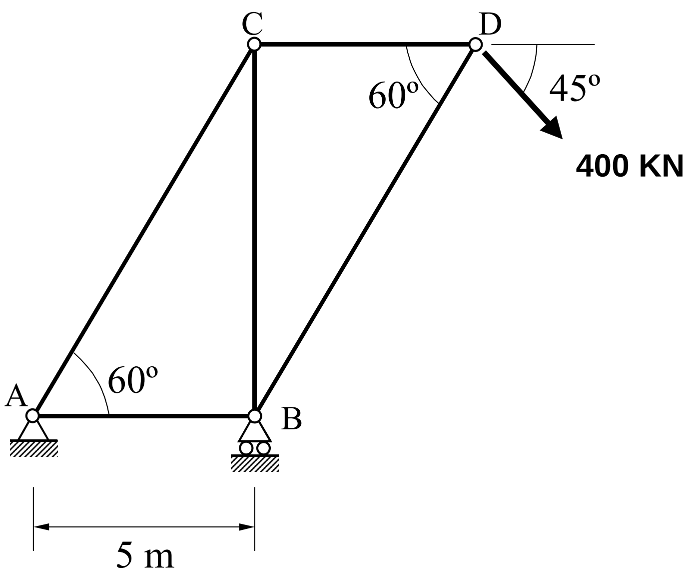
TEMA 5: PROBLEMAS RESUELTOS DEL MÉTODO MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

5.1. *Para la estructura de la figura calcular:*

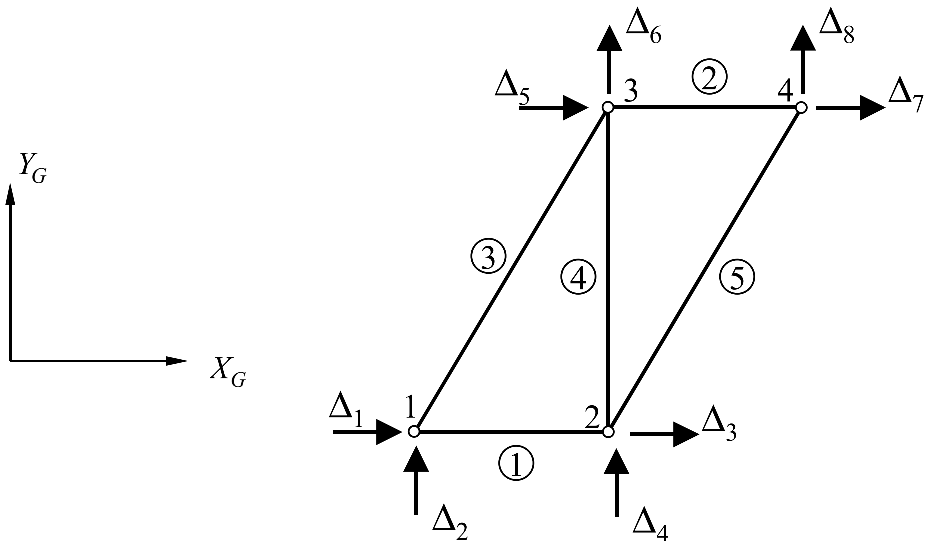
1) *Los desplazamientos en los nudos B, C y D.*
2) *Las reacciones en los apoyos.*
3) *Los esfuerzos en las barras.*

Todas las barras son del mismo material de módulo de elasticidad E = 200 GPa. La sección de las barras AB y CD es de 10^4 mm^2 y la de las restantes 1,5 x 10^4 mm^2.



Se numeran las barras y los nudos tal como se indica en la figura, en la que se indican, así mismo, los grados de libertad de la estructura, formando el vector:

$$\{\Delta\}^T = \{\Delta_1 \; \Delta_2 \; \Delta_3 \; \Delta_4 \; \Delta_5 \; \Delta_6 \; \Delta_7 \; \Delta_8 \}$$



1. <u>Formación de las matrices de rigidez elementales</u>

Todos los elementos son barras biarticuladas en los extremos, cuya matriz de rigidez viene dada por la expresión deducida para ellas. Las matrices de rigidez elementales, expresadas en el sistema general de coordenadas, son:

<u>Elemento 1</u>:

Nudo inicial: 1 Nudo final: 2 Ángulo: 0º Longitud: 5m

Área: 10^4 mm^2 cos α = 1 sen $\alpha = 0$

$$\frac{EA}{L} = \frac{200 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3} = 400\,KN/mm$$

$$\left[K_G^{\,1}\right] = 400 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{array}$$

<u>Elemento 2</u>:

Nudo inicial: 3 Nudo final: 4 Ángulo: 0º Longitud: 5m

Área: 10^4 mm^2 cos α = 1 sen $\alpha = 0$

$$\frac{EA}{L} = \frac{200 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3} = 400\,KN/mm$$

$$\left[K_G{}^2\right] = 400 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Delta_5 & \Delta_6 & \Delta_7 & \Delta_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{array}$$

<u>Elemento 3</u>:

Nudo inicial: 1 Nudo final: 3 Ángulo: 60º Longitud: 10m

Área: 1.5x10^4 mm^2 $\cos\alpha = 0.5$ $\operatorname{sen}\alpha = 0.866$

$$\frac{EA}{L} = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 10^4}{10 \cdot 10^3} = 300\,KN/mm$$

$$\left[K_G{}^3\right] = 300 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_5 & \Delta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 & -025 & -0.433 \\ 0.433 & 0.75 & -0.433 & -0.75 \\ -0.25 & -0.433 & 0.25 & 0.433 \\ -0.433 & -0.75 & 0.433 & 0.75 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{array}$$

<u>Elemento 4</u>:

Nudo inicial: 2 Nudo final: 3 Ángulo: 90º Longitud: $5\sqrt{3}$ m

Área: 1.5x10^4 mm^2 cos α = 0 sen α = 1

$$\frac{EA}{L} = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 10^4}{5\sqrt{3} \cdot 10^3} = 346{,}41\,KN/mm$$

$$\left[K_G{}^4\right] = 346{,}41 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{array}$$

<u>Elemento 5</u>:

Nudo inicial: 2 Nudo final: 4 Ángulo: 60º Longitud: 10m

Área: 1.5x10^4 mm^2 $\cos\alpha = 0.5$ $\operatorname{sen}\alpha = 0.866$

$$\frac{EA}{L} = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 10^4}{10 \cdot 10^3} = 300\,KN/mm$$

$$
\begin{array}{c}
\\ \left[K_G{}^5\right] = 300 \cdot
\end{array}
\begin{array}{cccc}
\Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_7 & \Delta_8 \\
\end{array}
$$

$$
\left[K_G{}^5\right] = 300 \cdot \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0,25 & 0,433 & -0,25 & -0,433 \\ 0,433 & 0,75 & -0,433 & -0,75 \\ -0,25 & -0,433 & 0,25 & 0,433 \\ -0,433 & -0,75 & 0,433 & 0,75 \end{array}\right] \end{array}
\begin{array}{c} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{array}
$$

2. Matriz de rigidez de la estructura

La matriz de rigidez de la estructura se obtendrá ensamblando las distintas matrices de rigidez elementales.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 & \Delta_7 & \Delta_8
\end{array}
$$

$$
[K] = 100 \cdot \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
4.750 & 1.299 & -4.000 & 0 & -0.750 & -1.299 & 0 & 0 \\
1.299 & 2.250 & 0 & 0 & -1.299 & -2.250 & 0 & 0 \\
\hdashline
-4.000 & 0 & 4.750 & 1.299 & 0 & 0 & -0.750 & -1.299 \\
0 & 0 & 1.299 & 5.714 & 0 & -3.464 & -1.299 & -2.250 \\
\hdashline
-0.750 & -1.299 & 0 & 0 & 4.750 & 1.299 & -4.000 & 0 \\
-1.299 & -2.250 & 0 & -3.464 & 1.299 & 5.714 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & -0.750 & -1.299 & -4.000 & 0 & 4.750 & 1.299 \\
0 & 0 & -1.299 & -2.250 & 0 & 0 & 1.299 & 2.250
\end{array}\right]
\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{array}
$$

Para obtener la ecuación de equilibrio de la estructura, resta formular los vectores de fuerzas nodales y de desplazamientos, los cuales se pueden obtener directamente a partir de las fuerzas exteriores y teniendo en cuenta las condiciones de ligadura. Son respectivamente:

$$
\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \\ 0 \\ 0 \\ 282.84 \\ -282.84 \end{Bmatrix} \qquad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_3 \\ 0 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix}
$$

Y la ecuación de equilibrio:

$$
\{F\} = [K]\{\Delta\}
$$

3. Cálculo de los desplazamientos desconocidos

Agrupando filas y columnas según grados de libertad libres (3,5,6,7,8) y fijos (1,2,4), para formular la ecuación de equilibrio se puede reescribir ésta cómo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 282.84 \\ -282.84 \\ \hline F_1 \\ F_2 \\ F_4 \end{Bmatrix} = 100 \cdot \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 4.750 & 0 & 0 & -0.750 & -1.299 & -4 & 0 & 1.299 \\ 0 & 4.750 & 1.299 & -4.000 & 0 & -0.750 & -1.299 & 0 \\ 0 & 1.299 & 5.714 & 0 & 0 & -1.299 & -2.250 & -3.464 \\ -0.750 & -4.000 & 0 & 4.750 & 1.299 & 0 & 0 & -1.299 \\ -1.299 & 0 & 0 & 1.299 & 2.250 & 0 & 0 & -2.25 \\ \hline -4.000 & -0.750 & -1.299 & 0 & 0 & 4.750 & 1.299 & 0 \\ 0 & -1.299 & -2.25 & 0 & 0 & 1.299 & 2.250 & 0 \\ 1.299 & 0 & -3.464 & -1.299 & -2.250 & 0 & 0 & 5.714 \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con lo que, de la primera parte de la ecuación se pueden obtener los desplazamientos no nulos. Es decir:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 282.84 \\ -282.84 \end{Bmatrix} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 4.750 & 0 & 0 & -0.750 & -1.299 \\ 0 & 4.750 & 1.299 & -4.000 & 0 \\ 0 & 1.299 & 5.714 & 0 & 0 \\ -0.750 & -4.000 & 0 & 4.750 & 1.299 \\ -1.299 & 0 & 0 & 1.299 & 2.250 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix}$$

que, una vez resuelta, proporciona los siguientes valores para los desplazamientos desconocidos:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.407 \\ 9.809 \\ -2.232 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix} \text{mm.}$$

4. Cálculo de las reacciones en los apoyos

Una vez obtenidos los desplazamientos, las reacciones en los apoyos se obtienen aplicando la parte inferior de la ecuación de equilibrio, es decir:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \end{Bmatrix} = 100 \cdot \begin{bmatrix} -4.000 & -0.750 & -1.299 & 0 & 0 \\ 0 & -1.299 & -2.250 & 0 & 0 \\ 1.299 & 0 & -3.464 & -1.299 & -2.250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.407 \\ 9.809 \\ -2.232 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -282.9 \\ -772.0 \\ 1056.2 \end{Bmatrix} \text{KN}$$

5. Cálculo de los esfuerzos en las barras:

Elemento 1: Los desplazamientos de los extremos de este elemento, en coordenadas generales son:

$$\{\Delta^1\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.407 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

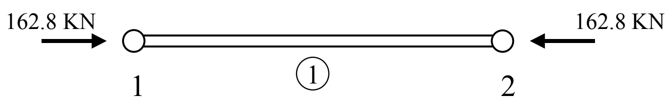
Y en coordenadas locales:

$$\{\delta^1\} = [T_2]\{\Delta^1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.407 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.407 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como es lógico, los desplazamientos son los mismos ya que para este elemento ambos sistemas de coordenadas coinciden. Los esfuerzos en los extremos, calculados en el sistema local, serán:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = 400 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.407 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 162.8 \\ 0 \\ -162.8 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{KN}$$

que se corresponde con un esfuerzo axial de compresión de 162.8 KN, tal como se muestra en la figura.



Mediante un procedimiento similar se pueden calcular los esfuerzos en las demás barras.

Elemento 2:

$$\{\Delta^2\} = \begin{Bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.809 \\ -2.232 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta^2\} = [T_2]\{\Delta^2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9.809 \\ -2.232 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.809 \\ -2.232 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = 400 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9.809 \\ -2.232 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -446.8 \\ 0 \\ 446.8 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{KN}$$

que corresponde a un esfuerzo axial de tracción de 446.8 KN.

Elemento 3:

$$\{\Delta^3\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.809 \\ -2.232 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta^3\} = [T_2]\{\Delta^3\} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.809 \\ -2.232 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.972 \\ -9.61 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = 300 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.972 \\ -9.61 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -891.6 \\ 0 \\ 891.6 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{KN}$$

que corresponde a un esfuerzo axial de tracción de 891.6 KN.

Elemento 4:

$$\{\Delta^4\} = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.407 \\ 0 \\ 9.809 \\ -2.232 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta^4\} = [T_2]\{\Delta^4\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.407 \\ 0 \\ 9.809 \\ -2.232 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.407 \\ -2.232 \\ -9.809 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = 346.41 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.407 \\ -2.232 \\ -9.809 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 773.19 \\ 0 \\ -773.19 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{KN}$$

que corresponde a un esfuerzo axial de compresión de 773.19 KN.

Elemento 5:

$$\{\Delta^5\} = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,407 \\ 0 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix}$$

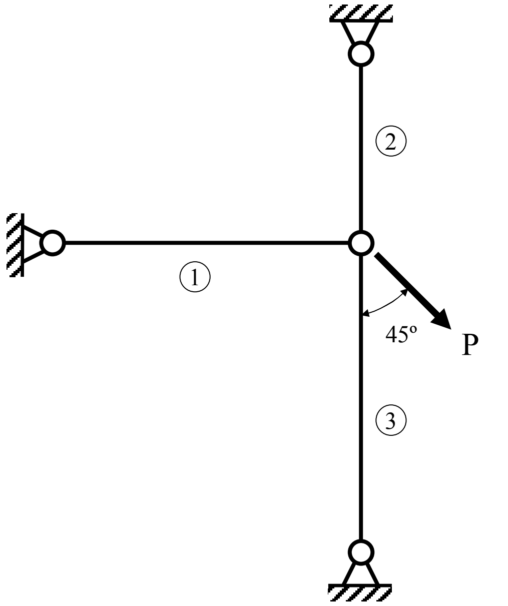
$$\{\delta^5\} = [T_2]\{\Delta^5\} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.407 \\ 0 \\ 10.926 \\ -7.801 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2035 \\ 0.3525 \\ -1.2927 \\ 13.3624 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = 300 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.2035 \\ 0.3525 \\ -1.2927 \\ 13.3624 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 326.76 \\ 0 \\ -326.76 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{KN}$$

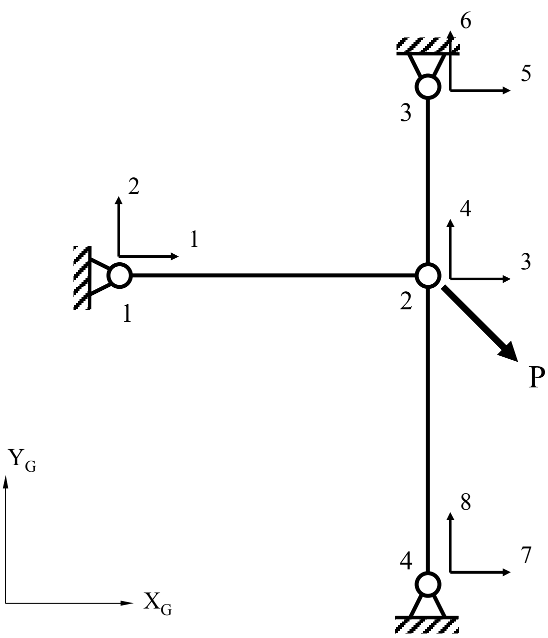
que corresponde a un esfuerzo axial de compresión de 326.76 KN.

5.2. *La estructura de la figura está formada por tres barras articuladas de acero de módulo de elasticidad E=200 Gpa y de la misma sección A=1,25 cm^2. Las barras 1 y 3 tienen una longitud de 1m en tanto que la de la barra 2 es de 1/3m. Siendo el valor de la carga aplicada* $P = 10\sqrt{2}\ \mathrm{KN}$*, calcular:*

a) Desplazamiento del punto de aplicación de la carga.
b)Esfuerzo en la barra 2.



La numeración de barras y nudos es la indicada en la figura inferior, en la que también se indican los 8 grados de libertad de la estructura.



Las matrices de rigidez elementales, expresadas en el sistema general de coordenadas son:

Elemento 1 (nudos 1-2):

$$\frac{EA}{L}=\frac{200\cdot 1{,}25\cdot 10^2}{10^3}=25\,KN/mm \qquad \alpha = 0°$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4\end{array} \\ [K^1]= & \begin{bmatrix} 25 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

Elemento 2 (nudos 2-3):

$$\frac{EA}{L}=\frac{200\cdot 1{,}25\cdot 10^2\cdot 3}{10^3}=75\,KN/mm \qquad \alpha = 90°$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6\end{array} \\ [K^2]= & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -75 & 0 & 75 \end{bmatrix}\end{array}$$

Elemento 3 (nudos 4-2):

$$\frac{EA}{L}=\frac{200\cdot 1{,}25\cdot 10^2}{10^3}=25\,KN/mm \qquad \alpha = 90°$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\Delta_7 & \Delta_8 & \Delta_3 & \Delta_4\end{array} \\ [K^3]= & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 25 \end{bmatrix}\end{array}$$

Ecuación de equilibrio:

Se obtendrá ensamblando las distintas matrices de rigidez elementales, y formulando los vectores de fuerzas y desplazamientos:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \begin{array}{cccccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 & \Delta_7 & \Delta_8 \end{array} & & \\
\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ 10 \\ -10 \\ \dots \\ F_5 \\ F_6 \\ \dots \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} & = &
\begin{bmatrix}
25 & 0 & -25 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-25 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 100 & 0 & -75 & 0 & -25 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -75 & 0 & 75 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 & 0 & 25
\end{bmatrix} & \cdot &
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

donde: $K_{44} = 75 + 25$.

Resolviendo las filas 3 y 4, resulta el sistema de ecuaciones:

$$10 = 25 \cdot \Delta_3$$
$$-10 = 100 \cdot \Delta_4$$

de donde se obtienen los valores para los desplazamientos del nudo punto de aplicación de la carga, es decir del nudo 2:

$$\Delta_3 = 0{,}4\, mm$$
$$\Delta_4 = -0{,}1\, mm$$

Esfuerzos en la barra 2:

Los desplazamientos de los extremos de este elemento, en coordenadas generales son:

$$\left\{\Delta^2\right\} = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Y en coordenadas locales:

$$\left\{\delta^2\right\} = \left[T_2\right] \cdot \left\{\Delta^2\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,4 \\ -0,1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,1 \\ -0,4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

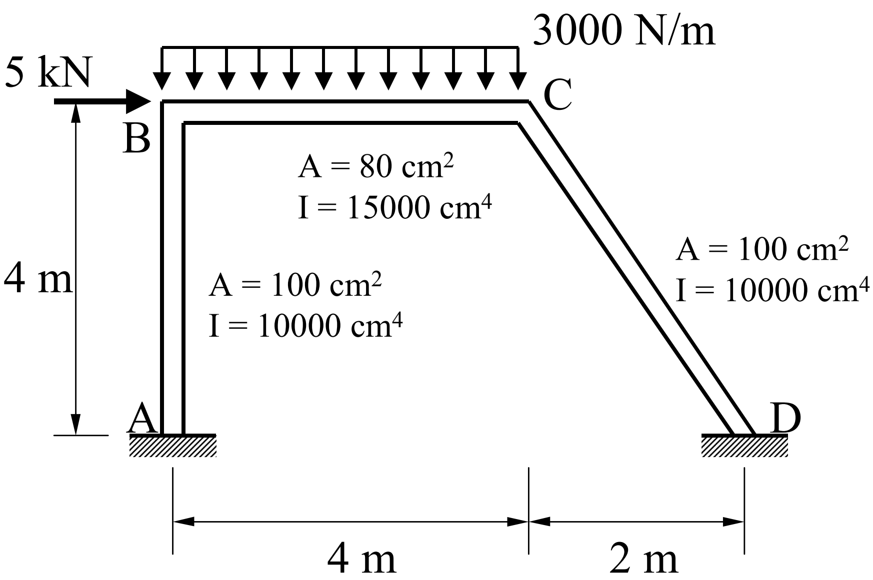
Los esfuerzos en los extremos, calculados en el sistema local, serán:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = 75 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0,1 \\ -0,4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7,5 \\ 0 \\ 7,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que corresponde a un esfuerzo axial de tracción de 7,5 KN.

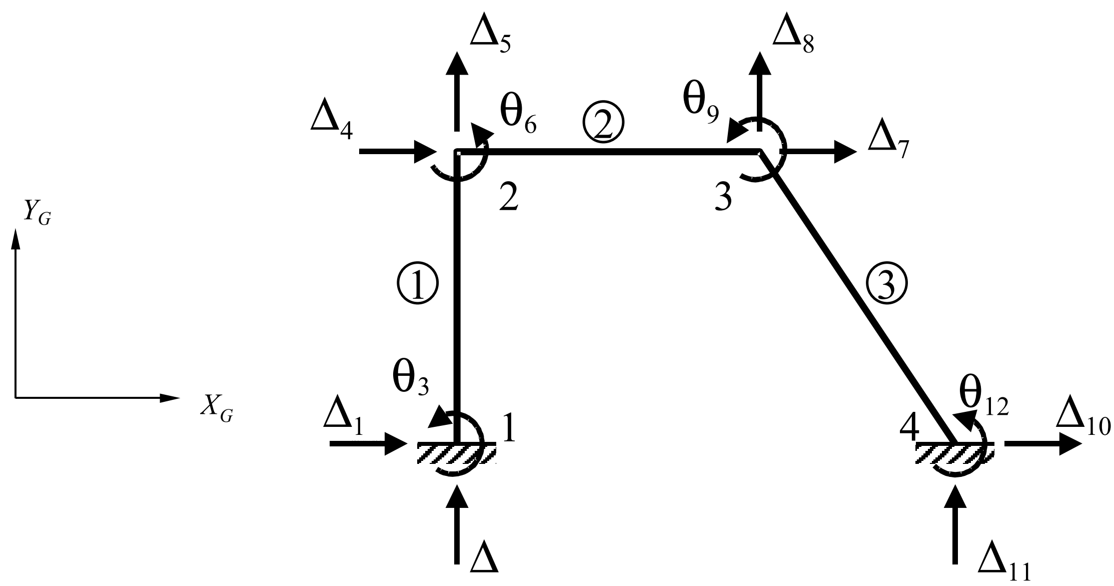
5.3. *Calcular los esfuerzos en el pórtico de la figura. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad E=200 GPa. Sus propiedades resistentes se indican en la figura.*

Nota: *Las unidades empleadas en la resolución serán N y m.*



1. Numeración de nudos y barras. Sistemas de ejes. Grados de libertad:

Se trata de una estructura plana formada por elementos viga con ambos extremos rígidos, cuya matriz de rigidez viene dada por la expresión referida a una barra empotrada. La numeración de los elementos y nudos, así como el sistema global de coordenadas, son los indicados en la figura.



2. *Ecuación de equilibrio*: $\{F\} = [K] \cdot \{\Delta\}$

3. *Vectores desplazamientos y fuerzas nodales equivalentes:*

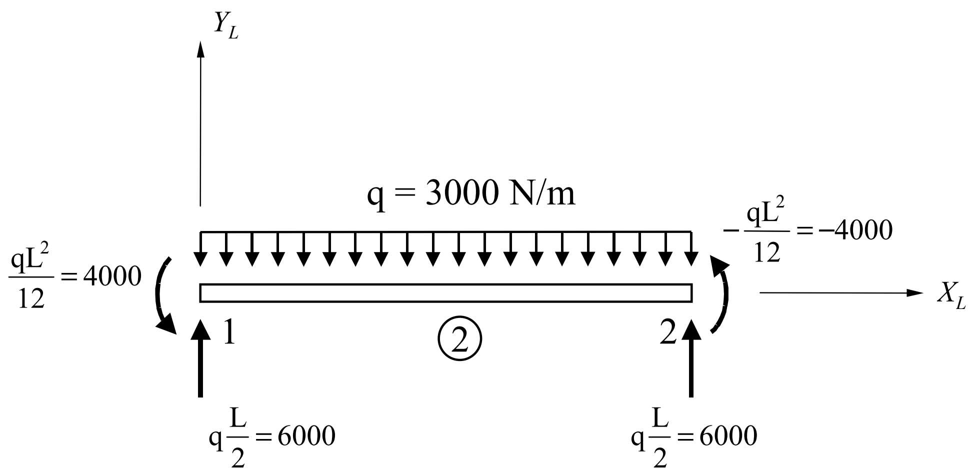
Hay seis desplazamientos conocidos, de valor nulo, correspondientes a los grados de libertad de los empotramientos. Por consiguiente, las incógnitas primarias del problema serán los seis desplazamientos de los nudos libres, tal y como se indica en el vector $\{\Delta\}$.

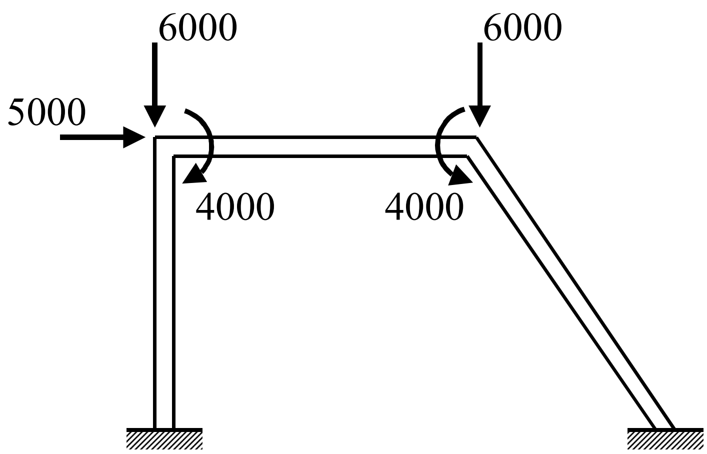
Por lo que se refiere al vector de fuerzas nodales, hay que calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto debidas a la carga distribuida en el elemento *2*, obteniéndose el vector:

$$\{P^{02}\} = \begin{Bmatrix} P_4^0 = 0 \\ P_5^0 = 6000 \\ M_6^0 = 4000 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_7^0 = 0 \\ P_8^0 = 6000 \\ M_9^0 = -4000 \end{Bmatrix} \equiv \{F^{02}\}$$

Este vector se ensambla, con signo menos, en el vector de fuerzas nodales de la estructura. Incluyendo la carga puntual de *5 KN* aplicada en el nudo *2* en la dirección X_G, el vector de fuerzas nodales $\{F\}$ completo es:

$$\{\Delta\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \theta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \theta_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{F\}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ 5000 \\ -6000 \\ -4000 \\ 0 \\ -6000 \\ 4000 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}$$





4. Matriz de rigidez en coordenadas locales para las tres barras:

$$\left[K_L^e\right]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \vdots & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \vdots & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \vdots & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \vdots & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \vdots & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \vdots & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

5. *Ensamblado de la matriz de rigidez*:

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \cdots \\ \{F_2\} \\ \cdots \\ \{F_3\} \\ \cdots \\ \{F_4\} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \left[K_{ii}^1\right] & \vdots & \left[K_{ij}^1\right] & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \left[K_{ji}^1\right] & \vdots & \left[K_{jj}^1\right]+\left[K_{ii}^2\right] & \vdots & \left[K_{ij}^2\right] & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \left[K_{ji}^2\right] & \vdots & \left[K_{jj}^2\right]+\left[K_{ii}^3\right] & \vdots & \left[K_{ij}^3\right] \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & \left[K_{ji}^3\right] & \vdots & \left[K_{jj}^3\right] \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \cdots \\ \{\Delta_2\} \\ \cdots \\ \{\Delta_3\} \\ \cdots \\ \{\Delta_4\} \end{Bmatrix}$$

6. Transformación de las matrices elementales al sistema global:

La matriz de transformación de coordenadas es:

$$[T_0]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & sen\,\alpha & 0\\ -sen\,\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

y para cualquiera de las submatrices de la matriz de rigidez, se verifica:

$$\left[K^e_{Gij}\right]=[T_0]^T\cdot\left[K^e_{Lij}\right]\cdot[T_0]$$

Elemento 1:

$\alpha = 90º$ (senα =1, cosα =0) E = $200\text{x}10^9$Pa L = 4m A = 0.01m^2 $I_z = 10^{-4}\text{m}^4$

$$\left[K^1_{ii}\right]=[T_0]^T\left[K^1_{Lii}\right][T_0]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}10^6\begin{bmatrix}500 & 0 & 0\\ 0 & 3.75 & 7.5\\ 0 & 7.5 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}3.75 & 0 & -7.5\\ 0 & 500 & 0\\ -7.5 & 0 & 20\end{bmatrix}$$

$$\left[K^1_{ij}\right]=[T_0]^T\left[K^1_{Lij}\right][T_0]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}10^6\begin{bmatrix}-500 & 0 & 0\\ 0 & -3.75 & 7.5\\ 0 & -7.5 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}-3.75 & 0 & -7.5\\ 0 & -500 & 0\\ 7.5 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

$$\left[K^1_{jj}\right]=[T_0]^T\left[K^1_{Ljj}\right][T_0]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}10^6\begin{bmatrix}500 & 0 & 0\\ 0 & 3.75 & -7.5\\ 0 & -7.5 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}3.75 & 0 & 7.5\\ 0 & 500 & 0\\ 7.5 & 0 & 20\end{bmatrix}$$

$$\left[K^1\right]=10^6\begin{bmatrix}3.75 & 0 & -7.5 & \vdots & -3.75 & 0 & -7.5\\ 0 & 500 & 0 & \vdots & 0 & -500 & 0\\ -7.5 & 0 & 20 & \vdots & 7.5 & 0 & 10\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -3.75 & 0 & 7.5 & \vdots & 3.75 & 0 & 7.5\\ 0 & -500 & 0 & \vdots & 0 & 500 & 0\\ -7.5 & 0 & 10 & \vdots & 7.5 & 0 & 20\end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$\alpha = 0^o$ (senα =0, cosα =1) E = 200x10^{9}Pa L = 4m A = 0.08m^2 I_z = 1.5x10^{-4}m^4

$$\left[K^2\right] = 10^6 \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & \vdots & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 5.62 & 11.25 & \vdots & 0 & -5.62 & 11.25 \\ 0 & 11.25 & 30 & \vdots & 0 & -11.25 & 15 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -400 & 0 & 0 & \vdots & 400 & 0 & 0 \\ 0 & -5.62 & -11.25 & \vdots & 0 & 5.62 & -11.25 \\ 0 & 11.25 & 15 & \vdots & 0 & -11.25 & 30 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:

α = -63.43º (senα =-0.894, cosα =0.447) E = 200x10^{9}Pa L = 4,47m A = 0.01m^2
I_z = 10^{-4}m^4

$$\left[K_{ii}^3\right] = [T_0]^T\left[K_{Lii}^3\right][T_0] = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 & 0 \\ -0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 447 & 0 & 0 \\ 0 & 2.68 & 6 \\ 0 & 6 & 17.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.447 & -0.894 & 0 \\ 0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 91.6 & -178 & 5.37 \\ -178 & 358 & 2.68 \\ 5.37 & 2.68 & 17.9 \end{bmatrix}$$

$$\left[K_{ij}^3\right] = [T_0]^T\left[K_{Lij}^3\right][T_0] = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 & 0 \\ -0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} -447 & 0 & 0 \\ 0 & -2.68 & 6 \\ 0 & -6 & 8.94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.447 & -0.894 & 0 \\ 0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} -91.6 & 178 & 5.37 \\ 178 & -358 & 2.68 \\ -5.36 & -2.68 & 8.94 \end{bmatrix}$$

$$\left[K_{jj}^3\right] = [T_0]^T\left[K_{Ljj}^3\right][T_0] = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 & 0 \\ -0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 447 & 0 & 0 \\ 0 & 2.68 & -6 \\ 0 & -6 & 17.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.447 & -0.894 & 0 \\ 0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 91.6 & -178 & -5.37 \\ -178 & 358 & -2.68 \\ -5.37 & -2.68 & 17.9 \end{bmatrix}$$

$$\left[K^3\right] = 10^6 \begin{bmatrix} 91.6 & -178 & 5.37 & \vdots & -91.6 & 178 & 5.37 \\ -178 & 358 & 2.68 & \vdots & 178 & -358 & 2.68 \\ 5.37 & 2.68 & 17.9 & \vdots & -5.36 & -2.68 & 8.94 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -91.6 & 178 & -5.36 & \vdots & 91.6 & -178 & -5.37 \\ 178 & -358 & -2.68 & \vdots & -178 & 358 & -2.68 \\ 5.37 & 2.68 & 8.94 & \vdots & -5.37 & -2.68 & 17.9 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación de equilibrio resultante:

Ensamblando las matrices elementales de rigidez se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$
\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ \cdots \\ 5000 \\ -6000 \\ -4000 \\ \cdots \\ 0 \\ -6000 \\ 4000 \\ \cdots \\ F_{10} \\ F_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = 10^6
\begin{bmatrix}
3.75 & 0 & -7.5 & \vdots & -3.75 & 0 & -7.5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 500 & 0 & \vdots & 0 & -500 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
-7.5 & 0 & 20 & \vdots & 7.5 & 0 & 10 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
-3.75 & 0 & 7.5 & \vdots & 404 & 0 & 7.5 & \vdots & -400 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -500 & 0 & \vdots & 0 & 506 & 11.3 & \vdots & 0 & -5.63 & 11.3 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
-7.5 & 0 & 10 & \vdots & 7.5 & 11.3 & 50 & \vdots & 0 & -11.3 & 15 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0 & 0 & \vdots & -400 & 0 & 0 & \vdots & 492 & -178 & 5.37 & \vdots & -91.6 & 178 & 5.37 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -5.63 & -11.3 & \vdots & -178 & 364 & -8.57 & \vdots & 178 & -358 & 2.68 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 11.3 & 15 & \vdots & 5.37 & -8.57 & 47.9 & \vdots & -5.37 & -2.68 & 8.94 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & -91.6 & 178 & -5.37 & \vdots & 91.6 & -178 & -5.37 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 178 & -358 & -2.68 & \vdots & -178 & 358 & -2.68 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5.37 & 2.68 & 8.94 & \vdots & -5.37 & -2.68 & 17.9
\end{bmatrix} \cdot
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \theta_6 \\ \cdots \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \theta_9 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

8. Sistema final de ecuaciones:

Eliminando de la ecuación anterior las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad que tienen desplazamiento nulo, resulta el sistema de seis ecuaciones con las seis incógnitas de desplazamiento:

$$
\begin{Bmatrix} 5000 \\ -6000 \\ -4000 \\ 0 \\ -6000 \\ 4000 \end{Bmatrix} = 10^6
\begin{bmatrix}
404 & 0 & 7.5 & -400 & 0 & 0 \\
0 & 506 & 11.3 & 0 & -5.63 & 11.3 \\
7.5 & 11.3 & 50 & 0 & -11.3 & 15 \\
-400 & 0 & 0 & 492 & -178 & 5.37 \\
0 & -5.63 & -11.3 & -178 & 364 & -8.57 \\
0 & 11.3 & 15 & 5.37 & -8.57 & 47.9
\end{bmatrix} \cdot
\begin{Bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \theta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \theta_9 \end{Bmatrix}
$$

9. <u>Solución del sistema</u>:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \theta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \theta_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2621 \\ -0.0104 \\ -0.1286 \\ 0.2496 \\ 0.1041 \\ 0.1169 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

10. <u>Cálculo de las reacciones en los apoyos</u>:

Sustituyendo los desplazamientos obtenidos, la ecuación general de equilibrio queda:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ \cdots \\ 5000 \\ -6000 \\ -4000 \\ \cdots \\ 0 \\ -6000 \\ 4000 \\ \cdots \\ F_{10} \\ F_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 3.75 & 0 & -7.5 & \vdots & -3.75 & 0 & -7.5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & \vdots & 0 & -500 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -7.5 & 0 & 20 & \vdots & 7.5 & 0 & 10 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -3.75 & 0 & 7.5 & \vdots & 404 & 0 & 7.5 & \vdots & -400 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 & \vdots & 0 & 506 & 11.3 & \vdots & 0 & -5.63 & 11.3 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -7.5 & 0 & 10 & \vdots & 7.5 & 11.3 & 50 & \vdots & 0 & -11.3 & 15 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -400 & 0 & 0 & \vdots & 492 & -178 & 5.37 & \vdots & -91.6 & 178 & 5.37 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -5.63 & -11.3 & \vdots & -178 & 364 & -8.57 & \vdots & 178 & -358 & 2.68 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 11.3 & 15 & \vdots & 5.37 & -8.57 & 47.9 & \vdots & -5.37 & -2.68 & 8.94 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & -91.6 & 178 & -5.37 & \vdots & 91.6 & -178 & -5.37 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 178 & -358 & -2.68 & \vdots & -178 & 358 & -2.68 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5.37 & 2.68 & 8.94 & \vdots & -5.37 & -2.68 & 17.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0.2621 \\ -0.0104 \\ -0.1286 \\ \cdots \\ 0.2496 \\ 0.1041 \\ 0.1169 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Reduciendo el sistema de ecuaciones a aquellas en las que únicamente figuran las reacciones incógnitas, y resolviéndolo, se obtienen finalmente las reacciones expresadas en el sistema general de coordenadas.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18.23 \\ 5224 \\ 679.5 \\ -4982 \\ 6776 \\ 2665 \end{Bmatrix}$$

11. Cálculo de los esfuerzos en las barras:

Esfuerzos en el elemento 1:

Los desplazamientos de los nudos de este elemento son:

$$\left\{\Delta^1\right\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\dots\\\Delta_4\\\Delta_5\\\theta_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\dots\dots\dots\\0{,}2621\\-0{,}0104\\-0{,}1286\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

que expresados en el sistema local de coordenadas:

$$\left\{\delta^1\right\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\dots\\\delta_4\\\delta_5\\\theta_6\end{Bmatrix}=\left[T_2\right]\cdot\left\{\Delta^1\right\}=\begin{bmatrix}0&1&0&\vdots&0&0&0\\-1&0&0&\vdots&0&0&0\\0&0&1&\vdots&0&0&0\\\dots&\dots&\dots&\vdots&\cdots&\dots&\dots\\0&0&0&\vdots&0&1&0\\0&0&0&\vdots&-1&0&0\\0&0&0&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\dots\dots\dots\\0{,}2621\\-0{,}0104\\-0{,}1286\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\dots\dots\dots\\-0{,}0104\\-0{,}2621\\-0{,}1286\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

Los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\left\{P^1\right\}=\left[K_L^1\right]\cdot\left\{\delta^1\right\}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\M_3\\\dots\\P_4\\P_5\\M_6\end{Bmatrix}=10^8\cdot\begin{bmatrix}5&0&0&\vdots&-5&0&0\\0&0{,}0375&0{,}075&\vdots&0&-0{,}0375&0{,}075\\0&0{,}075&0{,}2&\vdots&0&-0{,}075&0{,}1\\\dots&\dots\dots\dots&\dots\dots\dots&\vdots&\dots&\dots\dots\dots&\dots\dots\dots\\-5&0&0&\vdots&5&0&0\\0&-0{,}0375&-0{,}075&\vdots&0&0{,}0375&-0{,}075\\0&0{,}075&0{,}1&\vdots&0&-0{,}075&0{,}2\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\dots\\-0{,}0104\\-0{,}2621\\-0{,}1286\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}=\begin{Bmatrix}5224\\18{,}23\\679{,}5\\\dots\dots\\-5224\\-18{,}23\\-606\end{Bmatrix}$$

<u>*Esfuerzos en el elemento 2*</u>*:*

Al estar orientado según el eje X_G, su sistema local coincide con el general de la estructura. Los desplazamientos de sus nudos son:

$$\{\delta^2\}=\{\Delta^2\}=\begin{Bmatrix}\delta_4\\ \delta_5\\ \theta_6\\ \dots\\ \delta_7\\ \delta_8\\ \theta_9\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,2621\\ -0,0104\\ -0,1286\\ \dots\dots\dots\\ 0,2496\\ 0,1041\\ 0,1169\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

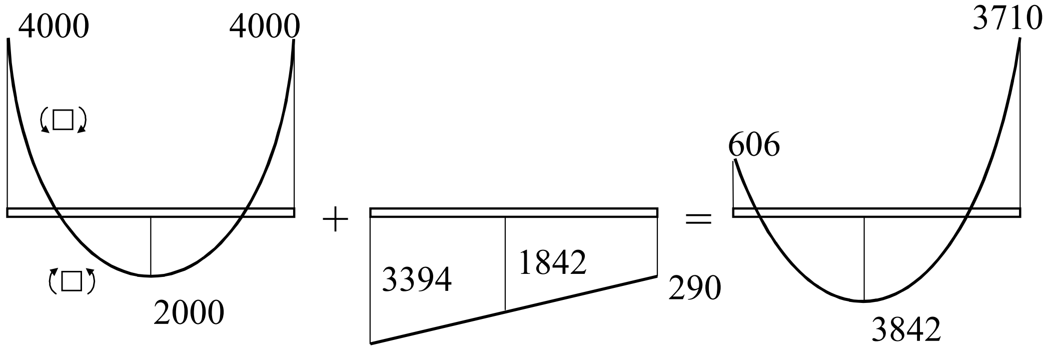
Los esfuerzos en sus extremos se obtienen sumando los de empotramiento perfecto de la fase *0* con los de la fase *1*. Por lo tanto:

$$\{P^2\}=\{P^{02}\}+\left[K_L^2\right]\cdot\{\delta^2\}$$

$$\{P^2\}=\begin{Bmatrix}0\\ 6000\\ 4000\\ \dots\dots\\ 0\\ 6000\\ -4000\end{Bmatrix}+10^8\cdot\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0,0562 & 0,1125 & \vdots & & -0,0562 & 0,1125\\ 0 & 0,1125 & 0,3 & \vdots & 0 & -0,1125 & 0,15\\ \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \vdots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ -4 & 0 & 0 & \vdots & 4 & 0 & 0\\ 0 & -0,0562 & -0,1125 & \vdots & 0 & 0,0562 & -0,1125\\ 0 & 0,1125 & 0,15 & \vdots & 0 & -0,1125 & 0,3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0,2621\\ -0,0104\\ -0,1286\\ \dots\dots\dots\\ 0,2496\\ 0,1041\\ 0,1169\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

$$\{P^2\}=\begin{Bmatrix}P_4\\ P_5\\ M_6\\ \dots\\ P_7\\ P_8\\ M_9\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 6000\\ 4000\\ \dots\dots\\ 0\\ 6000\\ -4000\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4981\\ -776\\ -3394\\ \dots\dots\\ -4981\\ 776\\ 290\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4981\\ 5224\\ 606\\ \dots\dots\\ -4981\\ 6776\\ -3710\end{Bmatrix}$$

Los esfuerzos internos en la viga son asimismo la suma de los debidos a las fases *0* y *1*. Como ejemplo, en la figura muestra el diagrama de momentos de esta viga.



<u>Esfuerzos en el elemento 3</u>:

Los desplazamientos de los nudos de este elemento en el sistema general son:

$$\left\{\Delta^3\right\}=\left\{\begin{array}{c}\Delta_7\\ \Delta_8\\ \theta_9\\ \ldots\\ \Delta_{10}\\ \Delta_{11}\\ \theta_{12}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0{,}2496\\ 0{,}1041\\ 0{,}1169\\ \ldots\ldots\ldots\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}\cdot 10^{-3}$$

Proyectándolos sobre el sistema local, se obtiene:

$$\left\{\delta^3\right\}=\left\{\begin{array}{c}\delta_7\\ \delta_8\\ \theta_9\\ \ldots\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}=\left[T_2^3\right]\cdot\left\{\Delta^3\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \theta_9 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,447 & -0,894 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0,894 & 0,447 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \vdots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0,447 & -0,894 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0,894 & 0,447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,2496 \\ 0,1041 \\ 0,1169 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0,0185 \\ 0,2698 \\ 0,1169 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

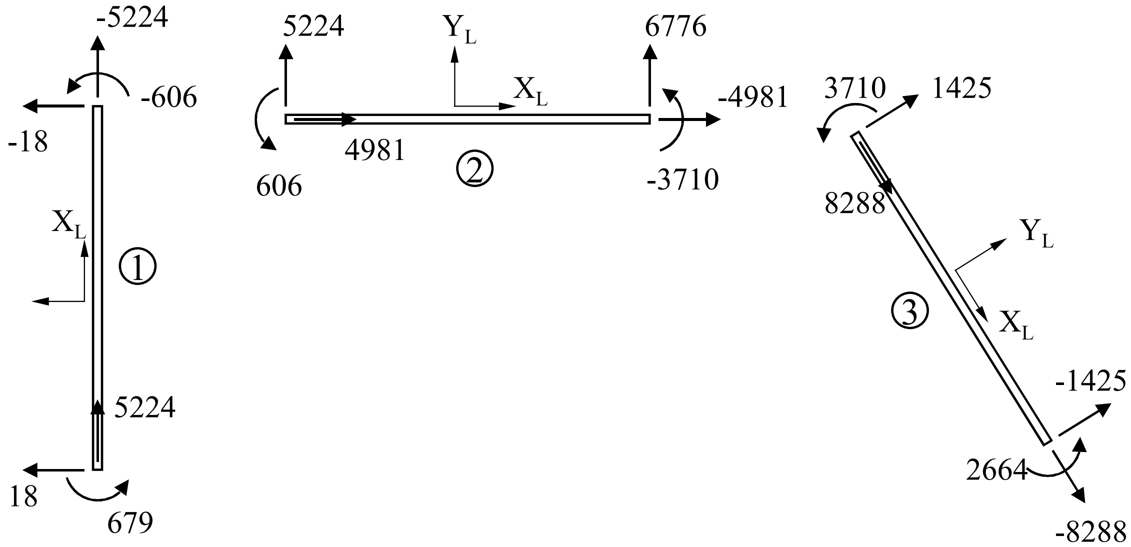
Al no haber cargas aplicadas sobre esta viga, los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

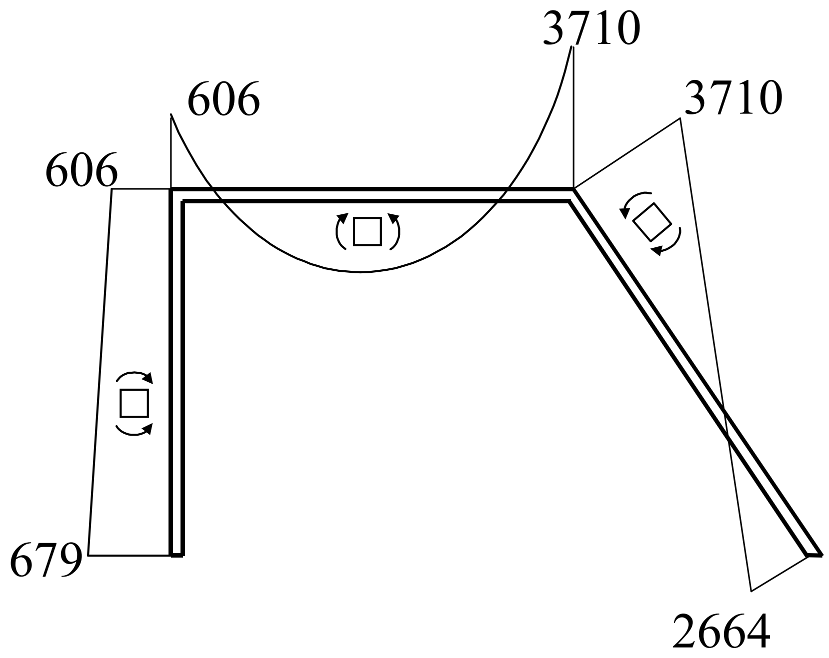
$$\begin{Bmatrix} P_7 \\ P_8 \\ M_9 \\ \cdots \\ P_{10} \\ P_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = 10^8 \cdot \begin{bmatrix} 4,472 & 0 & 0 & -4,472 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0268 & 0,06 & 0 & -0,0268 & 0,06 \\ 0 & 0,06 & 0,1789 & 0 & -0,06 & 0,089 \\ & & & & & \\ -4,472 & 0 & 0 & 4,472 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0268 & -0,06 & 0 & 0,0268 & -0,06 \\ 0 & 0,06 & 0,089 & 0 & -0,06 & 0,1789 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,0185 \\ 0,2698 \\ 0,1169 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix} P_7 \\ P_8 \\ M_9 \\ \cdots \\ P_{10} \\ P_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8288 \\ 1425 \\ 3710 \\ \ldots\ldots\ldots \\ -8288 \\ -1425 \\ 2664 \end{Bmatrix}$$

En las figuras se muestran, respectivamente, los esfuerzos en los extremos de todos los elementos, y el diagrama de momentos flectores de la estructura.

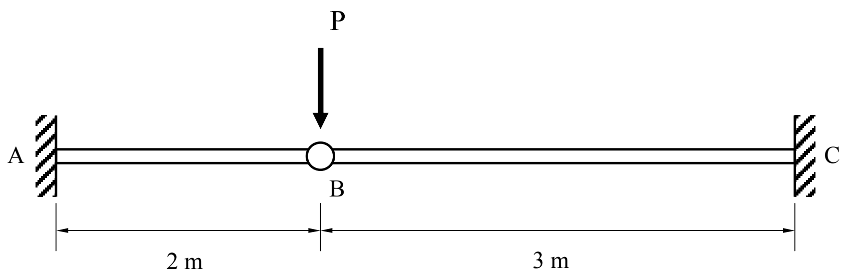

-5224
-606
-18
X_L
①
5224
18
679
5224
Y_L
6776
X_L
-4981
4981
606
②
-3710
3710
1425
8288
Y_L
③
X_L
-1425
2664
-8288


3710
606
3710
606
679
2664

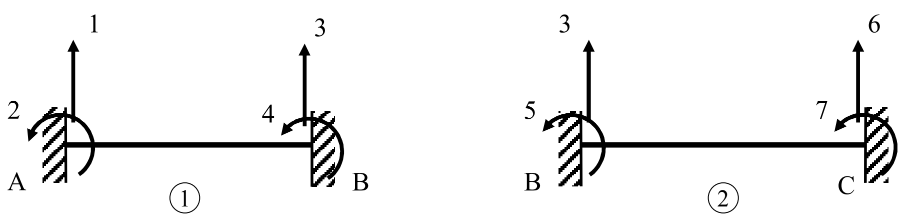
5.4. *La figura muestra una estructura en la que A y C son empotramientos perfectos y B una rótula intermedia en la que actúa una carga vertical P=700 KN. El material es un acero de módulo de elasticidad E=210 GPa y la sección es constante, de momento de inercia I=96000 cm^4.*

Despreciando el esfuerzo axial y su efecto, calcular las reacciones en los empotramientos y la flecha en la rótula.

Nota: *Las unidades empleadas en la resolución serán MPa (MN y m).*



En este caso son 7 los grados de libertad de la estructura (figura inferior), siendo Δ_3 común a ambos elementos.



La matriz de rigidez del elemento 1 y del elemento 2 se muestran a continuación:

$$\left[K^e\right]=\begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K^1]=\begin{bmatrix} 302{,}4 & 302{,}4 & -302{,}4 & 302{,}4 \\ 302{,}4 & 403{,}2 & -302{,}4 & 201{,}6 \\ -302{,}4 & -302{,}4 & 302{,}4 & -302{,}4 \\ 302{,}4 & 201{,}6 & -302{,}4 & 403{,}2 \end{bmatrix} \qquad [K^2]=\begin{bmatrix} 89{,}6 & 134{,}4 & -89{,}6 & 134{,}4 \\ 134{,}4 & 268{,}8 & -134{,}4 & 134{,}4 \\ -89{,}6 & -134{,}4 & 89{,}6 & -134{,}4 \\ 134{,}4 & 134{,}4 & -134{,}4 & 268{,}8 \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio correspondiente es:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_2 \\ -0{,}7 \\ 0 \\ 0 \\ F_6 \\ M_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 302{,}4 & 302{,}4 & -302{,}4 & 302{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 302{,}4 & 403{,}2 & -302{,}4 & 201{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ -302{,}4 & -302{,}4 & 392 & -302{,}4 & 134{,}4 & -89{,}6 & 134{,}4 \\ 302{,}4 & 201{,}6 & -302{,}4 & 403{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 134{,}4 & 0 & 268{,}8 & -134{,}4 & 134{,}4 \\ 0 & 0 & -89{,}6 & 0 & -134{,}4 & 89{,}6 & -134{,}4 \\ 0 & 0 & 134{,}4 & 0 & 134{,}4 & -134{,}4 & 268{,}8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde: $K_{33} = 302{,}4 + 89{,}6 = 392$.

De las filas 3, 4 y 5 se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -0{,}7 &= 392 \cdot \Delta_3 - 302{,}4 \cdot \theta_4 + 134{,}4 \cdot \theta_5 \\ 0 &= -302{,}4 \cdot \Delta_3 + 403{,}2 \cdot \theta_4 \\ 0 &= 134{,}4 \cdot \Delta_3 + 268{,}8 \cdot \theta_5 \end{aligned}$$

sistema que, una vez resuelto proporciona los valores:

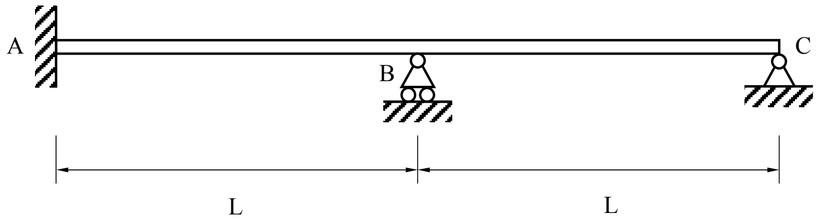
$$\begin{aligned} \Delta_3 &= -7{,}143 \cdot 10^{-3}\, m \\ \theta_4 &= -5{,}357 \cdot 10^{-3}\, rad \\ \theta_5 &= 3{,}572 \cdot 10^{-3}\, rad \end{aligned}$$

que de nuevo coinciden con los valores calculados en los casos previos, como también lo harán los valores de las reacciones que se obtendrían tras sustituir estos desplazamientos en la ecuación de equilibrio.

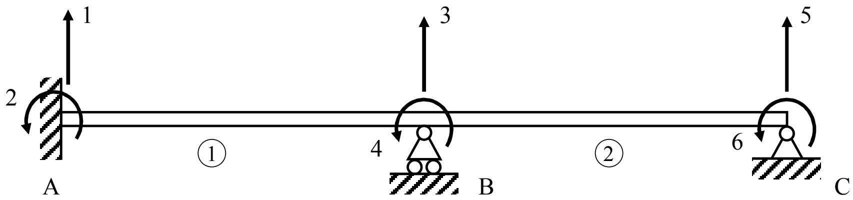
5.5. *En la viga ABC de la figura, A es un empotramiento perfecto, C un apoyo articulado fijo y B un apoyo deslizante, separados entre sí una distancia L=10 m, tal como se indica. La sección tiene un momento de inercia I=2x10^5 cm^4 y el material es un acero de módulo de elasticidad E=200 GPa.*

Despreciando el esfuerzo axial y su efecto, determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores cuando el apoyo B experimenta un asentamiento de 3 cm.

Nota: *Las unidades empleadas en la resolución serán MPa (MN y m).*



La estructura tiene 6 grados de libertad, tal como se indica en la figura.



Los dos elementos tienen igual matriz de rigidez, la expresada prescindiendo de los términos que proporcionan rigidez axial. Particularizando para los datos del problema:

$$EI_z = 200 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-8} = 400\ MN/m^2$$

$$\frac{12EI_z}{L^3} = 4{,}8\ MN/m; \quad \frac{6EI_z}{L^2} = 24\ MN; \quad \frac{4EI_z}{L} = 160\ MN \cdot m; \quad \frac{2EI_z}{L} = 80\ MN \cdot m$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 \end{array} \\ \left[K^1\right] = \left[K^2\right] = & \begin{bmatrix} 4{,}8 & 24 & -4{,}8 & 24 \\ 24 & 160 & -24 & 80 \\ -4{,}8 & -24 & 4{,}8 & -24 \\ 24 & 80 & -24 & 160 \end{bmatrix} \end{array}$$

Formulando los vectores de fuerzas y desplazamiento y ensamblando la matriz de rigidez, resulta la ecuación de equilibrio:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 \end{array} \\
\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_2 \\ V_3 \\ 0 \\ V_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}8 & 24 & -4{,}8 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 160 & -24 & 80 & 0 & 0 \\ -4{,}8 & -24 & 9{,}6 & 0 & -4{,}8 & 24 \\ 24 & 80 & 0 & 320 & -24 & 80 \\ 0 & 0 & -4{,}8 & -24 & 4{,}8 & -24 \\ 0 & 0 & 24 & 80 & -24 & 160 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}03 \\ \theta_4 \\ 0 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

donde:

$$K_{33} = 4{,}8 + 4{,}8 = 9{,}6; \quad K_{34} = -24 + 24 = 0; \quad K_{43} = -24 + 24 = 0; \quad K_{44} = 160 + 160 = 320;$$

Resolviendo según las filas 4 y 6, se obtiene el sistema:

$$
\begin{aligned}
0 &= 320 \cdot \theta_4 + 80 \cdot \theta_6 \\
0 &= 24 \cdot (-0{,}03) + 80 \cdot \theta_4 + 160 \cdot \theta_6
\end{aligned}
$$

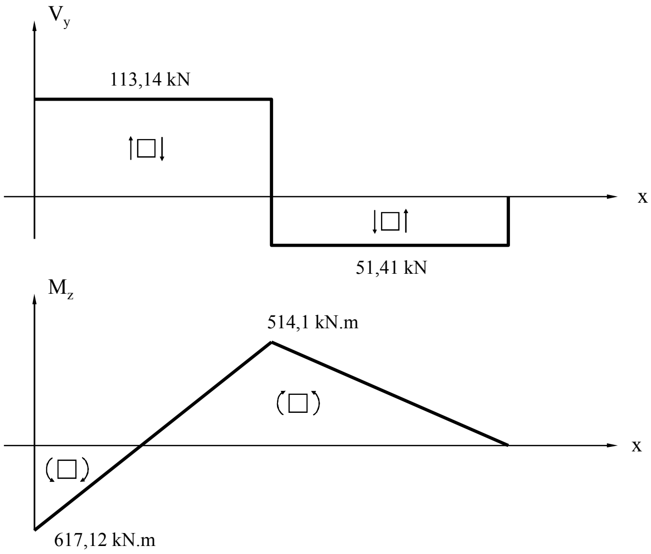
de donde:

$$
\begin{aligned}
\theta_4 &= -1{,}286 \cdot 10^{-3}\ rad \\
\theta_6 &= 5{,}144 \cdot 10^{-3}\ rad
\end{aligned}
$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de equilibrio, se obtiene para las reacciones:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= -4{,}8 \cdot (-0{,}03) + 24 \cdot \left(-1{,}286 \cdot 10^{-3}\right) = 0{,}113136\ MN = 113{,}14\ KN \\
M_2 &= 0{,}61712\ MNm = 617{,}12\ KNm \\
V_3 &= -0{,}164544\ MN = -164{,}54\ KN \\
V_5 &= 0{,}051408\ MN = 51{,}41\ KN
\end{aligned}
$$

con lo que los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores son los indicados en la figura.

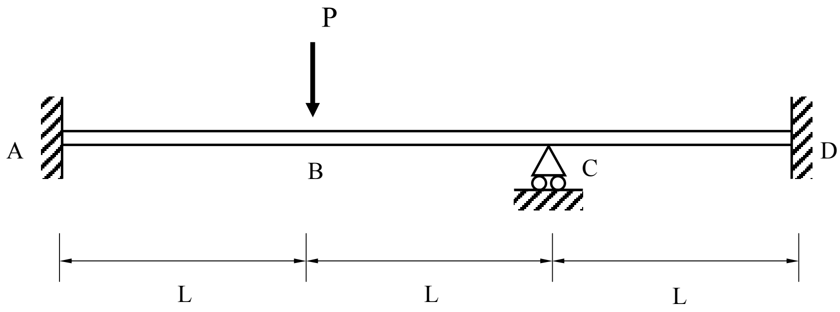


V_y
113,14 kN
x
51,41 kN
M_z
514,1 kN.m
x
617,12 kN.m

5.6. *En la viga de la figura, A y D son empotramientos perfectos y C una articulación deslizante. En ella L=1 m, la sección es constante de momento de inercia I=1000 cm^4 y el material tiene un módulo de elasticidad E=200 GPa. Está sometida a una carga vertical en B de 100 KN.*

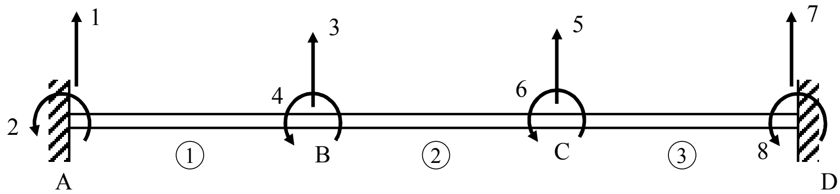
Despreciando el esfuerzo axial y su efecto, calcular las reacciones y los desplazamientos en la sección B.

Nota: *Las unidades empleadas en la resolución serán MPa (MN y m).*



La estructura puede considerarse formada por tres elementos viga biempotrada cuyos nudos y grados de libertad se indican en la figura. Su rigidez a flexión tiene el valor:

$$EI_z = 200 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8} = 2\ MNm^2$$



Al ser los tres elementos iguales tendrán también igual matriz de rigidez, en la que sólo es preciso calcular cuatro los cuatro términos siguientes:

$$\frac{12EI_z}{L^3} = 24\ MN/m; \quad \frac{6EI_z}{L^2} = 12\ MN; \quad \frac{4EI_z}{L} = 8\ MN \cdot m; \quad \frac{2EI_z}{L} = 4\ MN \cdot m$$

$$
\begin{array}{cccc}
\Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\
\Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 \\
\Delta_5 & \Delta_6 & \Delta_7 & \Delta_8
\end{array}
$$

$$
\left[K^1\right]=\left[K^2\right]=\left[K^3\right]=\begin{bmatrix} 24 & 12 & -24 & 12 \\ 12 & 8 & -12 & 4 \\ -24 & -12 & 24 & -12 \\ 12 & 4 & -12 & 8 \end{bmatrix}
$$

La matriz de rigidez ensamblada es:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 & \Delta_7 & \Delta_8 \end{array} \\
[K]= & \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
24 & 12 & -24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 8 & -12 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-24 & -12 & 24+24 & -12+12 & -24 & 12 & 0 & 0 \\
12 & 4 & -12+12 & 8+8 & -12 & 4 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -24 & -12 & 24+24 & 12-12 & -24 & 12 \\
0 & 0 & 12 & 4 & 12-12 & 8+8 & -12 & 4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & -24 & -12 & 24 & -12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -12 & 8
\end{array}\right]
\end{array}
$$

La ecuación de equilibrio:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 & \Delta_7 & \Delta_8 \end{array} \\
\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_2 \\ -0{,}1 \\ 0 \\ V_5 \\ 0 \\ V_7 \\ M_8 \end{Bmatrix} & = & \begin{bmatrix}
24 & 12 & -24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 8 & -12 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-24 & -12 & 48 & 0 & -24 & 12 & 0 & 0 \\
12 & 4 & 0 & 16 & -12 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -24 & -12 & 48 & 0 & -24 & 12 \\
0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 16 & -12 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -24 & -12 & 24 & -12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -12 & 8
\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ 0 \\ \theta_6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

Dejando únicamente los grados de libertad 3, 4 y 6 (o lo que es lo mismo, eliminando los restantes), resulta el sistema:

$$\begin{Bmatrix} -0{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 0 & 12 \\ 0 & 16 & 4 \\ 12 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

que, una vez resuelto, proporciona para los desplazamientos los valores:

$$\delta_3 = -0{,}26\,cm$$
$$\theta_4 = -5{,}21 \cdot 10^{-4}\ rad$$
$$\theta_6 = 2{,}083 \cdot 10^{-3}\ rad$$

Las reacciones se obtendrán sin más que sustituir estos valores en la ecuación de equilibrio, resultando:

$$V_1 = 56{,}15\,KN$$
$$M_1 = 29{,}16\,KNm$$
$$V_5 = 68{,}65\,KN$$
$$V_7 = -25\,KN$$
$$M_8 = 8{,}33\,KNm$$