Apéndice A

Algebra lineal y conjuntos convexos

El método simplex que se describirá en el Tema 2 es de naturaleza algebraica y consiste en calcular soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y determinar la que optimiza una función objetivo. Sin embargo, el estudio de la geometría de la programación lineal es instructiva para la comprensión del procedimiento algebraico.

En este apéndice recopilamos resultados básicos de álgebra lineal y conjuntos convexos necesarios para el desarrollo de los temas posteriores.

A.1 Matrices y vectores

Consideramos el cuerpo $\mathbb{R}$. A los elementos de $\mathbb{R}$ se les llama escalares.

Se llama matriz a un cuadro de escalares con m filas y n columnas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se dice que la matriz es de tamaño (o dimensión) $m \times n$. También se puede utilizar la notación $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Una matriz con una sola columna, es decir de tamaño $m \times 1$, se considera un vector columna

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Ejemplos.

1. El siguiente cuadro de números es una matriz de tamaño 3×4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 7 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. El siguiente cuadro de números es un vector de dimensión 3:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

A.1.1 Operaciones con matrices

Suma.

Dadas dos matrices de tamaño $m \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se llama *suma* de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y se representa como $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, a la matriz $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que se obtiene sumando, elemento a elemento:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Notemos que, para sumar dos matrices, éstas tienen que tener el mismo tamaño y el resultado es una matriz del mismo tamaño.

De la misma manera se define la suma de vectores, sólo hay que tener en cuenta que un vector es una matriz con una sola columna.

Ejemplos.

1. Dados los vectores $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Propiedades.

1. La suma de matrices es una operación interna en $\mathbb{R}^{m\times n}$.

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

2. La suma de matrices es conmutativa.

$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

3. La suma de matrices es asociativa.

$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

4. La suma de matrices tiene elemento neutro $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
$$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$
5. Toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene opuesta $-\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

La suma de vectores cumple las mismas propiedades que la suma de matrices.

Producto por un escalar.

Dados un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se llama *producto* de α por $\mathbf{A}$, y se representa $\alpha \cdot \mathbf{A}$, a la matriz $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que se obtiene multiplicando cada elemento de $\mathbf{A}$ por α:
$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$
Notemos que el resultado de multiplicar un escalar por una matriz, es otra matriz del mismo tamaño.

Ejemplos.

1. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y el escalar $\alpha = -2$, el producto
$$\alpha \cdot \mathbf{A} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
2. Dados el vector $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ y el escalar $\alpha = \frac{1}{2}$, el producto
$$\alpha \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Producto escalar de vectores.

Dados un vector fila $\mathbf{a}^T = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y un vector columna $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ se llama *producto* de $\mathbf{a}^T$ por $\mathbf{b}$, y se representa $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$, al escalar que resulta de multiplicar cada elemento de $\mathbf{a}^T$ por el elemento correspondiente de $\mathbf{b}$ y sumar los resultados:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (a_1 \ \cdots \ a_n) . \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i .$$

Notemos que para multiplicar un vector fila por un vector columna, ambos tienen que tener la misma dimensión y su producto es un escalar:

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow \ \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R} .$$

Ejemplo. Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (4 \ \ 2 \ \ 7) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \in \mathbb{R} .$$

$\square$

Producto de matrices.

Dadas dos matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, el producto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ es una matriz $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ que se define de la siguiente forma.

Para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$, el elemento (i, j) de $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es el producto de la fila i de $\mathbf{A}$ por la columna j de $\mathbf{B}$ (fila por columna).

Ejemplo. Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

La matriz producto $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -21 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

□

Propiedades.

1. El producto de matrices es asociativo.

   $$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p})\ (\forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}) \quad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}).$$

2. El producto de matrices es distributivo con respecto a la suma.

   $$(\forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}.$$
   $$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}.$$

3. $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{0}_{n\times p} = \mathbf{0}_{m\times p}, \quad \mathbf{0}_{q\times m}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}_{q\times n}.$

4. $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{I}_m\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_n = \mathbf{A}.$

5. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad \alpha\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\alpha\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\alpha\cdot\mathbf{B}).$

A.1.2 Rango de una matriz

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, por medio de operaciones elementales por filas podemos reducir $\mathbf{A}$ a una matriz escalonada $\mathbf{U}$, utilizando el algoritmo de Gauss. Las filas que no tienen pivote en $\mathbf{U}$ son nulas, por lo que el número de pivotes es el número de filas no nulas de $\mathbf{U}$.

Ejemplo. Considerar la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Haciendo eliminación gaussiana obtenemos una matriz escalonada $\mathbf{U}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & -12 & 17 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 10 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

□

Definición A.1.1 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *una matriz que por eliminación gaussiana se reduce a una matriz* $\mathbf{U}$ *escalonada. Llamaremos* rango *de* $\mathbf{A}$ *y lo representaremos por rang* $\mathbf{A}$ *al número de pivotes de* $\mathbf{U}$.

El rango de la matriz del ejemplo anterior es 4, igual al número de pivotes o el número de filas no nulas de $\mathbf{U}$.

A.2 Solución de sistemas lineales

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, rang $\mathbf{A} = r$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}$, utilizaremos la eliminación gaussiana para resolverlo. Se pueden dar los siguientes casos:

- rang $\mathbf{A} \neq$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$. El sistema no tiene solución.
- rang $\mathbf{A} =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = r$. El sistema tiene solución.
  - $r =$ número incógnitas. El sistema tiene solución única.
  - $r <$ número incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo. Considerar el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Para comprobar si el sistema tiene solución hay que calcular los rangos de las matrices $\mathbf{A}$ y $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Haciendo eliminación gaussiana

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que rang $\mathbf{A} = 2 < 3 =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$, y por tanto, el sistema no tiene solución.

$\square$

Ejemplo. Considerar el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Haciendo eliminación gaussiana

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Se tiene que rang $\mathbf{A}$ $=$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = 2 =$ número de incógnitas y por tanto el sistema tiene solución única $x_1 = -1, x_2 = 5$.

□

Ejemplo. Considerar el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Haciendo eliminación gaussiana

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que rang $\mathbf{A}$ $=$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = 2 <$ número de incógnitas, y por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si consideramos x_1 y x_2 incógnitas principales, podemos escribir el sistema de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 - 3x_3 \\ \frac{3}{2}x_2 &= 3 + \frac{5}{2}x_3 \end{aligned}$$

y las infinitas soluciones son $x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_3$, $x_2 = 2 + \frac{5}{3}x_3$ en función de la incógnita libre $x_3 \in \mathbb{R}$.

□

A.2.1 Soluciones básicas

Consideremos un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, siendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m < n$ tal que

$$\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } (\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = m.$$

Si elegimos una submatriz $\mathbf{B}$ de tamaño $m \times m$ con todas las columnas linealmente independientes, y denotamos por $\mathbf{N}$ la submatriz formada por el resto de columnas de $\mathbf{A}$, podemos escribir el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de la siguiente forma:

$$(\mathbf{B} \;\; \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

o también

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}.$$

Si despejamos en la fórmula anterior, podemos expresar las variables asociadas a la matriz $\mathbf{B}$ (variables básicas) en función de las variables asociadas a la matriz $\mathbf{N}$ (variables libres),

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} - \mathbf{Nx}_N.$$

Existen infinitas soluciones en función de los valores de las variables libres del vector $\mathbf{x}_N$. En particular, si damos valor cero a todas las incógnitas libres, es decir $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, tenemos el sistema

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b},$$

que tiene una única solución. Llamaremos a esta solución *solución básica*.

Ejemplo. Considerar el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

que por eliminación gaussiana se reduce a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 - 3x_3 \\ \frac{3}{2}x_2 &= 3 + \frac{5}{2}x_3 \end{aligned}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, $x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_3$ y $x_2 = 2 + \frac{5}{3}x_3$, en función de la incógnita libre x_3. Haciendo $x_3 = 0$ obtenemos la solución básica $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

Se pueden elegir distintas submatrices base $\mathbf{B}$ en la matriz $\mathbf{A}$ y para cada una de ellas calcular la solución básica correspondiente haciendo cero las incógnitas no asociadas a la base. El número máximo de bases que se pueden elegir es

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

En concreto, el número máximo de soluciones básicas del ejemplo es

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3.$$

□

A.3 Espacios vectoriales

Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^m$.

Definición A.3.1 (Combinación lineal) *Dados* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$ *vectores de* $\mathbb{R}^m$, *llamamos combinación lineal de estos vectores a una expresión del tipo*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Considerar los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. La expresión

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

2. La expresión

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, representa todas las posibles combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

□

A.3.1 Dependencia e Independencia lineal

Definición A.3.2 *Dados los vectores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *de* $\mathbb{R}^m$*, diremos que son linealmente independientes si para cualquier combinación lineal*

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

se tiene necesariamente

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Definición A.3.3 *Dados los vectores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *de* $\mathbb{R}^m$*, diremos que son linealmente dependientes si es posible encontrar una combinación lineal*

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

con algún escalar α_i *distinto de cero.*

Ejemplo.

1. Consideramos los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   La combinación lineal

   $$4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   nos permite decir que los vectores son linealmente dependientes.

2. Considerar los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

   y la combinación lineal

   $$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Haciendo eliminación gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene tres pivotes y, en consecuencia, el sistema tiene como solución única $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Los vectores son linealmente independientes.

$\square$

A.3.2 Bases y dimensión

Definición A.3.4 *Dado $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$ diremos que es un conjunto generador de $\mathbb{R}^m$ si cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ se puede expresar en combinación lineal de los vectores de S, es decir, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p.$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el siguiente conjunto de vectores S y un vector cualquiera $\mathbf{v}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Veamos que existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

tiene solución. Haciendo eliminación gaussiana se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & v_1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & v_2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & v_1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & v_2 + v_1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & v_3 - v_1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & v_1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & v_2 + v_1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 & v_3 - \frac{1}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_2 \end{pmatrix}.$$

Dado que rang $\mathbf{A} = $ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = 3$ el sistema tiene solución y por tanto, S es un conjunto generador. $\square$

Definición A.3.5 *Sea* $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$*. Diremos que* B *es una* base *de* $\mathbb{R}^m$ *si*

- *los vectores de* B *son linealmente independientes,*
- B *es un conjunto generador de* $\mathbb{R}^m$*.*

Se pueden encontrar distintas bases para un espacio vectorial, pero todas tienen el mismo número de vectores.

Ejemplo. Probar que el siguiente conjunto B es base de $\mathbb{R}^3$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para probar que son linealmente independientes resolvemos el sistema

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo eliminación gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene solución única, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Los vectores de B son linealmente independientes.

Para probar que es un conjunto generador se resuelve el sistema

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

El sistema es compatible, B es un conjunto generador.

Por tanto, B es una base de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Teorema A.3.1 *Sea* $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *una base de* $\mathbb{R}^m$. *Entonces, cada vector* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ *se puede expresar en combinación lineal de* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *y los coeficientes de la combinación lineal son únicos.*

Los escalares de la combinación lineal única a la que hace referencia el Teorema A.3.1 son las coordenadas del vector.

Teorema A.3.2 *Dada una base* B *del espacio vectorial* $\mathbb{R}^m$ *y un vector* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \notin B$ *y* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *siempre es posible conseguir otra base sustituyendo algún vector de* B *por el vector* $\mathbf{v}$.

Este resultado es central en el desarrollo de la programación lineal. Concretamente el algoritmo simplex parte de una solución factible básica y se mueve a otra mejor cambiando en la base un vector como se describe en el teorema anterior. Para que un vector de la base pueda ser sustituido debe cumplir una condición que mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Considerar la base B y el $\mathbf{v}$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

obtenemos las coordenadas del vector $\mathbf{v}$ en la base B,

$$\alpha_1 = 3 \ , \ \alpha_2 = -5 \ , \ \alpha_3 = 0.$$

Por ser $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_2 \neq 0$, los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ pueden ser sustituidos por $\mathbf{v}$ y se obtienen las bases:

$$B' = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \ \ , \ \ B'' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3\}.$$

Se puede comprobar que sustituyendo $\mathbf{v}_3$ por $\mathbf{v}$ hay dependencia lineal. Esto ocurre porque $\alpha_3 = 0$. El vector $\mathbf{v}_3$ no puede ser sustituido en la base.

□

Es decir, para conseguir nuevas bases, se pueden sustituir por el vector $\mathbf{v}$ aquellos vectores de la base que tienen asociada una coordenada de $\mathbf{v}$ distinta de cero.

A.4 Conjuntos convexos

El *plano Euclideo* es el conjunto de pares ordenados de números reales

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_1 \text{ y } x_2 \text{ son números reales} \right\}.$$

Geométricamente representamos $\mathbb{R}^2$ como en la gráfica.

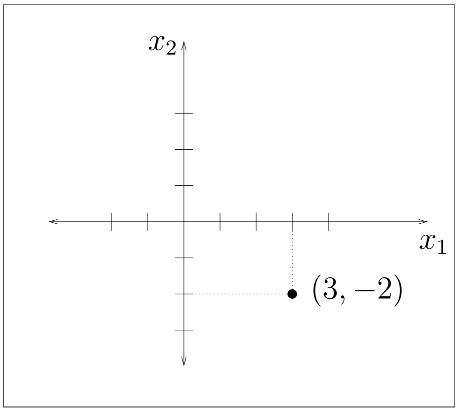

Figura A.1: Plano Euclideo

En $\mathbb{R}^2$ la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 = c$, donde a_1, a_2 y c son constantes, representa una *recta*. Por ejemplo, la ecuación $2x_1 + 3x_2 = 6$ es la recta que aparece representada en la gráfica.

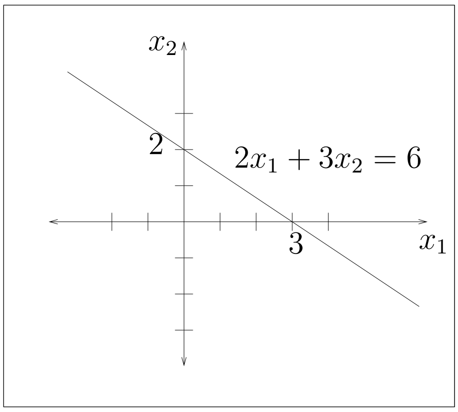

Figura A.2: Recta en el plano

Una inecuación del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 \leq c$ es el conjunto de los puntos de la recta $a_1x_1 + a_2x_2 = c$, junto con los puntos que están a uno de los dos lados de la recta. Por ejemplo, $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ es el conjunto de puntos que aparecen sombreados en la gráfica.

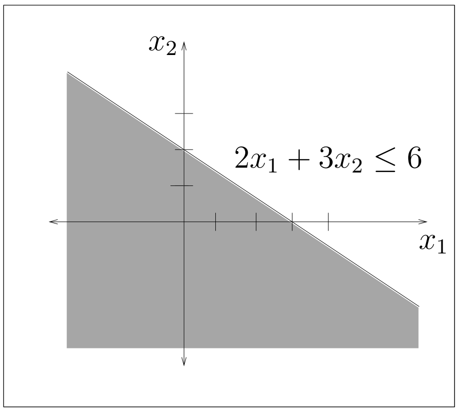

Figura A.3: Inecuación en el plano

Llamamos *semiespacio cerrado* de $\mathbb{R}^2$ al conjunto de puntos que satisface una desigualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq c,$$

o de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq c,$$

donde al menos una de las constantes a_1 o a_2 es distinta de cero.

El *espacio Euclideo* de dimensión 3 es el conjunto de tripletas ordenadas

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \text{ y } x_3 \text{ son números reales} \right\}.$$

En $\mathbb{R}^3$ la ecuación $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = c$, donde a_1, a_2, a_3 y c son constantes, representa un *plano*. Por ejemplo, la ecuación $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$ es un plano.

Un *semiespacio cerrado* de $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos que satisface una desigualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq c,$$

o de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq c.$$

Se pueden generalizar estas ideas a un espacio Euclideo de dimensión n

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, \ldots x_n \text{ son números reales} \right\}$$

En $\mathbb{R}^n$ la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c,$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ y c son constantes, representa un *hiperplano*.

Un *semiespacio cerrado* de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos que satisface una desigualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq c,$$

o de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq c.$$

Definición A.4.1 *Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es un* conjunto convexo *si es el vacio, si tiene un sólo punto o si para cada dos puntos distintos del conjunto el segmento que los une está contenido en el conjunto.*

Los conjuntos (a), (b) y (c) de la Figura A.4 son convexos. El conjunto (d) no es convexo.

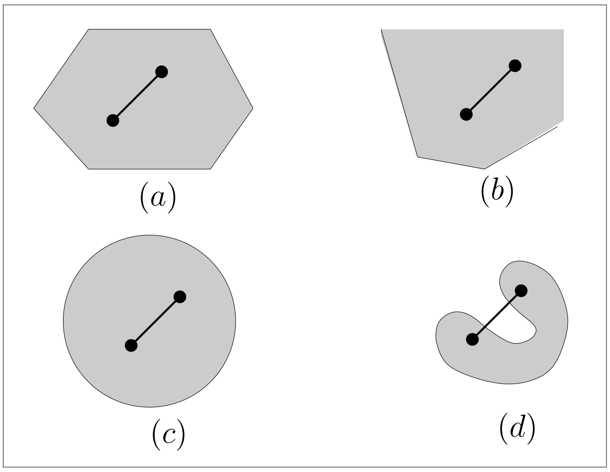

Figura A.4: Conjuntos convexos: (a), (b), (c). Conjunto no convexo: (d)

Se pueden demostrar los siguientes resultados:

- un hiperplano es un conjunto convexo.
- un semiespacio cerrado es un conjunto convexo.
- la intersección de un número finito de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Los conjuntos convexos en los que tenemos interés, porque aparecen en el estudio de modelos lineales, son los hiperplanos y los semiespacios cerrados, además de la intersección de un conjunto finito de ellos. La intersección de semiespacios cerrados es un conjunto del tipo (a), donde los vértices del conjunto se llaman *puntos extremos*.

A.5 Puntos extremos y soluciones factibles básicas

Un conjunto de inecuaciones lineales se puede transformar en un conjunto de ecuaciones sumando variables. Veamos con un ejemplo que, si las variables están restringidas a tomar valores mayores o iguales que cero, transformando un sistema de inecuaciones en un sistema de ecuaciones podemos encontrar una relación entre soluciones básicas del sistema de ecuaciones y los puntos extremos del conjunto de inecuaciones.

Consideramos el siguiente conjunto de inecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

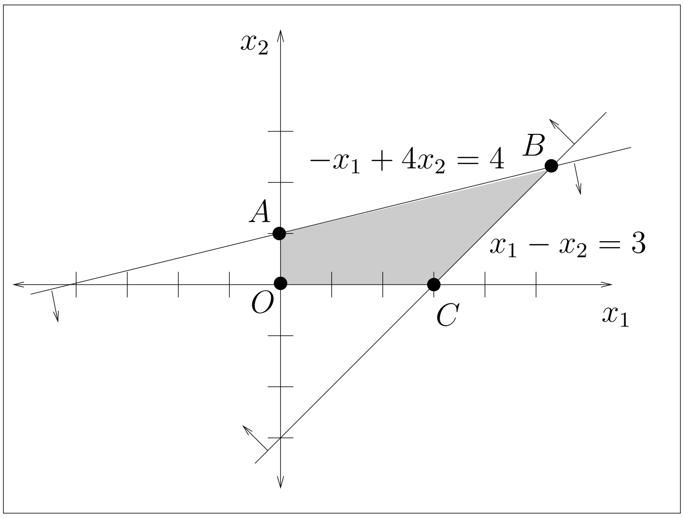

Figura A.5: Conjunto convexo y puntos extremos

La gráfica representa los puntos que verifican las dos inecuaciones para valores de las variables $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

Podemos ver que la intersección de los dos semiespacios, junto con las restricciones de que las variables sean no negativas, es un conjunto convexo cerrado, un polígono en este caso. El polígono tiene un número finito de vertices, que son los puntos extremos del conjunto.

El punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el origen de coordenadas.

El punto $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ intersección de $-x_1 + 4x_2 = 4$ y el eje de ordenadas.

El punto $B = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ intersección de $-x_1 + 4x_2 = 4$ y $x_1 - x_2 = 3$.

El punto $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ intersección de $x_1 - x_2 = 3$ y el eje de abcisas.

En general, igual que ocurre en el ejemplo, en el plano Euclideo la intersección de un número finito de semiespacios cerrados es un conjunto convexo, es decir, o es el vacio, o es un conjunto con un único punto o es un polígono con un número finito de puntos extremos. En el espacio Euclideo de dimensión 3 la intersección de un número finito de semiespacios cerrados también es un conjunto convexo, es decir, o es el vacio, o es un conjunto con un único punto o es un poliedro con un número finito de puntos extremos. En el espacio Euclideo de dimensión n la intersección de un número finito de semiespacios cerrados es un conjunto convexo llamado polítopo.

Podemos transformar las inecuaciones en ecuaciones sumando las variables no negativas x_3 y x_4 para obtener el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, concretamente el conjunto de puntos de la Figura A.5. Podemos calcular las soluciones básicas y seleccionar las que tienen las componentes mayores o iguales que cero para comprobar que se corresponden con los puntos extremos de la Figura A.5.

1. Seleccionamos las columnas primera y segunda de la matriz del sistema que son linealmente independientes y hacemos $x_3 = x_4 = 0$.

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   La solución del sistema es $x_1 = \frac{16}{3}$ y $x_2 = \frac{7}{3}$ que corresponde al punto extremo B de la gráfica.

2. Seleccionamos las columnas primera y tercera de la matriz del sistema que son linealmente independientes y hacemos $x_2 = x_4 = 0$.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 4 \\ x_1 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

   La solución del sistema es $x_1 = 3$ y $x_3 = 7$ que corresponde al punto extremo C de la gráfica.

3. Seleccionamos las columnas primera y cuarta de la matriz del sistema que son linealmente independientes y hacemos $x_2 = x_3 = 0$.

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad &= 4 \\ x_1 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

   La solución del sistema es $x_1 = -4$ y $x_4 = 7$ que no corresponde a ningún punto extremo porque tiene una componente negativa.

4. Seleccionamos las columnas segunda y tercera de la matriz del sistema que son linealmente independientes y hacemos $x_1 = x_4 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

   La solución del sistema es $x_2 = -3$ y $x_3 = 16$ que no corresponde a ningún punto extremo porque tiene una componente negativa.

5. Seleccionamos las columnas segunda y cuarta de la matriz del sistema que son linealmente independientes y hacemos $x_1 = x_3 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x_2 \qquad &= 4 \\ -x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

   La solución del sistema es $x_2 = 1$ y $x_4 = 4$ que corresponde al punto extremo A de la gráfica.

6. Seleccionamos las columnas tercera y cuarta de la matriz del sistema que son linealmente independientes y hacemos $x_1 = x_2 = 0$.

$$\begin{aligned} x_3 \qquad &= 4 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

   La solución del sistema es $x_3 = 4$ y $x_4 = 3$ que corresponde al punto extremo O de la gráfica. $\square$

El procedimiento utilizado en el ejemplo anterior para calcular los puntos extremos de un conjunto convexo, intersección de semiespacios cerrados y donde todas las incógnitas tienen que ser mayores o iguales que cero, se puede generalizar a espacios de dimensión mayor que dos. Así se pueden calcular los puntos extremos sin necesidad de representar los semiespacios.