Modelos lineales y solución gráfica

1. El modelo lineal.
2. Formas de escribir el modelo.
3. Planteamiento de modelos.
4. Solución gráfica.
   - 4.1 Solución óptima única.
   - 4.2 Soluciones óptimas múltiples.
   - 4.3 Solución no acotada.
   - 4.4 Problema infactible.

$$\text{opt } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{1}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\leq}{\geq} \mathbf{b} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

(1) *función objetivo*, (2) *restricciones* y (3) *restricciones de no negatividad*.

Elementos del modelo:

- $\mathbf{x}$, vector de *variables de decisión*, n componentes.
- $\mathbf{c}^T$, *vector de costes unitarios*, n componentes.
- $\mathbf{b}$, *vector de recursos*, m componentes.
- $\mathbf{A} \rightarrow m \times n$, *matriz de coeficientes tecnológicos*.

1.

$$
\begin{aligned}
\text{opt } z \; &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeto a} & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\; \substack{\leq \\ = \\ >} \; b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\; \substack{\leq \\ = \\ >} \; b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\; \substack{\leq \\ = \\ >} \; b_m \\
x_1, x_2 \ldots x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. $$\text{opt } z = (c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq (0, 0, \cdots, 0)^T$$

3. Si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son las columnas de la matriz **A**.

$$\text{opt } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeto a

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n \stackrel{\leq}{\stackrel{=}{\geq}} \mathbf{b}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

- Producir en C_1, C_2 y C_3. Transportar a A, B, C, D.
- Capacidad de producción mensual: 1000, 2100 y 1500.
- Demandas: 800, 1100, 900 y 1300.

Tabla de distancias

Ciudades	Clientes A	B	C	D
C_1	10	8	10	13
C_2	19	6	15	16
C_3	14	8	9	6

Variables de decisión: x_{ij} unidades transportadas de i a j.

$$\min\ z = 10x_{1A}+8x_{1B}+10x_{1C}+13x_{1D}+19x_{2A}+6x_{2B}+15x_{2C}+16x_{2D}+14x_{3A}+8x_{3B}+9x_{3C}+6x_{3D}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}+x_{1D} &\leq 1000\\
x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}+x_{2D} &\leq 2100\\
x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}+x_{3D} &\leq 1500\\
x_{1A}+x_{2A}+x_{3A} &\geq 800\\
x_{1B}+x_{2B}+x_{3B} &\geq 1100\\
x_{1C}+x_{2C}+x_{3C} &\geq 900\\
x_{1D}+x_{2D}+x_{3D} &\geq 1300\\
x_{1A}, x_{2A}, \ldots, x_{3D} &\geq 0
\end{aligned}$$

Problema de mezclas

Producción de gasolinas

Crudo	Cantidad de barriles	Precio por barril
1	2000	10
2	3000	8
3	1000	12

- Gasolina A al menos el 30% de crudo 1, al menos el 20% de crudo 2 y no más del 30% de crudo 3.
- Gasolina B al menos el 25% de cada uno de los crudos.
- Precios de venta de A y B son de 40 y 35.

$$\max z = 30x_{1A} + 32x_{2A} + 28x_{3A} + 25x_{1B} + 27x_{2B} + 23x_{3B}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_{1A} + x_{1B} &\leq 2000 \\
x_{2A} + x_{2B} &\leq 3000 \\
x_{3A} + x_{3B} &\leq 1000 \\
x_{1A} &\geq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
x_{2A} &\geq \frac{20}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
x_{3A} &\leq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
x_{1B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
x_{2B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
x_{3B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
x_{1A}, x_{2A}, \ldots, x_{3B} &\geq 0
\end{aligned}$$

El problema de la dieta

Nutrientes	Vitaminas (mg/gr) A	B	C	D	Coste (euros/gr)
1	2	1	0	1	0.014
2	1	2	1	2	0.009
3	1	0	2	0	0.013
4	1	2	1	1	0.016

- Al menos 25 mg de vitamina A.
- Entre 25 y 30 mg de vitamina B.
- Al menos 22 mg de vitamina C.
- No mas de 17 mg de vitamina D.

Variables de decisión: x_j gramos del nutriente j en la dieta.

$$\min \ z = 0.014x_1 + 0.009x_2 + 0.013x_3 + 0.016x_4$$

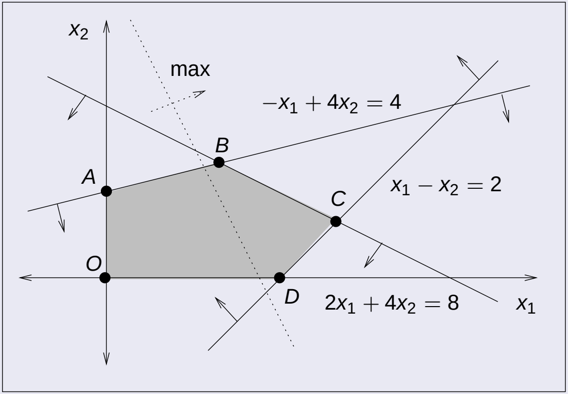
sujeto a

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 25 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_4 &\geq 25 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_4 &\leq 30 \\
x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 22 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &\leq 17 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\max\ z = 6x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

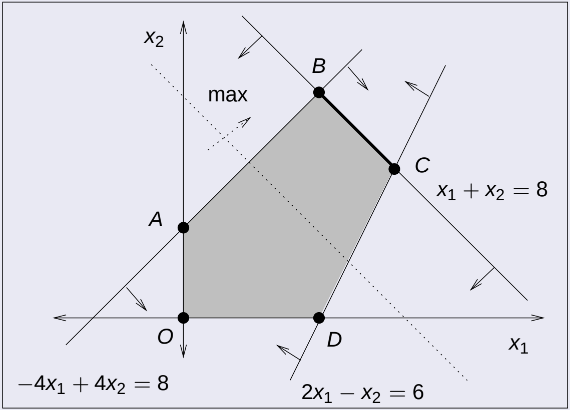


- Optimo: $C = (\frac{8}{3},\ \frac{2}{3})$
- $z^* = 18$.

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 8\\
-4x_1 + 4x_2 &\leq 8\\
2x_1 - x_2 &\leq 6\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



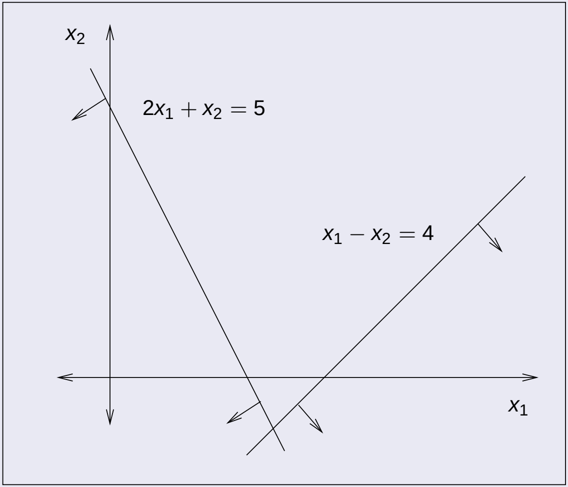
- Optimos: $B = (3, 5)$, $C = (\frac{14}{3}, \frac{10}{3})$ segmento BC.
- $z^* = 8$.

$$\max \ z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 - x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- El problema no tiene solución.

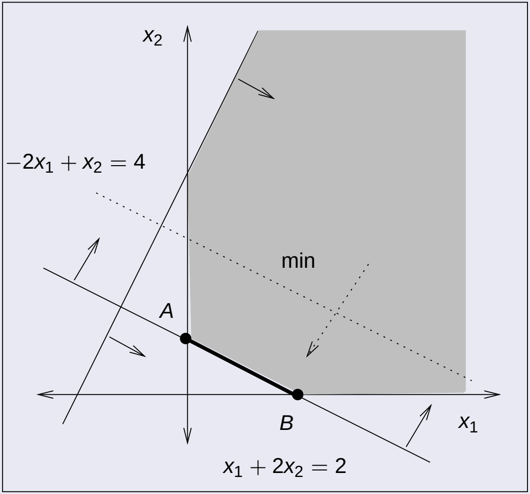


$$\min\ z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Optimos:
  $A = (0,\ 1)$
  $B = (2,\ 0)$
  segmento AB.
- $z^* = 2$.



$$\max\ z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- La solución es no acotada.