El método simplex

Forma estándar

1. Todas las restricciones son del tipo $=$.
2. Todas las variables del modelo son no negativas.
3. Las componentes del vector $\mathbf{b}$ son no negativas.

$$
\begin{aligned}
\max(\min) \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

- Objetivo max $\longrightarrow$ forma estándar de maximización.
- Objetivo min $\longrightarrow$ forma estándar de minimización.

Cambios en el modelo

1. **F. objetivo.** min $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Leftrightarrow \quad \max(-z) = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j.$
2. **Restricciones.**

   ❶ $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leq -b_i.$$

   ❷ $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y = b_i.$$
   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y = b_i.$$
   $y \rightarrow$ variable de holgura.

   ❸ $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i.$$

3. **Variables.**

   1. Si $x_j \leq 0$, cambio de variable

$$x_j = -x_j', \text{ donde } x_j' \geq 0.$$

   2. Si x_j no tiene restricción de signo, cambio de variable

$$x_j = x_j' - x_j'', \text{ donde } \; x_j', x_j'' \geq 0.$$

- Si $x_j' > x_j''$, entonces $x_j > 0$.
- Si $x_j' < x_j''$, entonces $x_j < 0$.
- Si $x_j' = x_j''$, entonces $x_j = 0$.

Ejemplo

Forma estándar de maximización

$$\begin{array}{rl} \min\ z & = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \leq 0,\ x_3 : \text{no rest.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -\max\,(-z) & = -x_1 + 2x_2' - x_3' + x_3'' + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' - x_4 = 2 \\ & -x_1 - 2x_2' - 5x_3' + 5x_3'' - x_5 = 1 \\ & x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' = 4 \\ & x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

- Función objetivo.

$$\min\ z\ = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow -\max\,(-z)\ = -x_1 - 2x_2 - x_3.$$

- Restricciones.
  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \rightarrow x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2.$
  $x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq -1 \rightarrow x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_5 = -1 \rightarrow -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_5 = 1.$

- Variables.
  $x_2 \leq 0 \rightarrow x_2 = -x_2'.$
  x_3 no restringida $\rightarrow x_3 = x_3' - x_3''.$

$$\begin{aligned} \max \quad z = \ & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ m < n,\ \text{rang}(\mathbf{A}) = m.$$

- $\mathbf{x}$ es solución si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ es solución factible.
- $\mathbf{B}$ submatriz base de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_B$ es solución básica. Si $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ es factible básica.
- Si $\mathbf{x}_B > \mathbf{0}$ es no degenerada. Si alguna componente es 0 es degenerada.
- $F \rightarrow$ Región de factibilidad: soluciones factibles.
- Solución óptima: $\mathbf{x}^*$. Valor óptimo: $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 \\
\text{sujeto a} & \\
2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{c}^T = (3,\ 6,\ 5,\ 4,\ 1), \quad \mathbf{x}^T = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

rang $\mathbf{A} = 2 <$ número de incognitas $\rightarrow$ infinitas soluciones.

Número de soluciones básicas= Número de bases $\rightarrow$ finito.

Elegir $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

Matriz base **B** $\rightarrow$ columnas primera y cuarta de **A**.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Infinitas soluciones $\rightarrow$ dar valores a x_2, x_3 y x_5.

- Si en la ecuación (1) $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_5 = 0$,

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ solución factible básica.}$$

- Si en la ecuación (1) $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_5 = 0$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T = (1, 0, 1, 1, 0) \rightarrow \text{ solución factible no básica.}$$

Puntos extremos y soluciones factibles básicas

Teorema

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{sujeto a} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{x}$ *es solución factible básica si y sólo si* $\mathbf{x}$ *es punto extremo.*

Teorema

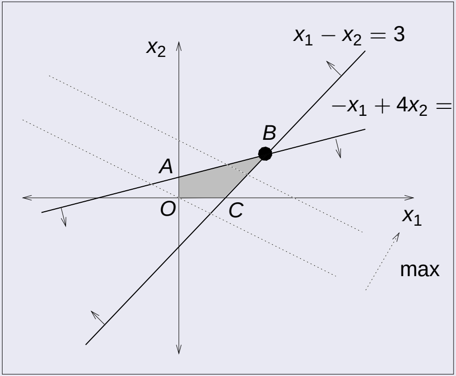
$$\begin{aligned} \max \quad z & = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{sujeto a} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

z^* *se encuentra en un punto extremo de la región* F.

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Puntos extremos:

$O = (0,\ 0)\ ,\ \ A = (0,\ 1)\ ,\ \ B = \left(\frac{16}{3},\ \ \frac{7}{3}\right)\ ,\ \ C = (3,\ 0)$

Solución óptima: punto B.

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad +x_4 &= 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Máximo número de bases= 6.

1. *Primera opción*. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

   Solución básica factible $\longrightarrow$ Punto B.

2. *Segunda opción*. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_3)$.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   Solución básica factible $\longrightarrow$ punto C.

3. *Tercera opción*. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_4)$.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4. *Cuarta opción*. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)$.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5 *Quinta opción*. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4)$.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución básica factible $\longrightarrow$ punto A.

6. *Sexta opción*. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4)$.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución básica factible $\longrightarrow$ punto O.

$$\max \; z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{A} \rightarrow m \times n, \; n > m$.
$\mathbf{B}$ base, $\mathbf{N}$ resto de columnas.
$\mathbf{c}_B$, $\mathbf{x}_B$ componentes básicas de $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$.
$\mathbf{c}_N$ y $\mathbf{x}_N$ componentes no básicas de $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$.

$$\max \; z = (\mathbf{c}_B^T \mid \mathbf{c}_N^T) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

$$\max \; z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

sujeto a

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} c_{B1} \\ c_{B2} \\ \vdots \\ c_{Bm} \end{pmatrix}$$

- *Valor objetivo*.

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi}$$

- *Cálculo de $z_j - c_j$*.

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ij} - c_j$$

- Coordenadas de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{A}$.

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \cdots + y_{mj}\mathbf{a}_m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{a}_i.$$

Vector de coordenadas $\rightarrow \mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$

Ejemplo

$$\max\ z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$$

$$\max\ z = (3, 4 \mid 5, 6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Cálculos

- Solución básica.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Función objetivo.

$$\mathbf{c}_B^T = (3,4) \;\rightarrow\; z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (3, \;\; 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

- Coordenadas de $\mathbf{a}_4$.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = y_{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_{24} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_4 = \begin{pmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- Valor indicador $z_4 - c_4$.

$$z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_4 - c_4 = (3, \;\; 4) \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} - 6 = -3 - 6 = -9.$$

Teorema

Sea el modelo lineal en forma estándar

$$
\begin{aligned}
\max \ z \ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\textit{sujeto a} & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{B}$ *una base elegida en* $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *y* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$.
Si existe $\mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, *tal que* $z_j - c_j < 0$ *y con alguna de sus coordenadas* y_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, *positiva, entonces existe otra solución factible básica* $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ *tal que*

$$\hat{z} = \overset{\wedge}{\mathbf{c}}{}_B^T \overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B \geq z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$$

Cambio de base → cálculo de una solución mejor

Reglas de selección

1. Vector que entra en la base: $\mathbf{a}_k$ tal que

$$\boxed{z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\}}$$

Esta regla garantiza que $\hat{z} \geq z$.

2. Vector que sale: $\mathbf{a}_k$ sustituye en la base a $\mathbf{a}_r$ tal que

$$\boxed{\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\}}$$

Esta regla garantiza que $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$.

Base y solución: $\mathbf{B}$, $\mathbf{x}_B$, z.

$\mathbf{a}_k$ sustituye a $\mathbf{a}_r$ $\longrightarrow$ Nuevas base y solución: $\overset{\wedge}{\mathbf{B}}$, $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$, $\hat{z}$.

1. Fórmula para calcular la nueva solución factible básica.

$$\boxed{\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \begin{cases} x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} & i \neq r \\ \frac{x_{Br}}{y_{rk}} & i = r \end{cases}}$$

2. Fórmula para calcular el nuevo valor de la función objetivo.

$$\boxed{\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}}(z_k - c_k)}$$

1. **Condiciones de óptimo.**

   Si $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, $z_j - c_j \geq 0 \rightarrow$ solución óptima.

   1.1. Si $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, $z_j - c_j > 0 \rightarrow$ solución óptima única.

   1.2. Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$ con $z_j - c_j = 0 \rightarrow$ soluciones óptimas múltiples.

2. **Condiciones de mejora.**

   Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, con $z_j - c_j < 0 \rightarrow$ se puede mejorar.

   2.1. Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, con $z_j - c_j < 0$ y todas las coordenadas son menores o iguales que 0 $\rightarrow$ solución no acotada.

   2.2. Si no, aplicar el teorema de mejora.

Solución factible básica inicial

Primera base formada por variables de holgura ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$)

$$\begin{aligned} \max \ \ z \ \ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} \max \ z \ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{0}^T\mathbf{y} \\ \text{sujeto a} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ formada por variables de holgura, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$.

- $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\,\mathbf{b} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \rightarrow$ solución factible básica.
- Valor de la función objetivo. $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = \mathbf{0}^T\mathbf{x}_B = 0$.
- Vector de coordenadas. $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{I}\mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{y}_j = \mathbf{a}_j$.
- Cálculo de indicadores. $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{y}_j - c_j = 0 - c_j = -c_j$.

Resultados de los cálculos $\rightarrow$ los parámetros del modelo.

Ejemplo

$$\begin{array}{ccc}
\begin{aligned}
\max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeto a} & \\
3x_1 + x_2 &\leq 2 \\
x_1 - x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
& \longrightarrow &
\begin{aligned}
\max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
\text{sujeto a} & \\
3x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 2 \\
x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
\end{array}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4) = \mathbf{I} \longrightarrow \text{ base canónica.}$$

1. Solución. $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ La solución es factible .
2. Función objetivo. $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (0, 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$
3. Coordenadas $\mathbf{y}_j$ y valor $z_j - c_j$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_1 - c_1 = (0, 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -2.$$

3.

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 - c_2 = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = -3.$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_3 - c_3 = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0.$$

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_4 - c_4 = (0,\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0.$$

Solución factible básica inicial

Variables artificiales en la base $\rightarrow$ penalizar

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 3x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a} & \\
x_1 + x_2 &\le 3 \\
x_1 + 2x_2 &\ge 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\max \quad z &= 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
\text{sujeto a} & \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1 + 2x_2 - x_4 &= 2 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mw_1 \\
\text{sujeto a} & \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1 + 2x_2 - x_4 + w_1 &= 2 \\
x_1, x_2, \ldots, w_1 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_{w1}) \rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

Tabla del método simplex

		Variables originales			Variables auxiliares				
		x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_j	$\dots$	
		$z_1 - c_1$	$\dots$	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$\dots$	$z_j - c_j$	$\dots$	z
c_{B1}	$\mathbf{a}_{B1}$	y_{11}	$\dots$	y_{1n}	$y_{1,n+1}$	$\dots$	$y_{1,j}$	$\dots$	x_{B1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
c_{Bi}	$\mathbf{a}_{Bi}$	y_{i1}	$\dots$	y_{in}	$y_{i,n+1}$	$\dots$	$y_{i,j}$	$\dots$	x_{Bi}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
c_{Bm}	$\mathbf{a}_{Bm}$	y_{m1}	$\dots$	y_{mn}	$y_{m,n+1}$	$\dots$	$y_{m,j}$	$\dots$	x_{Bm}

Ejemplo

Tabla del simplex → sin penalización

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 2 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		-2	-3	0	0	0
0	$\mathbf{a}_3$	3	1	1	0	2
0	$\mathbf{a}_4$	1	-1	0	1	3

		$x_1\ x_2\ \dots\ x_n$	$x_{n+1}\ x_{n+2}\ \dots x_{n+m}$	
		$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$
$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{x}_B$

$$\begin{aligned} \max\ z = &-5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 10x_2 - 6x_3 &\geq 30 \\ \frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z = &-5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 - Mw_1 - Mw_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 10x_2 - 6x_3 - x_4 \qquad + w_1 \qquad &= 30 \\ \frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + w_2 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	
		$-4M+5$	$-12M-6$	$4M-7$	M	0	0	0	$-35M$
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	2	10	-6	-1	0	1	0	30
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{5}{2}$	-3	5	0	1	0	0	10
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	2	2	2	0	0	0	1	5

1. **Condiciones de óptimo.**
   $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, $z_j - c_j \geq 0$.
   1.1 Si hay variables artificiales en la base $\rightarrow$ problema infactible.
   1.2. Si no hay variables artificiales en la base $\rightarrow$ solución óptima.
      1. $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, $z_j - c_j > 0 \rightarrow$ solución óptima única.
      2. Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$ con $z_j - c_j = 0 \rightarrow$ soluciones óptimas múltiples.
2. **Condiciones de mejora.**
   Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, con $z_j - c_j < 0 \rightarrow$ se puede mejorar.
   2.1. Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, con $z_j - c_j < 0$ y todas las coordenadas son menores o iguales que 0 $\rightarrow$ solución no acotada.
   2.2. Si no, aplicar el teorema de mejora.

Paso 1. Construir la tabla inicial.

Paso 2.

- Si $\exists z_j - c_j < 0$, la solución puede mejorar. Ir al Paso 4.
- Si $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $z_j - c_j \geq 0$, no se puede mejorar. Ir al Paso 3.

Paso 3.

- Si en la base hay alguna variable artificial con valor positivo **el problema es infactible**. Parar.
- Si no hay variables artificiales en la base, la solución es **óptima**.
  - Si $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, $z_j - c_j > 0$, **solución óptima única**. Parar.
  - Si $\exists \mathbf{a}_k \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_k \notin \mathbf{B}$, tal que $z_k - c_k = 0$ y, para ese vector, alguna coordenada y_{ik}, $i = 1, \ldots, m$, es mayor que cero, se puede calcular una **nueva solución factible básica óptima**. Ir al Paso 5.
  - Si $\exists \mathbf{a}_k \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, tal que $z_k - c_k = 0$ y, para ese vector, $y_{ik} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, **soluciones óptimas múltiples**, pero no son soluciones básicas. Parar.

Algoritmo simplex (continuación)

Paso 4.

- Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, tal que $z_j - c_j < 0$ y sus coordenadas $\mathbf{y}_j$ son menores o iguales que 0, **solución no acotada**. Parar.
- Si $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$, tal que $z_j - c_j < 0$ y alguna coordenada y_{ij} es mayor que cero, ir al paso 5.

Paso 5. Selección de la nueva base.

- Entra en la base $\mathbf{a}_k$ que cumple $z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j / z_j - c_j \leq 0\} \rightarrow k$ **columna pivote**.
- Sale de la base $\mathbf{a}_r$ que cumple $\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\} \rightarrow r$ **fila pivote** $\rightarrow y_{rk}$ **pivote**.

Paso 6. Calcular la nueva tabla y volver al Paso 2.

- Nueva fila r: dividir la fila r de la tabla actual por el pivote y_{rk}.
- Nueva fila i= fila i actual$-$ $m_i \times$ fila pivote. $m_i = \frac{y_{ik}}{y_{rk}}$, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq r$.
- Nueva fila de indicadores= fila de indicadores actual$-$ $m_0 \times$ fila pivote. $m_0 = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}}$.

Ejemplo 1

Solución óptima única

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 \\
\text{sujeto a} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 10 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ll}
\max & z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 \\
\text{sujeto a} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\
& 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 10 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
		-6	-4	-5	-5	0	0	0	0	$m_0 = -3$
0	$\mathbf{a}_5$	1	1	1	1	1	0	0	3	$m_1 = \frac{1}{2}$
0	$\mathbf{a}_6$	$\boxed{2}$	1	4	1	0	1	0	4	
0	$\mathbf{a}_7$	1	2	-2	3	0	0	1	10	$m_3 = \frac{1}{2}$
		0	-1	7	-2	0	3	0	12	$m_0 = -4$
0	$\mathbf{a}_5$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	
6	$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2	$m_2 = 1$
0	$\mathbf{a}_7$	0	$\frac{3}{2}$	-4	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	8	$m_3 = 5$
		0	1	3	0	4	1	0	16	
5	$\mathbf{a}_4$	0	1	-2	1	2	-1	0	2	
6	$\mathbf{a}_1$	1	0	3	0	-1	1	0	1	
0	$\mathbf{a}_7$	0	-1	1	0	-5	2	1	3	

Ejemplo 2

Problema infactible

$$\max\ z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mw_1 - Mw_2$$

sujeto a

$$\begin{array}{lllllll}
2x_1 + 10x_2 - 6x_3 & -x_4 & & +w_1 & & = 30 \\
\frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 & & +x_5 & & & = 10 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & & & +w_2 & = 5 \\
 & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ w_1,\ w_2 \geq 0
\end{array}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	
		$-4M+5$	$-12M-6$	$4M-7$	M	0	0	0	$-35M$
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	2	10	-6	-1	0	1	0	30
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{5}{2}$	-3	5	0	1	0	0	10
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	2	$\boxed{2}$	2	0	0	0	1	5
		$8M+11$	0	$16M-1$	M	0	0	$6M+3$	-5M+15
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	-8	0	-16	-1	0	1	-5	5
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{11}{2}$	0	8	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{35}{2}$
6	$\mathbf{a}_2$	1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

Ejemplo 3

Solución no acotada

$$\begin{aligned} \max \quad z &= x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ -4x_1 - 2x_2 &\leq -6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \; z = x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mw_1 - Mw_2 & \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + w_1 \qquad &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad + w_2 &= 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
		$-6M-1$	$-4M+3$	M	M	0	0	$-10M$
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	2	2	-1	0	1	0	4
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	$\boxed{4}$	2	0	-1	0	1	6
		0	$-M+\frac{7}{2}$	M	$-\frac{1}{2}M-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}M+\frac{1}{4}$	$-M+\frac{3}{2}$
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	0	$\boxed{1}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
1	$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
		0	0	$\frac{7}{2}$	-2	$M-\frac{7}{2}$	$M+2$	-2
-3	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
1	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
		0	4	$-\frac{1}{2}$	0	$M+\frac{1}{2}$	M	2
0	$\mathbf{a}_4$	0	2	-2	1	2	-1	2
1	$\mathbf{a}_1$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2

El método de las dos fases

Si son necesarias variables artificiales

1. **Primera fase.** El objetivo es minimizar la suma de las variables artificiales.
   - Si el valor de la función objetivo es mayor que cero, el problema inicial no tiene solución.
   - En caso contrario, existe solución. Continuar en la segunda fase.

2. **Segunda fase.** Optimizar la función objetivo del problema original partiendo de la tabla óptima de la primera fase. En dicha tabla sólo cambia la fila de indicadores; continuar con las iteraciones del simplex.

Ejemplo

Primera fase

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 14 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 &\leq -10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max\ (-z') = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - w_1 - w_2$$

sujeto a

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & +w_1 & & = 14 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 & -x_4 & & +w_2 & = 10 \\ & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2 & \geq 0 \end{array}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
		-4	3	-3	1	0	0	-24
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	2	2	2	0	1	0	14
-1	$\mathbf{a}_{w2}$	$\boxed{2}$	-5	1	-1	0	1	10
		0	-7	-1	-1	0	2	-4
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	0	$\boxed{7}$	1	1	1	-1	4
0	$\mathbf{a}_1$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
		0	0	0	0	1	1	0
0	$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
0	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

Partimos de la tabla óptima de la primera fase.

- $z_1 - c_1 = (3\ ,\ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = 0$
- $z_2 - c_2 = (3\ ,\ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = 0$
- $z_3 - c_3 = (3\ ,\ 2)\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + 5 = \dfrac{50}{7}$
- $z_4 - c_4 = (3\ ,\ 2)\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} - 0 = \dfrac{1}{7}$
- $z = (3\ ,\ 2)\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{45}{7} \end{pmatrix} - 0 = \dfrac{102}{7}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		0	0	$\frac{50}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{102}{7}$
3	$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
2	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

Método simplex revisado

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$.
Entra en la base $\mathbf{a}_k$ tal que $z_k - c_k = \min_j\{z_j - c_j / z_j - c_j \leq 0\}$. Sale de la base $\mathbf{a}_r$ tal que $\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\}$.

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_r$$

Todos los cálculos se realizan con $\mathbf{B}^{-1}$.

		$x_{n+1}\ x_{n+2}\ \ldots x_{n+m}$	
		$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$
$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{x}_B$

$$\max\ z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

sujeto a

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & +x_5 & & & = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 & & +x_6 & & = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 & & & +x_7 & = 10 \\ & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 & \geq 0 \end{array}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_B^T = (0\ ,\ 0\ ,\ 0), \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

		x_5	x_6	x_7	
		0	0	0	0
0	$\mathbf{a}_5$	1	0	0	3
0	$\mathbf{a}_6$	0	1	0	4
0	$\mathbf{a}_7$	0	0	1	10

Ejemplo

Cálculo de los valores indicadores para vectores no básicos.

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N^T=(0,0,0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix}-(6,4,5,5)=(-6,-4,-5,-5)$$

$$z_1-c_1=\min\{-6,-4,-5,-5\}=-6 \quad\rightarrow\quad \text{entra } \mathbf{a}_1$$

Columna pivote $\mathbf{y}_1$.

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Sale de la base el vector $\mathbf{a}_r$ tal que

$$\frac{x_{Br}}{y_{r1}}=\min\left\{\frac{3}{1},\frac{4}{2},\frac{10}{1}\right\}=2 \quad\rightarrow\quad \text{sale } \mathbf{a}_6.$$

- La fila 2 es la fila pivote, el pivote es 2.
- Multiplicador de la fila de indicadores: $-\frac{6}{2}$.
- Multiplicador de la primera fila: $\frac{1}{2}$.
- Multiplicador de la tercera fila: $\frac{1}{2}$.

Ejemplo (continuación)

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\hline
 & & 0 & 3 & 0 & 12 \\
\hline
0 & \mathbf{a}_5 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
6 & \mathbf{a}_1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\
0 & \mathbf{a}_7 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

Cálculo de los indicadores para vectores no básicos.

$$
\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T = (0,3,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - (4,5,5,0) =
$$

$$
= (-1, 7, -2, 3)
$$

$$
z_4 - c_4 = min\{-1, -2\} = -2 \quad \rightarrow \quad \text{entra } \mathbf{a}_4.
$$

$$
\mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}
$$

- Pivote: $\frac{1}{2}$.
- Multiplicador de la fila de indicadores: -4.
- Multiplicador de la segunda fila: 1.
- Multiplicador de la tercera fila: 5.

Ejemplo (continuación)

		x_5	x_6	x_7	
		4	1	0	16
5	$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	2
6	$\mathbf{a}_1$	-1	1	0	1
0	$\mathbf{a}_7$	-5	2	1	3

Cálculo de los valores indicadores para vectores no básicos.

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T = (4,1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (4,5,0,0) =$$

$$= (1,3,4,1).$$

No existe ningún valor indicador negativo $\longrightarrow$ la solución es óptima.

Observaciones

1. **Errores de redondeo**: Cuando se utilizan aproximaciones la solución factible básica óptima puede no satisfacer las restricciones. El error se puede evaluar, $\mathbf{B}\mathbf{x}_B \neq \mathbf{b}$.

2. **Variables artificiales en la solución óptima**. La existencia de variables artificiales con valor cero en la base óptima indica la existencia de ecuaciones redundantes o bien que la solución es degenerada.

3. **Problema de ciclado**: El empate en el criterio del vector de entrada se puede romper al azar. El empate en el criterio de salida no se puede romper al azar en algunos casos y hay que utilizar las reglas lexicográficas o la regla de Bland.

4. **Eficiencia del método simplex**. Hay estudios que muestran que la eficiencia computacional del método simplex es más sensible al número de restricciones que al número de variables.