1. Solución de sistemas.
2. Espacios vectoriales.
3. Conjuntos convexos.
4. Soluciones básicas $\longrightarrow$ puntos extremos.

Rango de una matriz

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Reducir $\mathbf{A}$ a una matriz escalonada $\mathbf{U}$ $\longrightarrow$ algoritmo de Gauss.

Las filas que no tienen pivote en $\mathbf{U}$ son nulas.

rang $\mathbf{A}$= número de pivotes de $\mathbf{U}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & -12 & 17 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 10 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$$\text{rang}\ \mathbf{A} = 4.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{rang}\, \mathbf{A} = r, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}.$$

Casos:

1. rang $\mathbf{A} \neq$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) \rightarrow$ no solución.
2. rang $\mathbf{A} =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = r \rightarrow$ solución.
   - 2.1. $r =$ número incognitas $\rightarrow$ solución única.
   - 2.2. $r <$ número incognitas $\rightarrow$ infinitas soluciones.

Ejemplo 1

No solución

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rang $\mathbf{A} = 2 < 3 =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) \rightarrow$ **no solución.**

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

rang $\mathbf{A}$ $=$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = 2 =$ número de incógnitas.

Solución única: $x_1 = -1, x_2 = 5$.

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\
3x_1 \qquad + 2x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

rang $\mathbf{A}$ = rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = 2 <$ número de incógnitas $\rightarrow$ **infinitas soluciones**.

Soluciones básicas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n.$$

$$\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } (\mathbf{A} \ \mathbf{b}) = m.$$

B submatriz base $\rightarrow m \times m$.

N el resto de columnas de **A**.

$$(\mathbf{B} \ \ \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} - \mathbf{Nx}_N.$$

Infinitas soluciones en función de las variables $\mathbf{x}_N$.

Si $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} \rightarrow \text{ solución única }.$$

$$\mathbf{x}_B \rightarrow \textit{solución básica}.$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \end{array}\right)$$

Infinitas soluciones.

Número máximo de bases: $\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3.$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{x_B} = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array}\right) \to \text{solución básica.}$$

Espacio vectorial $\mathbb{R}^m$, $\quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$.

Combinación lineal:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$, son **linealmente independientes** si para cualquier combinación lineal,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

se tiene necesariamente

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ de $\mathbb{R}^m$, son **linealmente dependientes** si es posible encontrar una combinación lineal

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

con algún escalar α_i distinto de cero.

Ejemplo

Dependencia e independencia lineal

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Número de pivotes=3 $\rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Los vectores son linealmente independientes.

$S=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}\subseteq\mathbb{R}^m$ es un **conjunto generador** de $\mathbb{R}^m$ si para cualquier $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m$ exiten $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n.$$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&2&2&v_1\\-1&1&1&-2&v_2\\1&0&1&2&v_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&2&v_1\\0&4&3&0&v_2+v_1\\0&-3&-1&0&v_3-v_1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&2&2&v_1\\0&4&3&0&v_2+v_1\\0&0&\frac{5}{4}&0&v_3-\frac{1}{4}v_1+\frac{3}{4}v_2\end{pmatrix}$$

rang **A** = rang (**A b**)=3

$\downarrow$

conjunto generador .

$B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es *base* de $\mathbb{R}^m$ si los vectores son linealmente independientes y B es un conjunto generador.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \text{l. i.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 2 & 1 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & -1 & v_2 - 2v_1 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{pmatrix} \to \text{generador.}$$

B es una base de $\mathbb{R}^3$.

$B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$.

Cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ se puede expresar en combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Los coeficientes de la combinación lineal son únicos $\rightarrow$ coordenadas del vector.

Teorema

Dada una base B del espacio vectorial $\mathbb{R}^m$ y un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \notin B$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, siempre es posible conseguir otra base sustituyendo algún vector de B por el vector $\mathbf{v}$

Este teorema es un resultado central en el algoritmo simplex para pasar de una solución básica a otra mejor hasta obtener la solución óptima.

Cálculo de nuevas bases

Condición de los vectores

$$B = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Coordenadas de $\mathbf{v}$: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = 0$.

$\alpha_1 \neq 0 \rightarrow B' = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es base.

$\alpha_2 \neq 0 \rightarrow B'' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3\}$ es base.

$\alpha_3 = 0 \rightarrow$ el vector $\mathbf{v}_3$ no se puede sustituir por $\mathbf{v}$.

El *plano Euclideo* $\longrightarrow$ pares ordenados de números reales.

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_1 \text{ y } x_2 \text{ números reales} \right\}$$

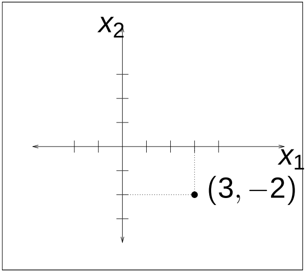

Figura: Plano Euclideo

Ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$: $a_1x_1 + a_2x_2 = c$, $a_1, a_2, c \in \mathbb{R}$.

Representación de la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$.

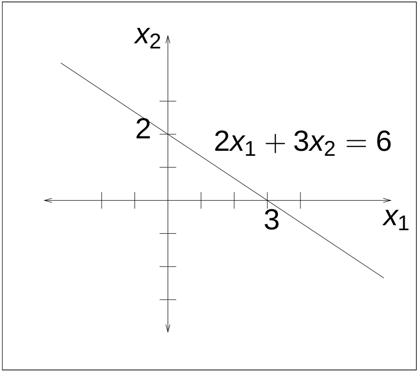

Figura: Recta en el plano

Semiespacio cerrado de $\mathbb{R}^2$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq c \quad \text{ó} \quad a_1x_1 + a_2x_2 \geq c.$$

Representación del semiespacio $2x_1 + 3x_2 \leq 6$.

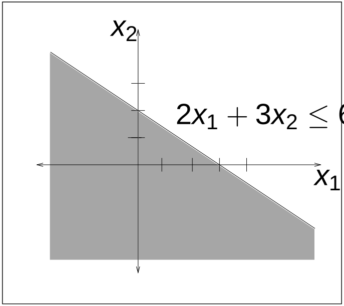

Figura: Semiespacio en el plano

Generalización

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \text{ y } x_3 \text{ números reales} \right\}$$

En $\mathbb{R}^3$ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ es un *plano* $\rightarrow$ $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$ es un plano.

Semiespacio cerrado de $\mathbb{R}^3$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq c \quad \text{ó} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq c.$$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, \ldots x_n \text{ números reales} \right\}$$

En $\mathbb{R}^n$ $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ es un *hiperplano*.

Semiespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq c \quad \text{ó} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq c.$$

$C \subset \mathbb{R}^n$ es un *conjunto convexo* si es el vacio, si tiene un sólo punto o si para cada dos puntos distintos del conjunto el segmento que los une está contenido en el conjunto.

(a), (b) y (c) son convexos.
(d) no es convexo.

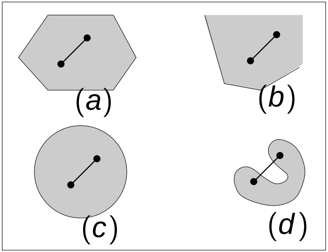

Figura: Conjuntos convexos y no convexos

- Un hiperplano es un conjunto convexo.
- Un semiespacio cerrado es un conjunto convexo.
- La intersección de un número finito de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Aplicación a la programación lineal.

Los conjuntos convexos que aparecen en el estudio de modelos lineales son los hiperplanos, los semiespacios cerrados y la intersección de un número finito. Estos conjuntos son del tipo (a), donde los vértices del conjunto se llaman *puntos extremos*.

Variables mayores o iguales que cero

$$-x_1 + 4x_2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 3$$

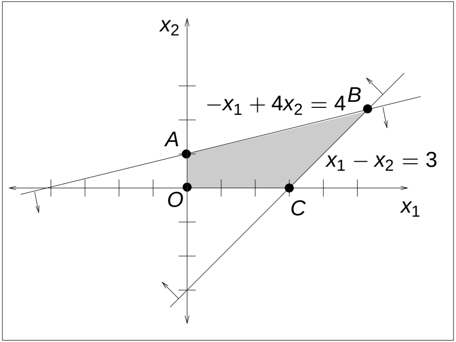

Figura: Conjunto convexo y puntos extremos

Vertices → puntos extremos.

$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ origen de coordenadas.

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ intersección de $-x_1 + 4x_2 = 4$ con el eje OX_2.

$B = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ intersección de $-x_1 + 4x_2 = 4$ y $x_1 - x_2 = 3$.

$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ es intersección de $x_1 - x_2 = 3$ con el eje OX_1.

- En el plano Euclideo la intersección de un número finito de semiespacios cerrados es un conjunto convexo, un polígono con un número finito de puntos extremos.
- En el espacio Euclideo de dimensión 3 la intersección de un número finito de semiespacios cerrados es un conjunto convexo, un poliedro con un número finito de puntos extremos.
- En el espacio Euclideo de dimensión n la intersección de un número finito de semiespacios cerrados es un conjunto convexo llamado polítopo.
- Los puntos extremos se calculan resolviendo sistemas de ecuaciones lineales.

Considerar todas las variables no negativas.

Sumando x_3 y x_4 (no negativas) $\rightarrow$ sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{r} -x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -x_1 + 4x_2 + x_3 & & = 4 \\ x_1 - x_2 + & + x_4 & = 3 \end{array}$$

Sistema de inecuaciones.
Infinitas soluciones $\rightarrow$ puntos de la Figura.

Sistema de ecuaciones.
Infinitas soluciones.

Soluciones básicas, variables no negativas $\rightarrow$ puntos extremos.

Cálculo de soluciones básicas

1. Columnas primera y segunda, $x_3 = x_4 = 0$.

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   Solución: $x_1 = \frac{16}{3}$ y $x_2 = \frac{7}{3} \rightarrow$ punto B.

2. Columnas primera y tercera, $x_2 = x_4 = 0$.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 4 \\ x_1 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

   Solución: $x_1 = 3$ y $x_3 = 7 \rightarrow$ punto C.

3. Columnas primera y cuarta, $x_2 = x_3 = 0$.

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad &= 4 \\ x_1 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

   Solución: $x_1 = -4$ y $x_4 = 7 \rightarrow$ ningún punto extremo.

4. Columnas segunda y tercera, $x_1 = x_4 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

Solución: $x_2 = -3$ y $x_3 = 16 \rightarrow$ ningún punto extremo.

5. Columnas segunda y cuarta, $x_1 = x_3 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x_2 \qquad &= 4 \\ -x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Solución: $x_2 = 1$ y $x_4 = 4 \rightarrow$ punto A.

6. Columnas tercera y cuarta, $x_1 = x_2 = 0$.

$$\begin{aligned} x_3 \qquad &= 4 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Solución: $x_3 = 4$ y $x_4 = 3 \rightarrow$ punto O.