 No hay factibilidad dual en la tabla inicial, añadir una restricción artificial.
- 2 No modificar la región de factibilidad del problema.
- 3 Se añade para obtener factibilidad dual en la tabla.
- 4 Restricción artificial:

$$\sum_{j \in N} x_j < M.$$

N conjunto de variables con $z_j - c_j < 0$.

M valor positivo muy grande.

$$\max z = x_1 + 6x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max z = x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$$

$$-x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} = (\mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	-1	-6	0	0	0
\mathbf{a}_3	1	2	1	0	20
\mathbf{a}_4	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$

No hay factibilidad dual \rightarrow restricción artificial: $x_1 + x_2 \leq M$.

Restricción artificial \rightarrow variable de holgura x_5 .

$$\max z = x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$$

$$-x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = M$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		-1	-6	0	0	0	-6
0	a₃	1	2	1	0	0	20
0	a₄	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
0	a₅	1	1	0	0	1	M

Objetivo: maximizar. $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ formada por variables de holgura

Paso 1. Construir la tabla inicial.

Paso 2. Necesidad de restricción artificial.

- Si $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A} \ z_j - c_j \geq 0$, ir al Paso 3.
- Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$ tal que $z_j - c_j < 0$, **añadir una restricción artificial** y hacer un cambio de base.

Entra el vector \mathbf{a}_k tal que $z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\}$. Sale el vector de holgura de la restricción artificial. Hacer operaciones elementales. Ir al Paso 3.

Paso 3. Factibilidad primal.

- No hay restricción artificial.
 - Si $x_{Bi} \geq 0, i = 1, \dots, m$, **solución óptima**. Parar.
 - Si para algún $i = 1, \dots, m, x_{Bi} < 0$, ir al Paso 4.
- Si hay restricción artificial.
 - Si $x_{Bi} \geq 0, i = 1, \dots, m$ y la variable de holgura de la restricción artificial está en la base con valor positivo, **solución óptima**. Parar.
 - Si $x_{Bi} \geq 0, i = 1, \dots, m$ y la variable de holgura de la restricción artificial no está en la base o siendo básica vale cero, **solución no acotada**. Parar.
 - Si existe $x_{Bi} < 0$ para algún $i = 1, \dots, m$, la solución se puede mejorar. Ir al Paso 4.

Paso 4. Cambio de base.

- Sale de la base el vector \mathbf{a}_r tal que

$$x_{Br} = \min_j \{x_{Bi}/x_{Bi} < 0\}$$

La fila r es la **fila pivote**.

- Entra en la base el vector \mathbf{a}_k tal que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} / y_{rj} < 0 \right\}$$

La columna k es la **columna pivote**.

y_{rk} es el **pivote**.

Si en la fila r no hay y_{rj} negativo, **problema infactible**. Parar

Paso 5. Nueva tabla haciendo operaciones elementales. Ir al Paso 3.

Aplicación del algoritmo simplex dual

Restricción artificial \rightarrow problema factible

$$\max z = x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 &= -\frac{1}{2} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max z = x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 &= -\frac{1}{2} \\ x_1 + x_2 + x_5 &= M \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		-1	-6	0	0	0	0
0	a_3	1	2	1	0	0	20
0	a_4	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
0	a_5	1	1	0	0	1	M
		5	0	0	0	6	6M
0	a_3	-1	0	1	0	-2	$-2M + 20$
0	a_4	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}$
6	a_2	1	1	0	0	1	M
		2	0	3	0	0	60
0	a_5	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$M - 10$
0	a_4	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{9}{2}$
6	a_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	10

Aplicación del algoritmo simplex dual

Restricción artificial \rightarrow solución no acotada

$$\max z = -4x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max z = -4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

sujeto a

$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = -3$$

$$x_2 + x_5 = M$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		4	-5	0	0	0	0
0	a_3	-2	-2	1	0	0	-4
0	a_4	-1	1	0	1	0	-3
0	a_5	0	1	0	0	1	M
		4	0	0	0	5	$5M$
0	a_3	-2	0	1	0	2	$2M - 4$
0	a_4	-1	0	0	1	-1	$-M - 3$
5	a_2	0	1	0	0	1	M
		0	0	0	4	1	$M - 12$
0	a_3	0	0	1	-2	4	$4M + 2$
-4	a_1	1	0	0	-1	1	$M + 3$
5	a_2	0	1	0	0	1	M

V. holgura de la restricción artificial no básica \rightarrow primal no acotado y dual infactible.