Tema 1

Modelos lineales y solución gráfica

La programación lineal es una importante rama de la Investigación Operativa. Esta técnica matemática consiste en una serie de métodos que permiten obtener la mejor solución en problemas de optimización lineal con restricciones. Este tipo de problemas surgen en la práctica en diferentes contextos cuando se trata de asignar recursos limitados a actividades que los necesitan para ser realizadas. La importancia de esta técnica radica en la variedad de sistemas que se pueden representar utilizando un modelo lineal, así como su aplicación a otras áreas de la optimización. Algunos ejemplos son la asignación de recursos a necesidadas, planificación de la producción, organizar el transporte de un producto desde orígenes a destinos, problemas de mezclas, etc.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo *lineal* se refiere a que todas las funciones del modelo son lineales.

1.1 El modelo lineal

Un modelo lineal es el que trata de optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal sujeta a que las variables verifiquen un sistema de inecuaciones lineales

$$\text{opt } z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1.1}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\leq}{\geq} \mathbf{b} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1.3}$$

(1.1) es la función a optimizar y se llama *función objetivo*, (1.2) son las desigualdades que deben verificar las variables y se llaman *restricciones* y (1.3) son las *restricciones de no negatividad*.

Los elementos que aparecen en el modelo planteado son los siguientes:

- $\mathbf{x}$, vector de *variables de decisión*, con n componentes.
- $\mathbf{c}^T$, *vector de precios* o *vector de costes unitarios,* con n componentes.
- $\mathbf{b}$, *vector de recursos,* con m componentes.
- La matriz **A**, con m filas y n columnas se llama *matriz de coeficientes tecnológicos*. Cada elemento a_{ij} de la matriz **A** representa la cantidad de recurso $i,\ i = 1, \ldots, m$, que se necesita para realizar una unidad de actividad $j,\ j = 1, \ldots, n$.

En el modelo lineal, $\mathbf{c}^T$, $\mathbf{b}$ y **A** son parámetros conocidos; el vector $\mathbf{x}$ es el vector de variables cuyo valor hay que determinar con el objetivo de que los recursos del vector $\mathbf{b}$ sean asignados de forma óptima.

1.2 Formas de escribir el modelo

1. Teniendo en cuenta el tamaño de los vectores y de la matriz de coeficientes.

$$
\begin{array}{l}
\text{opt } z \ = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeto a} \\
\qquad \begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \begin{smallmatrix}\le\\=\\>\end{smallmatrix} & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \begin{smallmatrix}\le\\=\\>\end{smallmatrix} & b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \begin{smallmatrix}\le\\=\\>\end{smallmatrix} & b_m \\
x_1, x_2 \ldots x_n & \ge & 0
\end{array}
\end{array}
$$

2. Forma matricial.

$$\text{opt } z = (c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq (0, 0, \cdots, 0)^T$$

3. Si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son las columnas de la matriz $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \text{opt } z \ &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeto a} & \\ \mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n &\overset{\leq}{\underset{>}{=}} \mathbf{b} \\ x_j \geq 0 \ , \ j = 1, \ldots, n & \end{aligned}$$

1.3 Construcción de modelos

Cuando se quiere analizar un sistema real por medio de la programación lineal el primer paso es construir un modelo matemático que represente el problema. Este primer paso es el más difícil en el análisis y, es importante porque la solución que se obtiene para el sistema depende del modelo planteado. Para construir un modelo no existen reglas, por eso algunos ejemplos prácticos pueden ser de ayuda para desarrollar cierta habilidad.

Ejemplo 1. Problema de transporte.

Una empresa produce bicicletas en tres sucursales que tiene en las ciudades C_1, C_2 y C_3. La capacidad de producción mensual en cada una de las ciudades es 1000, 2100 y 1500, respectivamente. Tiene cuatro clientes, A, B, C y D, en distintos puntos que demandan mensualmente 800, 1100, 900 y 1300 bicicletas, respectivamente.

En la siguiente tabla se dan los costes unitarios de transporte de las bicicletas que varían en función de la distancia que se recorre desde la ciudad en la que se produce al punto de destino.

	Clientes			
Ciudades	A	B	C	D
C_1	10	8	10	13
C_2	19	6	15	16
C_3	14	8	9	6

Plantear un modelo que sirva para organizar el transporte a coste mínimo.

- Variables de decisión.

  x_{ij}: cantidad de bicicletas que se envían mensualmente desde la ciudad $C_i,\ i = 1, 2, 3$ al cliente $j,\ j = A, B, C, D$.

- Función objetivo: minimizar el coste de transporte.

$$\begin{aligned} \min\ z = {} & 10x_{1A} + 8x_{1B} + 10x_{1C} + 13x_{1D} + 19x_{2A} + 6x_{2B} + 15x_{2C} + \\ & +16x_{2D} + 14x_{3A} + 8x_{3B} + 9x_{3C} + 6x_{3D}. \end{aligned}$$

- Las restricciones son la oferta y la demanda.

  - Oferta de los centros de producción: la capacidad de producción.

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} &\leq 1000 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} &\leq 2100 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} &\leq 1500 \end{aligned}$$

– Es necesario satisfacer la demanda de los clientes.

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} &\geq 800 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} &\geq 1100 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} &\geq 900 \\ x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} &\geq 1300 \end{aligned}$$

– Las variables deben tomar valores no negativos.

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C, D.$$

Ejemplo 2. Problema de producción.

Una empresa de producción fabrica tres tipos de piezas, P_1, P_2 y P_3. En el proceso utiliza tres tipos de máquinas, A, B y C, cuyas horas de trabajo disponibles y el coste de producción se recogen en la siguiente tabla.

Máquina	Horas/semana	Coste de Producción euros/hora
A	1000	6
B	1000	4
C	1000	5

En la tabla se da el número necesario de horas en cada máquina para la producción de cada pieza.

	P_1	P_2	P_3
Máquina A	1	2	3
Máquina B	2	3	1
Máquina C	1	1	1

Para producir las piezas se necesitan dos tipos de materiales, M_1 y M_2 de los que se tiene 1000 kg y 1200 kg, respectivamente. La cantidad necesaria para cada pieza de cada uno de los materiales se da en la siguiente tabla:

	M_1(kg/pieza)	M_2(kg/pieza)
P_1	1	2
P_2	1	3
P_3	3	1

El coste de 1 kg de M_1 es 1.5 euros el de 1 kg de M_2 es 3 euros. Por otra parte, el precio de venta de cada pieza es 50, 56 y 70 euros, respectivamente. El objetivo de la empresa es organizar la producción para obtener el máximo beneficio.

- Variables de decisión.

  x_j: número de piezas $P_j,\ j = 1, 2, 3,$ que la empresa debe producir semanalmente.

- Función objetivo: maximizar el beneficio.

  Beneficio = Precio Venta$-$ Coste materiales $-$ Coste producción.

  - Precio de venta $= 50x_1 + 56x_2 + 70x_3$.
  - Coste de los materiales $= (1 \times 1.5 + 2 \times 3)x_1 + (1 \times 1.5 + 3 \times 3)x_2 + (3 \times 1.5 + 1 \times 3)x_3$.
  - Coste de Produccción $= (1 \times 6 + 2 \times 4 + 1 \times 5)x_1 + (2 \times 6 + 3 \times 4 + 1 \times 5)x_2 + (3 \times 6 + 1 \times 4 + 1 \times 5)x_3$.

  Haciendo los cálculos se tiene la siguiente función objetivo:

$$\max\ z = 23.5x_1 + 16.5x_2 + 35.5x_3.$$

- Las restricciones son el tiempo disponible de las máquinas y la cantidad de material.

$$\begin{array}{rrrll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 1000 & (\text{Máquina A}) \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 1000 & (\text{Máquina B}) \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1000 & (\text{Máquina C}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrll} x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 1000 & (\text{Material } M_1) \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 1200 & (\text{Material } M_2) \end{array}$$

- Restricciones de no negatividad: $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Ejemplo 3. Problema de mezclas.

En una refinería se producen gasolinas de tipos A y B mezclando y procesando 3 tipos de crudos. La siguiente tabla da la cantidad de barriles disponibles de cada crudo y el precio por barril.

Crudo	Cantidad de barriles	Precio por barril
1	2000	10
2	3000	8
3	1000	12

Para que las gasolinas A y B sean de una calidad aceptable, las mezclas deben tener la siguiente composición:

- La gasolina A debe contener al menos el 30% de crudo 1, al menos el 20% de crudo 2 y no más del 30% de crudo 3.
- La gasolina B debe contener al menos el 25% de cada uno de los crudos.

Los precios de venta de un barril de las gasolinas A y B son de 40 y 35 unidades monetarias respectivamente.

El objetivo es organizar la producción de gasolinas para obtener el máximo beneficio por las ventas.

- Variables de decisión.

  x_{ij} : cantidad de barriles de crudo $i,\ i = 1, 2, 3,$ en la gasolina de tipo $j,\ j = A, B.$

- Función objetivo (maximizar el beneficio) = Precio de venta $-$ Coste de producción.
  - Precio de venta $= 40(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 35(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}).$
  - Coste de producción $= 10(x_{1A}+x_{1B})+8(x_{2A}+x_{2B})+12(x_{3A}+x_{3B}).$

Haciendo cálculos, el objetivo es el siguiente:

$$\text{max } z = 30x_{1A} + 32x_{2A} + 28x_{3A} + 25x_{1B} + 27x_{2B} + 23x_{3B}.$$

- Las restricciones son las cantidades disponibles de crudos y la composición de las gasolinas.
  - Cantidades de crudo.

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{1B} &\leq 2000 \quad (\text{crudo } 1) \\ x_{2A} + x_{2B} &\leq 3000 \quad (\text{crudo } 2) \\ x_{3A} + x_{3B} &\leq 1000 \quad (\text{crudo } 3) \end{aligned}$$

  - Composición de las gasolinas.

$$\begin{aligned} x_{1A} &\geq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\ x_{2A} &\geq \frac{20}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\ x_{3A} &\leq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\ x_{1B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\ x_{2B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\ x_{3B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \end{aligned}$$

  - Restricciones de no negatividad.

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B.$$

Ejemplo 4. Problema de la dieta.

En un centro de nutrición se está preparando una dieta que contenga las vitaminas A, B, C y D en las siguientes cantidades: al menos 25 miligramos de vitamina A, entre 25 y 30 miligramos de vitamina B, al menos 22 miligramos de vitamina C y no mas de 17 miligramos de vitamina D.

Nutrientes	Vitaminas (mg/g) A	B	C	D	Coste (euros/g)
1	2	1	0	1	0.014
2	1	2	1	2	0.009
3	1	0	2	0	0.013
4	1	2	1	1	0.016

Las vitaminas se pueden obtener básicamente a través de cuatro nutrientes. La tabla muestra la cantidad de miligramos de cada vitamina que contiene cada gramo de nutriente y el coste de cada gramo de nutriente.

Un modelo lineal para encontrar una dieta de mínimo coste que garantice el aporte necesario de vitaminas se plantea de la siguiente manera.

- Variables de decisión.

  x_j: cantidad de gramos del nutriente $j,\ j = 1, 2, 3, 4$, que se debe incluir en la dieta.

- Función objetivo: minimizar el coste de la dieta.

$$\min\ z = 0.014x_1 + 0.009x_2 + 0.013x_3 + 0.016x_4.$$

- Restricciones: garantizar la cantidad necesaria de vitaminas.

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 25 \quad \text{(Vitamina } A\text{)}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \geq 25 \quad \text{(Vitamina } B\text{)}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leq 30 \quad \text{(Vitamina } B\text{)}$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 22 \quad \text{(Vitamina } C\text{)}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 17 \quad \text{(Vitamina } D\text{)}$$

- Restricciones de no negatividad: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Ejemplo 5. Problema del corte óptimo.

Una empresa produce rollos de papel de un ancho estándar de 5 metros y de 20 metros de longitud. Las demandas que recibe de sus clientes habituales son de diferentes anchos y de longitud 20 metros. Para satisfacer las demandas la empresa tiene que cortar los rollos estándar. Los pedidos para el próximo mes son los siguientes:

100 rollos de 3 metros de ancho,
100 rollos de 2 metros de ancho,
300 rollos de 1.5 metros de ancho,
150 rollos de 1 metro de ancho.

Para obtener las anchuras demandadas existen varios cortes posibles de los rollos estándar. En este problema lo que tenemos que calcular es el número de cortes de cada tipo. Para ello comenzamos construyendo la tabla de todos los posibles cortes de rollos de 5 metros de ancho.

Opción	Anchuras (m)				Papel
de corte	3	2	1.5	1	sobrante
1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	2	0
3	0	2	0	1	0
4	0	1	2	0	0
5	0	1	0	3	0
6	0	0	2	2	0
7	0	0	0	5	0

- Variables de decisión.

  x_j: número de rollos que se cortan con la opción $j,\ j = 1, \ldots, 7$.

- Función objetivo: minimizar el gasto de papel, es decir, minimizar el número total de rollos que se deben cortar.

$$\min\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7.$$

- Restricciones: satisfacer las demandas.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 100 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 &\geq 100 \\ 2x_4 + 2x_6 &\geq 300 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + 5x_7 &\geq 150 \end{aligned}$$

- Las variables deben de ser no negativas: $x_1, \ldots, x_7 \geq 0.$

El problema también se puede plantear definiendo otros posibles cortes aceptando que se desperdicie papel. En la siguiente tabla se recogen los cortes en los que se pierden hasta 0.5 m.

Opciones	Anchuras (m)				Papel
de corte	3	2	1.5	1	sobrante
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0.5
3	1	0	0	2	0
4	0	2	0	1	0
5	0	1	2	0	0
6	0	1	1	1	0.5
7	0	1	0	3	0
8	0	0	3	0	0.5
9	0	0	2	2	0
10	0	0	1	3	0.5
11	0	0	0	5	0

En este caso el número de cortes y, por lo tanto, el número de variables es 11. Con la misma definición para las variables, se tiene el siguiente modelo lineal para el problema.

$$\min \ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 100 \\ x_1 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 100 \\ x_2 + 2x_5 + x_6 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} &\geq 300 \\ 2x_3 + x_4 + x_6 + 3x_7 + 2x_9 + 3x_{10} + 5x_{11} &\geq 150 \\ x_1, \ldots, x_{11} &\geq 0 \end{aligned}$$

1.4 Solución gráfica

En general, y a pesar de que todos los problemas lineales no se pueden resolver gráficamente, todos tienen una interpretación geométrica. La solución gráfica de modelos lineales tiene interés porque se pueden observar gráficamente conceptos importantes de la programación lineal tales como mejora de una solución, tipos de solución, puntos extremos, etc.

El conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones se obtiene representando cada ecuación y determinando el semiespacio delimitado por cada inecuación. Así se obtiene el polígono de soluciones. La función objetivo es una familia de rectas paralelas, una para cada valor de z. El valor de z crece desplazando la recta sobre el conjunto de soluciones y alcanza el óptimo cuando se desplaza hasta la frontera del conjunto. Si el problema tiene solución acotada el valor óptimo de la función objetivo siempre se encuentra en un vértice del polígono.

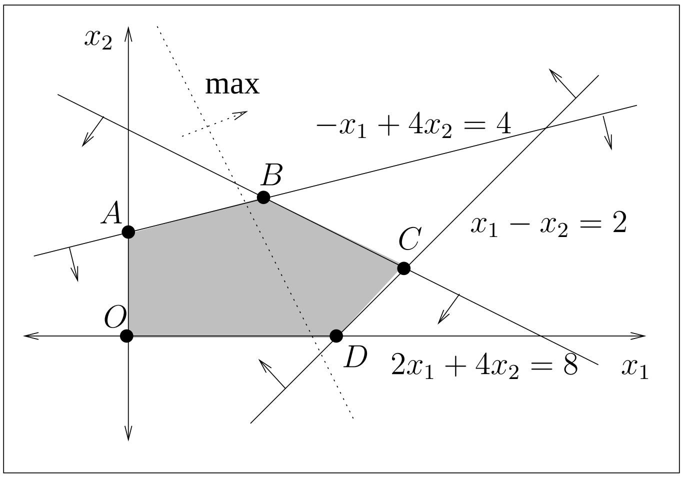
Problema con solución óptima única. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El objetivo es determinar los valores de x_1 y x_2 que, verificando las restricciones, maximicen el valor de la función $z = 6x_1 + 3x_2$.

Se puede representar la región que delimitan las restricciones en un sistema de coordenadas. Cada restricción del modelo es un semiespacio cerrado. Por ejemplo, para representar el semiespacio cerrado dado por la primera restricción, $2x_1 + 4x_2 \leq 8$, se representa gráficamente la recta $2x_1 + 4x_2 = 8$. Esta recta divide el plano en 2 semiespacios. Los puntos delimitados por la restricción son los de uno de los semiespacios más los puntos de la recta. Para identificar el semiespacio delimitado por cada restricción basta con tomar un punto de uno de los semiespacios y comprobar si cumple la restricción. En la representación gráfica se indica con flechas el semiespacio asociado a cada restricción.

Representando todas las restricciones, y teniendo en cuenta que las variables deben tomar valores no negativos, se obtiene el conjunto de soluciones del problema que aparece sombreado en la gráfica.



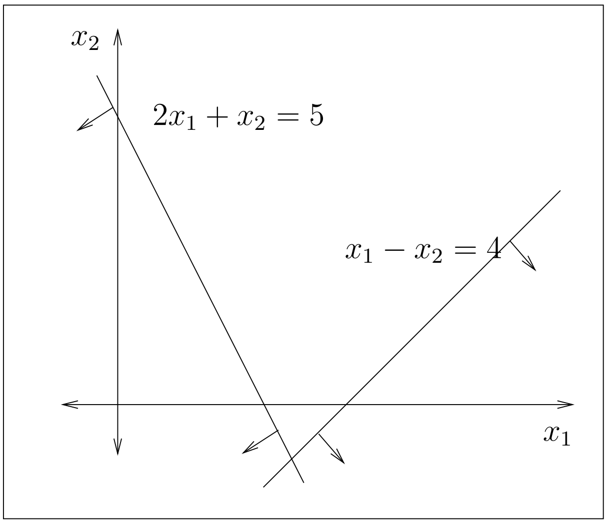
El polígono $OABCD$ es un conjunto convexo. Se pueden determinar los puntos extremos del conjunto resolviendo sistemas de ecuaciones. El punto O es el origen de coordenadas. El punto $A = (0, 1)$ es la intersección de la recta $-x_1 + 4x_2 = 4$ con el eje de ordenadas. El punto $D = (2, 0)$ es la intersección de la recta $x_1 - x_2 = 2$ con el eje de abcisas. El punto $B = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ es la intersección de las rectas $-x_1 + 4x_2 = 4$ y $2x_1 + 4x_2 = 8$. El punto $C = (\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ es la intersección de las rectas $x_1 - x_2 = 2$ y $2x_1 + 4x_2 = 8$.

El valor de z aumenta desplazando la función objetivo a través de la región de soluciones, alejándola del origen de coordenadas hasta llegar a la frontera del conjunto. Así se puede comprobar que el óptimo se encuentra en el punto C y el valor de la función objetivo es $z^* = 18$.

Problema infactible. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 - x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

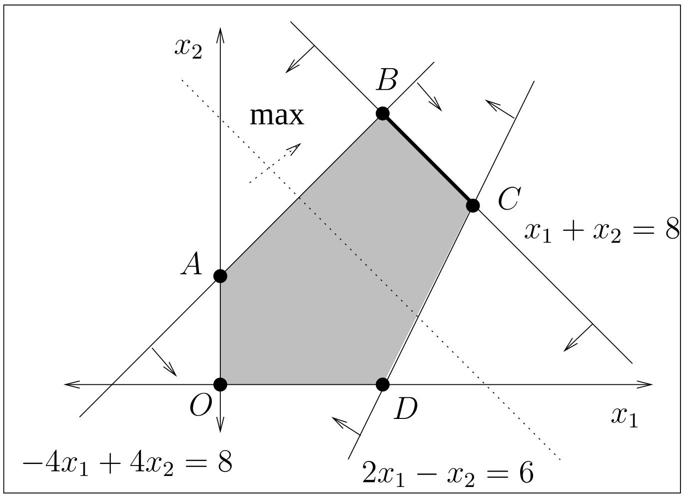
Representando todas las restricciones del problema podemos comprobar, como se ve en la gráfica, que no hay ningún punto que verifique todas las restricciones. Por tanto, el problema no tiene solución.



Problema con soluciones óptimas múltiples. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para calcular el conjunto de soluciones del problema se procede como en el ejemplo anterior. En este caso el conjunto de soluciones es el polígono $OABCD$ que aparece sombreado en la gráfica. El punto B es la intersección de las rectas $x_1+x_2 = 8$ y $-4x_1+4x_2 = 8$, es decir, $B = (3,\ 5)$. El punto C es la intersección de las rectas $x_1 + x_2 = 8$ y $2x_1 - x_2 = 6$, es decir, $C = (\frac{14}{3},\ \frac{10}{3})$.

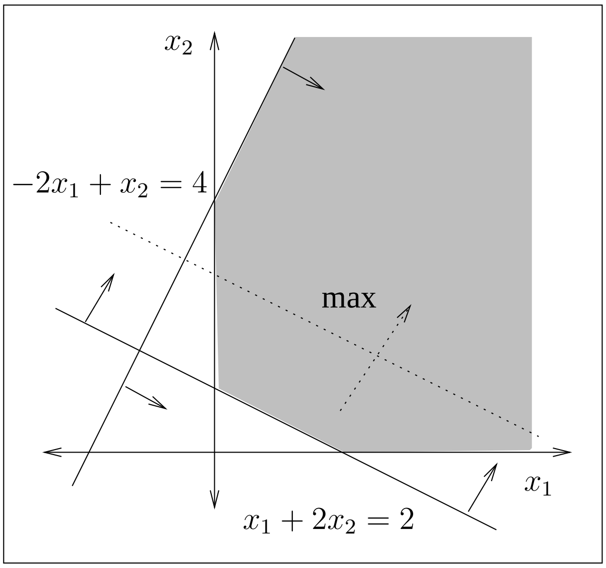


La función objetivo crece si se desplaza la recta alejandola del origen de coordenadas hasta la frontera del conjunto de soluciones. Las soluciones óptimas son los puntos extremos B, C y los puntos del segmento BC. El valor óptimo de la función objetivo es $z^* = 8$.

Región no acotada. Solución no acotada. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

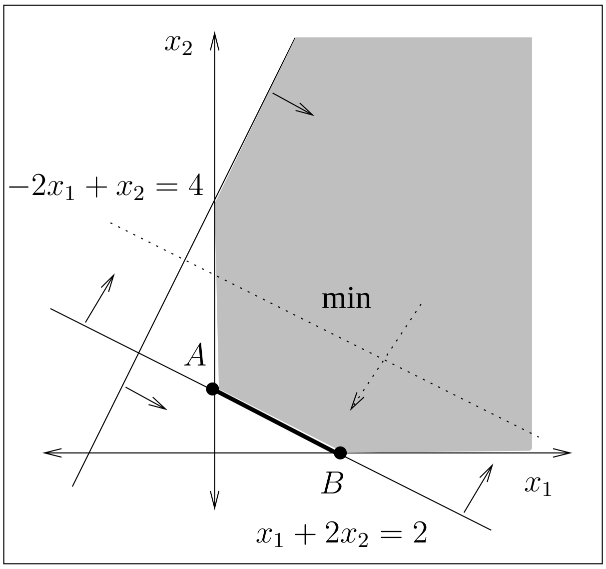
Como se ve en la gráfica el conjunto de soluciones es no acotado y, la función objetivo se puede desplazar indefinidamente alejándola del origen de coordenadas. Por tanto, el valor óptimo de z crece hasta infinito. Se dice que la solución óptima es no acotada.



Región no acotada. Solución acotada. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \min\ z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En este ejemplo el conjunto de soluciones es no acotado, pero se puede encontrar el óptimo acotado desplazando la función objetivo acercándola al origen de coordenadas hasta la frontera de la región. Así podemos comprobar que el óptimo se encuentra en los puntos $A = (0,\ 1),\ B = (2,\ 0)$ y en todos los puntos del segmento y $z^* = 2$.



En los ejemplos hemos visto todos los tipos de soluciones que se pueden encontrar al resolver un modelo lineal. Se trata de poder identificar las condiciones asociadas a cada tipo de solución. Esto se hace en al Tema 2 en el que se da el algoritmo simplex para resolver problemas lineales.

Las definiciones y propiedades de semiespacio, conjunto convexo, etc. se dan con más detalle en el Apendice A dedicado al álgebra lineal y conjuntos convexos. En el Tema 2 probaremos que la solución óptima de un modelo lineal se encuentra en un punto extremo del conjunto convexo de soluciones.