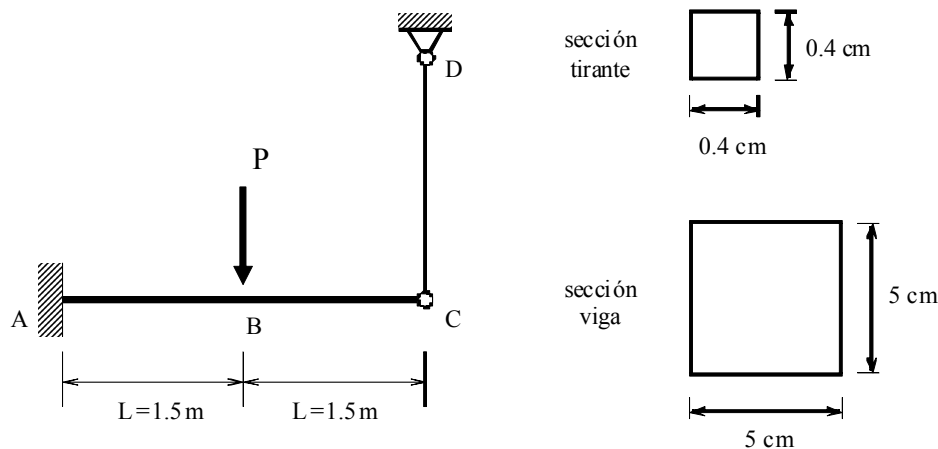


TEMA 6: PROBLEMAS RESUELTOS DE CÁLCULO PLÁSTICO

- 6.1. Una viga de sección cuadrada está perfectamente empotrada en su extremo izquierdo y articulada a un tirante en el derecho, tal como se indica en la figura. Este tirante está articulado también en su extremo superior. Las dimensiones de viga y tirante son las indicadas en la misma figura. Ambos están hechos de un mismo material, elastoplástico perfecto, de 240 MPa de tensión de fluencia.

Determinar la carga P que puede soportar el conjunto con un coeficiente de seguridad de 1,6 frente al agotamiento plástico.



Puesto que la estructura es hiperestática de primer grado el colapso se producirá cuando dos secciones plastifiquen totalmente, y teniendo en cuenta que de los dos elementos estructurales que componen la estructura uno trabaja a flexión y otro a tracción, el fallo se podrá producir por formación de dos rótulas plásticas en la viga, o por formación de una rótula en la viga y fallo por agotamiento plástico del tirante.

El momento necesario para la formación de una rótula en la viga es:

$$M_p = \sigma_f \cdot \frac{b \cdot h^2}{4} = 240 \cdot 10^6 \cdot \frac{5 \cdot 5^2 \cdot 10^{-6}}{4} = 7500 N \cdot m$$

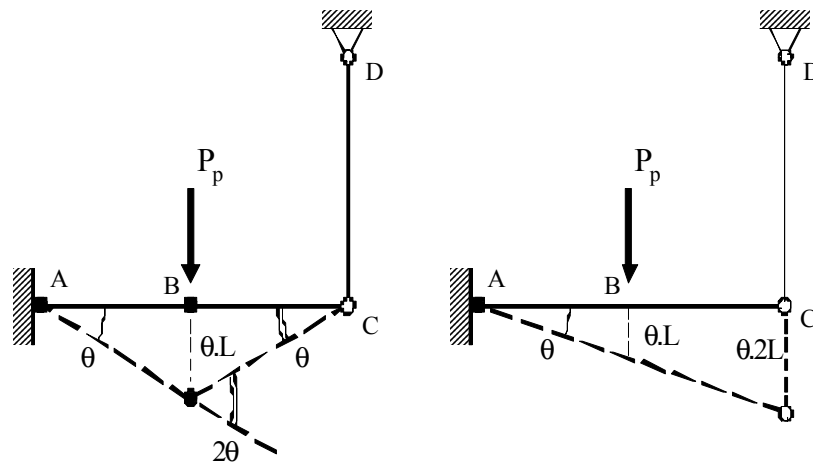
Y el esfuerzo de tracción que produce el agotamiento plástico del tirante:

$$T_p = \sigma_f \cdot A = 240 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-4} = 3840 N$$

Hay dos posible mecanismos de colapso: *mecanismo 1*, con formación de rótulas plásticas en las secciones A y B (figura a), y *mecanismo 2*, con formación de una rótula plástica en A y fallo del tirante (figura b). Podría pensarse en una tercera combinación posible: rótula en B y agotamiento del tirante. Sin embargo, de puras condiciones de equilibrio estático se deduce que en este caso debiera cumplirse:

$$T_p \cdot 1,5 = M_p$$

y fácilmente puede comprobarse que esto no es cierto, luego ese mecanismo es imposible. Se comprende que no sea un mecanismo real de colapso pues aún cuando se pudiera producir simultáneamente el agotamiento plástico en esas dos secciones (que hemos visto es imposible), el tramo de viga AB permanecería en condiciones de resistir incrementos adicionales de carga.



A continuación se determinará la carga de colapso para cada uno de los mecanismos posibles mediante aplicación del principio de los trabajos virtuales. La carga real será la más pequeña de las dos, y corresponderá al mecanismo real de colapso.

Mecanismo 1 (figura a):

$$P_p \cdot \theta \cdot L = M_p \cdot \theta + M_p \cdot 2\theta \quad \Rightarrow \quad P_p = \frac{3 \cdot M_p}{L} = \frac{3 \cdot 7500}{1,5} = 15000 \text{ N}$$

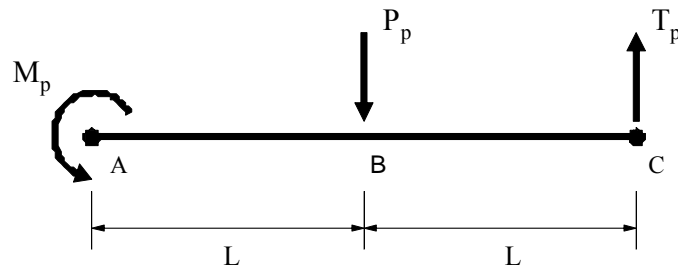
Mecanismo 2 (figura b):

$$P_p \cdot \theta \cdot L - T_p \cdot \theta \cdot 2L = M_p \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad P_p = \frac{M_p}{L} + 2 \cdot T_p = \frac{7500}{1,5} + 2 \cdot 3840 = 12680 \text{ N}$$

Luego ésta es la carga real de colapso.

Se podría haber llegado a la misma solución aplicando el *método del equilibrio*. En primer lugar se vería que el *mecanismo 1* no es un mecanismo de fallo posible, ya que al considerar el equilibrio del tramo de viga BC en el instante del colapso (figura a), se obtendría para el esfuerzo en el tirante un valor imposible. En efecto:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow T = \frac{M_p}{L} = \frac{7500}{1,5} = 5000 \text{ N} > T_p$$



Y al plantear el equilibrio en el instante en que se forma el mecanismo 2, de la figura (6.28):

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_p = P_p \cdot L - T_p \cdot 2L \Rightarrow P_p = \frac{M_p}{L} + 2 \cdot T_p$$

valor que, evidentemente, coincide con el obtenido anteriormente.

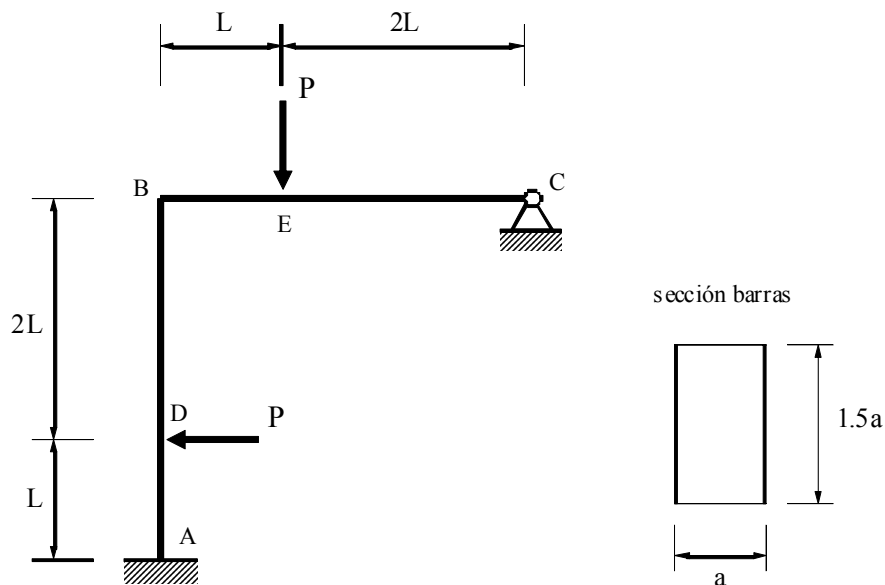
Teniendo en cuenta el factor de carga, el valor de la carga admisible será:

$$P_{adm} = \frac{P_p}{n} = \frac{12680}{1,6} = 7925 \text{ N}$$

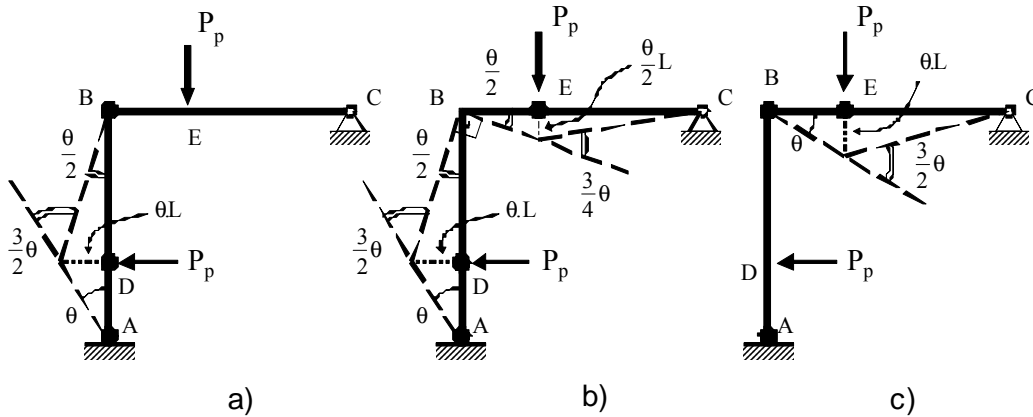
- 6.2.** La estructura de la figura está empotrada en A y apoyada en C. Las barras AB y BC son de la misma sección recta. Se aplican dos cargas P iguales sobre las secciones D y E, tal como se indica. Se pide:

1º) Valor de la carga P (expresado en función del momento plástico de la sección M_p y de la longitud L), que produce el agotamiento plástico de la estructura. Indicar cuál es el mecanismo de colapso correspondiente.

2º) Para el caso en que $L = 40 \text{ cm}$, el material de las barras sea un acero de tensión de fluencia $\sigma_f = 240 \text{ MPa}$ y supuesta una sección rectangular para ambas barras de proporciones las indicadas en la figura ($a \times 1,5a$) con el lado mayor paralelo al plano del dibujo, determinar la dimensión a para que la estructura trabaje con un factor de seguridad $n = 2$ respecto al agotamiento plástico, con una carga $P = 53 \text{ KN}$.



Al ser la estructura hiperestática de segundo grado serán necesarias tres rótulas plásticas para formar el mecanismo de colapso. Dado que las cargas son concentradas y por tanto el diagrama de momentos flectores lineal, hay cuatro secciones en las que el momento flector puede presentar valores máximos: son las secciones A, D, B y E. En teoría, por consiguiente, son posibles tres mecanismos de colapso. Como en el ejemplo anterior, determinaremos el mecanismo real y su carga de colapso correspondiente, comparando las obtenidas para cada uno de los mecanismos posibles aplicando el principio de los trabajos virtuales.



Mecanismo 1, con rótulas en las secciones A, D y B (figura a):

$$P_p \cdot \theta \cdot L = M_p \cdot \theta + M_p \cdot \frac{3\theta}{2} + M_p \cdot \frac{\theta}{2} \Rightarrow P_p = \frac{3 \cdot M_p}{L}$$

Mecanismo 2, con rótulas en las secciones A, D y E (figura b):

$$P_p \cdot \left(\theta \cdot L + \frac{\theta}{2} \cdot L \right) = M_p \cdot \left(\theta + \frac{3\theta}{2} + \frac{3\theta}{4} \right) \Rightarrow P_p = \frac{13 \cdot M_p}{6 \cdot L}$$

Mecanismo 3, con rótulas en las secciones A, B y E (figura c):

Como B no se puede desplazar horizontalmente (supondría una variación de longitud de la viga horizontal), este mecanismo es de ruina parcial. Puede calcularse la carga que produce el agotamiento de la viga horizontal BEC:

$$P_p \cdot \theta \cdot L = M_p \cdot \left(\theta + \frac{3\theta}{2} \right) \Rightarrow P_p = \frac{5 \cdot M_p}{2 \cdot L}$$

Mecanismo 4, con rótulas en las secciones D, B y E:

Al no girar en A y no poder desplazarse B horizontalmente, resulta la misma carga de agotamiento del caso anterior.

Luego puede concluirse que el mecanismo real de colapso es el mecanismo 2, y la carga última correspondiente:

$$P_p = \frac{13 \cdot M_p}{6 \cdot L}$$

Particularizando para los valores datos del problema:

$$P_p = P \cdot n = 53 \cdot 10^3 \cdot 2 = 106000 \text{ N}$$

$$M_p = \sigma_f \cdot \frac{b \cdot h^2}{4} = 240 \cdot 10^6 \cdot \frac{a \cdot (1,5a)^2}{4} = 135 \cdot 10^6 \cdot a^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

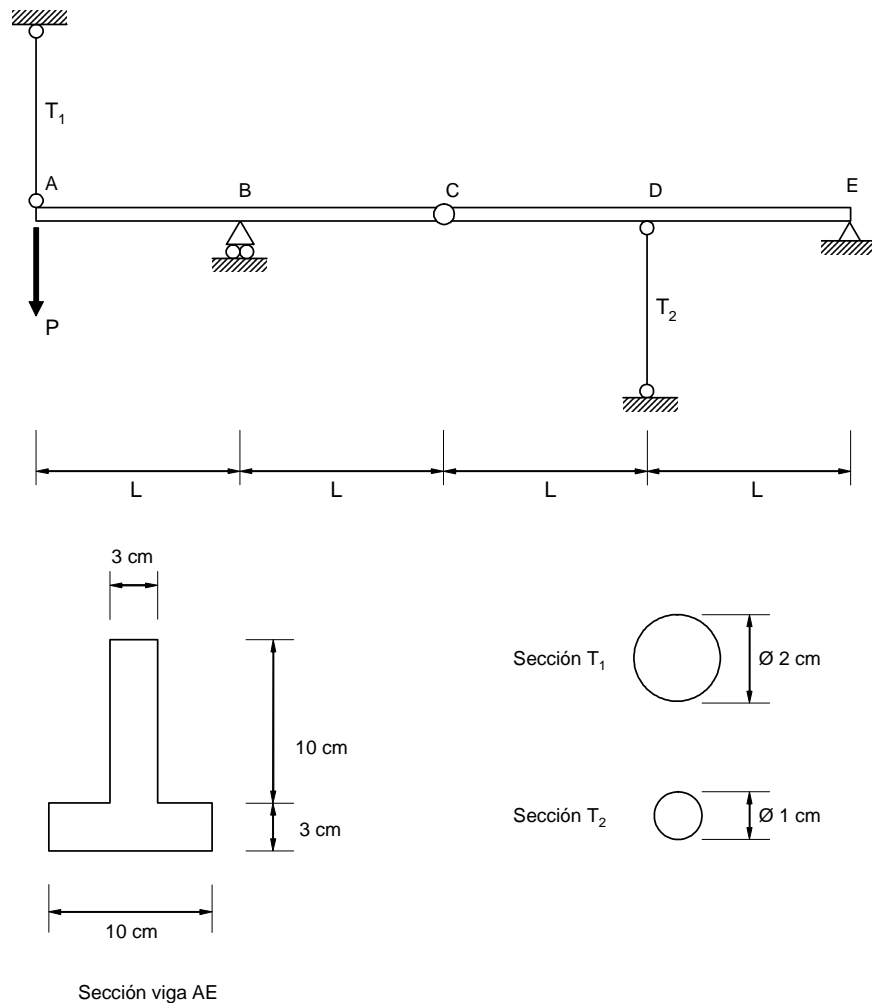
Por consiguiente:

$$106000 = \frac{13 \cdot 135 \cdot 10^6 \cdot a^3}{6 \cdot 0,4} \Rightarrow a = 5,25 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5,25 \text{ cm}$$

- 6.3. La estructura de la figura está formada por la viga AE, que tiene una rótula en la sección C, y a la que se articulan los tirantes T1 y T2 en A y D, respectivamente. El material de la viga y los tirantes tiene una tensión de fluencia $\sigma_f = 260 \text{ MPa}$ y es elasto-plástico perfecto.

Determinar, por el método de cálculo plástico, el valor de la carga P que produce el colapso de la estructura. Indicar qué secciones y/o elementos se agotan en la situación de colapso.

Dato: $L = 2 \text{ m}$



La estructura es hiperestática de grado 1. En consecuencia, el colapso se producirá cuando dos secciones plastifiquen totalmente. Las secciones que pueden llegar a una plastificación total son B y D (trabajando a flexión) y los tirantes T_1 y T_2 (trabajando a esfuerzo axial simple).

El momento plástico de la sección de la viga AE se calcula de acuerdo a la expresión:

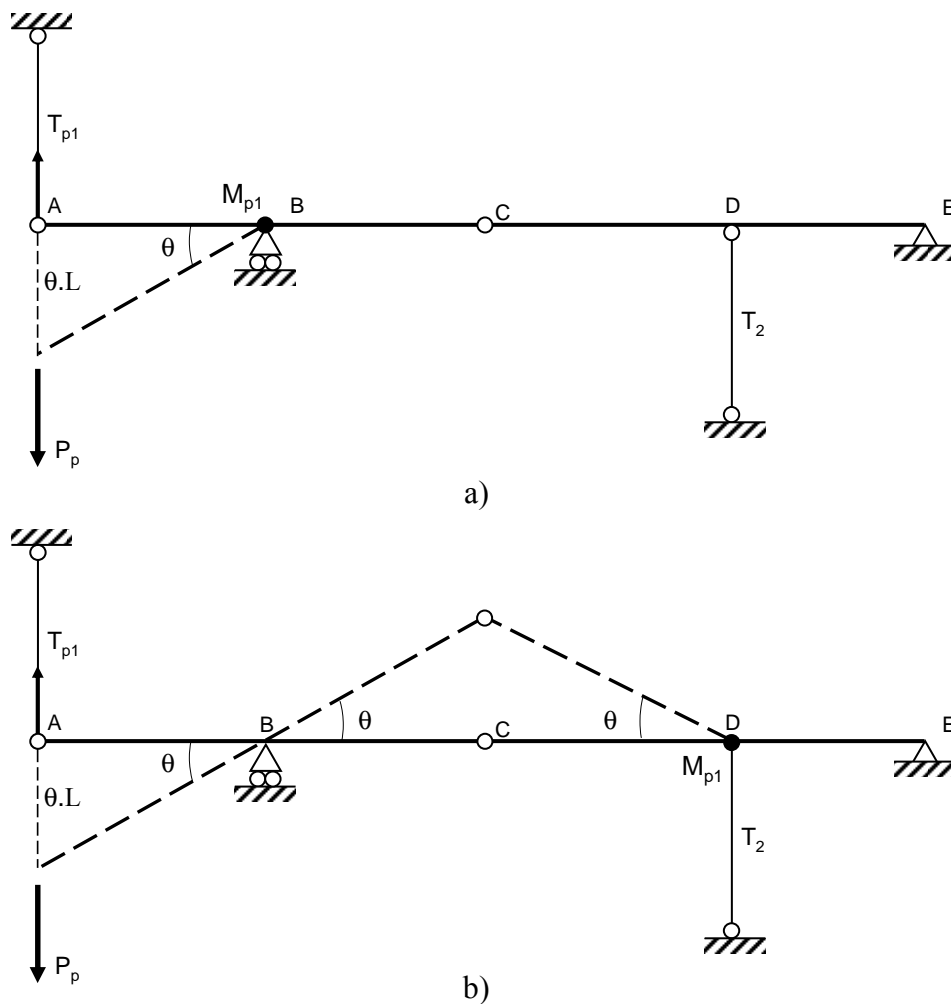
$$M_p = \sigma_f \cdot \frac{A}{2} \cdot (y_1 + y_2) = \frac{260 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot (5 + 1,5) \cdot 10^{-2} = 50700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

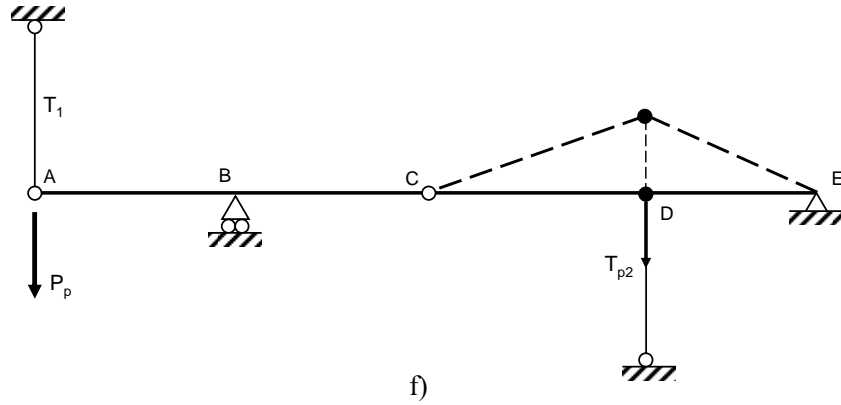
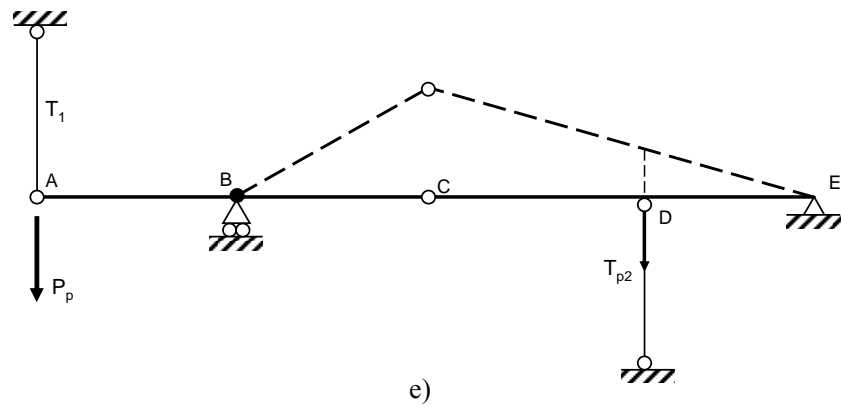
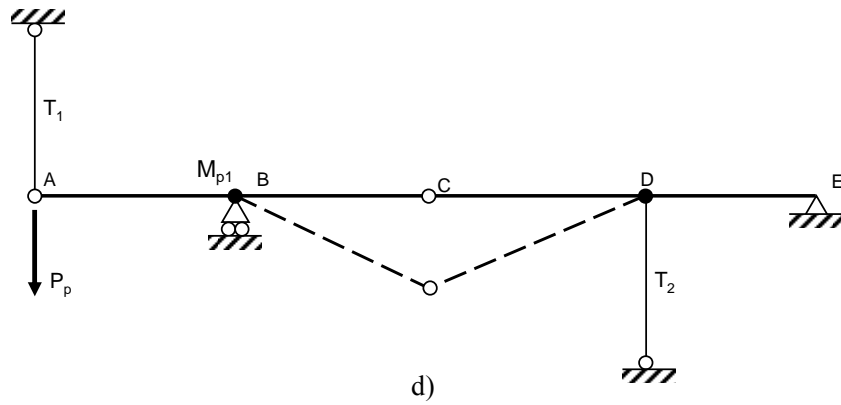
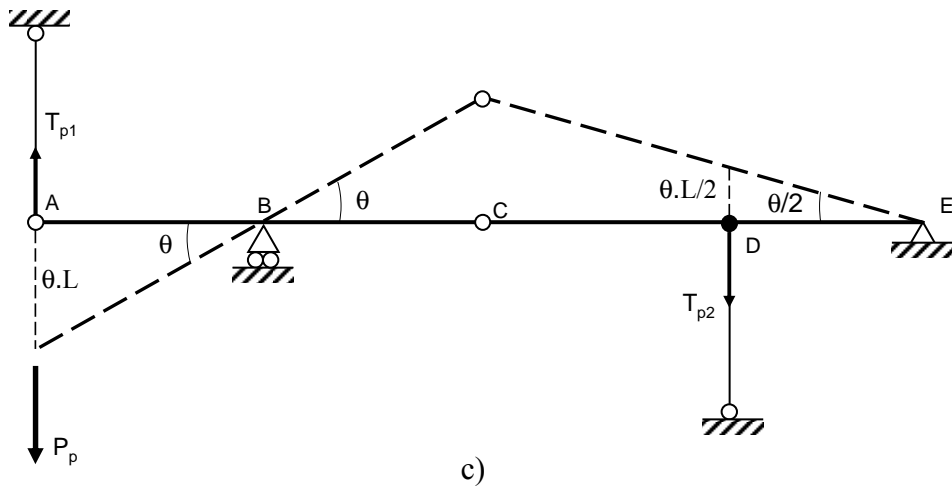
Y el esfuerzo de tracción que produce el agotamiento de cada uno de los 2 tirantes:

$$T_{p1} = \sigma_f \cdot A_{T1} = 260 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot (0,02)^2}{4} = 81681 \text{ N}$$

$$T_{p2} = \sigma_f \cdot A_{T2} = 260 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot (0,01)^2}{4} = 20420 \text{ N}$$

Los distintos mecanismos que resultan como resultado de la plastificación de 2 secciones de la estructura se muestran en la figura 6.32.





A continuación se determinará la carga de colapso para cada uno de los mecanismos posibles mediante aplicación del principio de los trabajos virtuales. La carga real será la que resulte menor.

Mecanismo 1, plastificación de B y T₁ (figura a):

$$P_p \cdot \theta \cdot L = T_{p1} \cdot \theta \cdot L + M_p \cdot \theta \Rightarrow P_p = T_{p1} + \frac{M_p}{L} = 107,03 \text{ kN}$$

Mecanismo 2, plastificación de D y T₁ (figura b):

$$P_p \cdot \theta \cdot L = T_{p1} \cdot \theta \cdot L + M_p \cdot \theta \Rightarrow P_p = T_{p1} + \frac{M_p}{L} = 107,03 \text{ kN}$$

Mecanismo 3, plastificación de T₁ y T₂ (figura c):

$$P_p \cdot \theta \cdot L = T_{p1} \cdot \theta \cdot L + T_{p2} \cdot \frac{\theta}{2} \cdot L \Rightarrow P_p = T_{p1} + \frac{T_{p2}}{2} = 91,89 \text{ kN}$$

Mecanismo 4, plastificación de B y D (figura d):

$$W_{ext} = 0 \Rightarrow \text{Mecanismo no válido}$$

Mecanismo 5, plastificación de B y T₂ (figura e):

$$W_{ext} = 0 \Rightarrow \text{Mecanismo no válido}$$

Mecanismo 6, plastificación de D y T₂ (figura f):

$$W_{ext} = 0 \Rightarrow \text{Mecanismo no válido}$$

Por tanto la carga que produce el colapso de la estructura es $P_p = 91,89 \text{ kN}$, debido a la plastificación de los dos tirantes T_1 y T_2 .