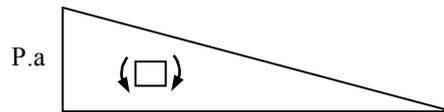
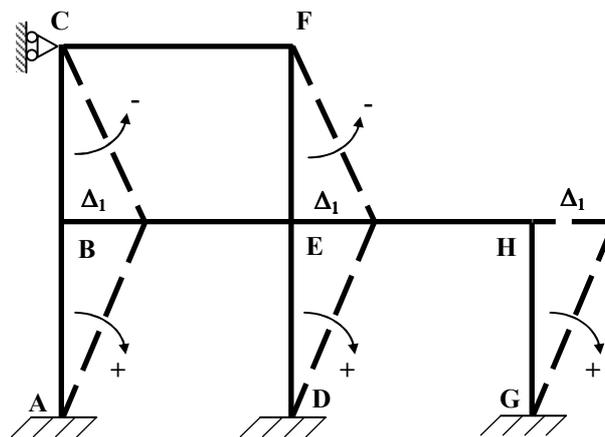




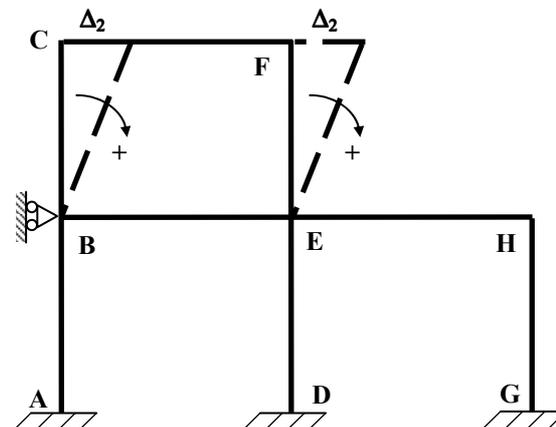
La barra en voladizo de longitud  $a = 2\text{m}$  en cuyo extremo está aplicada la carga puntual  $P$  es isostática y se puede resolver de manera sencilla al margen de la aplicación del método, por lo que al comienzo del análisis se pueden sustituir dicha barra y el efecto de la carga  $P$  por un momento de sentido horario aplicado en  $F$  de valor  $M = P \cdot a$



Quitando el apoyo del nudo  $B$  y desplazándolo una cantidad  $\Delta_1$  hacia la derecha, el resto de los nudos de la estructura quedarían situados de la siguiente manera:



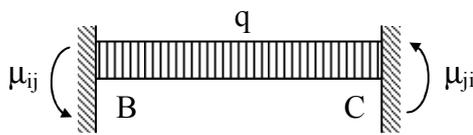
Quitando el apoyo del nudo  $C$  y desplazándolo una cantidad  $\Delta_2$  hacia la derecha, el resto de los nudos de la estructura quedarían situados esta vez de la siguiente manera:



A la vista de las figuras anteriores, los desplazamientos transversales totales de todas las barras, que se incluirán posteriormente en las ecuaciones de momentos, se pueden resumir de esta manera:

$$\begin{array}{cccc} \delta_1 = \Delta_1 & \delta_3 = \Delta_1 & \delta_5 = \Delta_2 - \Delta_1 & \delta_7 = 0 \\ \delta_2 = \Delta_1 & \delta_4 = \Delta_2 - \Delta_1 & \delta_6 = 0 & \delta_8 = 0 \end{array}$$

En dichas ecuaciones también se necesitarán los valores de los momentos de empotramiento perfecto de las barras que soportan alguna carga, en este caso la barra 4:



$$\mu_{ij} = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3^2}{12} = 2,25 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$\mu_{ji} = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -2,25 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

La estructura está formada por 8 barras, así que se tendrán 16 ecuaciones de momentos (dos por cada barra):

$$M_{AB} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_A + \frac{1}{2} \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{BA} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_A + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{DE} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_D + \frac{1}{2} \theta_E + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{ED} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_E + \frac{1}{2} \theta_D + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{GH} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_G + \frac{1}{2} \theta_H + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{HG} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_H + \frac{1}{2} \theta_G + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{BC} = 2,25 \cdot 10^4 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_C + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{3} \right]$$

$$M_{CB} = -2,25 \cdot 10^4 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_C + \frac{1}{2} \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{3} \right]$$

$$M_{EF} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_E + \frac{1}{2} \theta_F + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{3} \right]$$

$$M_{FE} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_F + \frac{1}{2} \theta_E + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{3} \right]$$

$$M_{BE} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{4} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_E \right]$$

$$M_{EB} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{4} \left[ \theta_E + \frac{1}{2} \theta_{EB} \right]$$

$$M_{EH} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{4} \left[ \theta_E + \frac{1}{2} \theta_H \right]$$

$$M_{HE} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{4} \left[ \theta_H + \frac{1}{2} \theta_E \right]$$

$$M_{CF} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{4} \left[ \theta_C + \frac{1}{2} \theta_F \right]$$

$$M_{FC} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{4} \left[ \theta_F + \frac{1}{2} \theta_C \right]$$

En estas ecuaciones el módulo de elasticidad y el momento de inercia de las vigas deben introducirse en unidades del sistema internacional:  $E = 210 \times 10^9$  Pa;  $I = 2 \times 10^{-4}$  m. Como la estructura consta de 8 nudos habrá que plantear las 8 ecuaciones de equilibrio en los mismos (teniendo en cuenta que en los empotramientos dicha condición se sustituye por la condición de giro nulo):

$$\theta_A = 0$$

$$M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CF} = 0$$

$$\theta_D = 0$$

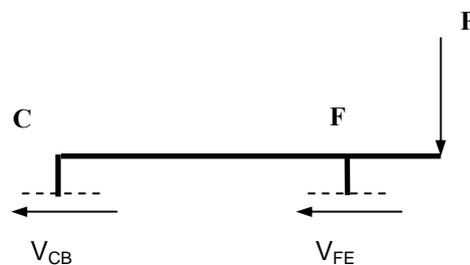
$$M_{ED} + M_{EB} + M_{EH} + M_{EF} = 0$$

$$M_{FE} + M_{FC} + P \cdot 2 = 0$$

$$\theta_G = 0$$

$$M_{HG} + M_{HE} = 0$$

Para obtener las dos ecuaciones restantes, se realizan dos cortes horizontales a la estructura planteando el equilibrio de fuerzas horizontales. El primer corte y la correspondiente ecuación de equilibrio son:

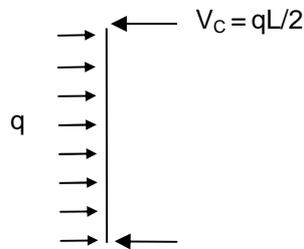


$$\sum F_H = 0$$

$$V_{CB} + V_{FE} = 0$$

Para deducir los cortantes de las barras habrá que considerar el equilibrio de las mismas, considerando la influencia tanto de las cargas exteriores aplicadas (como es el caso de la barra 4), como de los momentos en sus extremos (ambas barras).

Barra 4:



1) Cortante por momentos (horario):  $V_{CB}^{(1)} = \frac{M_{CB} + M_{BC}}{3}$

2) Cortante por cargas (horario):  $V_{CB}^{(2)} = -\frac{q \cdot L}{2} = -\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{2} = -4,5 \cdot 10^4 \text{ N}$

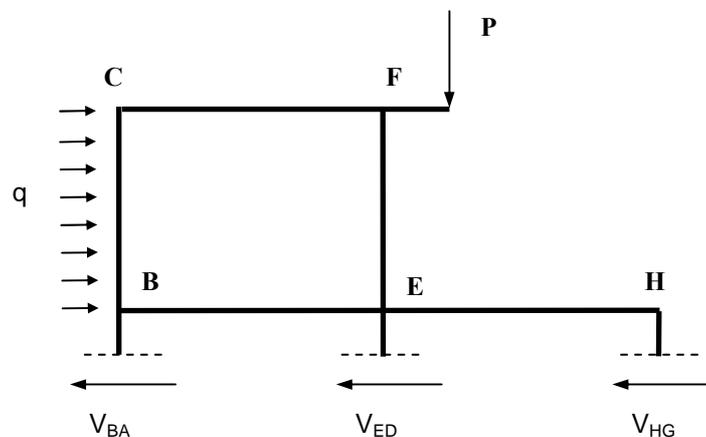
Barra 5:

1) Cortante por momentos (horario):  $V_{FE}^{(1)} = \frac{M_{FE} + M_{EF}}{3}$

La primera ecuación de corte queda por tanto:

$$\left( \frac{M_{CB} + M_{BC}}{3} - 4,5 \cdot 10^4 \right) + \left( \frac{M_{FE} + M_{EF}}{3} \right) = 0$$

El segundo corte a la estructura y la correspondiente ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales son los siguientes:



$$\sum F_H = 0$$

$$V_{BA} + V_{ED} + V_{HG} - q \cdot L = 0$$

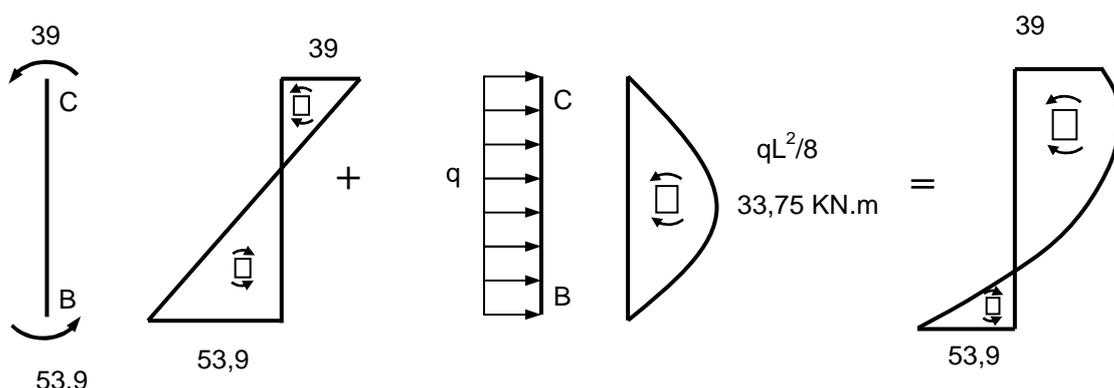
$$\left(\frac{M_{BA} + M_{AB}}{3}\right) + \left(\frac{M_{ED} + M_{DE}}{3}\right) + \left(\frac{M_{HG} + M_{GH}}{3}\right) - 9 \cdot 10^4 = 0$$

Con esta última ecuación se completa el sistema de ecuaciones lineales que permite resolver el problema. En este caso se tienen 10 ecuaciones con 10 incógnitas (8 ángulos girados en los nudos y 2 desplazamientos). Resolviendo dicho sistema se obtiene el valor de estas 10 incógnitas, y sustituyendo estos valores en las ecuaciones del método se obtienen también los momentos en los extremos de las barras, resultando ser (unidades del sistema internacional):

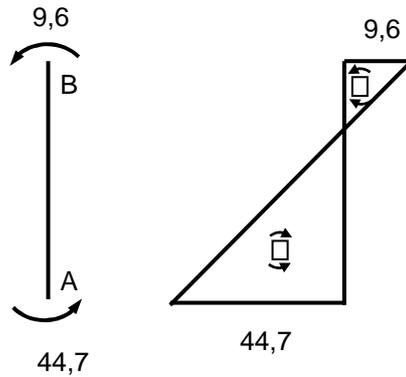
$\theta_A = 0 \text{ rad}$	$\Delta_1 = 2,84 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$	$M_{AB} = 44653 \text{ N.m}$
$\theta_B = -1,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$	$\Delta_2 = 6,65 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$	$M_{BA} = 9603 \text{ N.m}$
$\theta_C = -1,75 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$		$M_{DE} = 64974 \text{ N.m}$
$\theta_D = 0 \text{ rad}$		$M_{ED} = 50278 \text{ N.m}$
$\theta_E = -5,24 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$		$M_{GH} = 60048 \text{ N.m}$
$\theta_F = -1,52 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$		$M_{HG} = 40442 \text{ N.m}$
$\theta_G = 0 \text{ rad}$		$M_{BC} = 53968 \text{ N.m}$
$\theta_H = -6,98 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$		$M_{CB} = 39093 \text{ N.m}$
		$M_{EF} = 34788 \text{ N.m}$
		$M_{FE} = 7150 \text{ N.m}$
		$M_{BE} = -63570 \text{ N.m}$
		$M_{EB} = -48310 \text{ N.m}$
		$M_{EH} = -36760 \text{ N.m}$
		$M_{HE} = -40440 \text{ N.m}$
		$M_{CF} = -39090 \text{ N.m}$
		$M_{FC} = -67150 \text{ N.m}$

Según el convenio de signos utilizado, los momentos positivos serán antihorarios, y los ángulos positivos también (lo que significa que en este caso todos los giros serán horarios). En cuanto a los dos desplazamientos, han sido planteados hacia la derecha por lo que al salir positivos serán en realidad hacia la derecha.

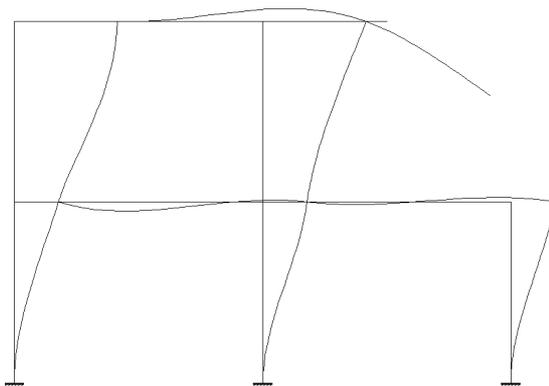
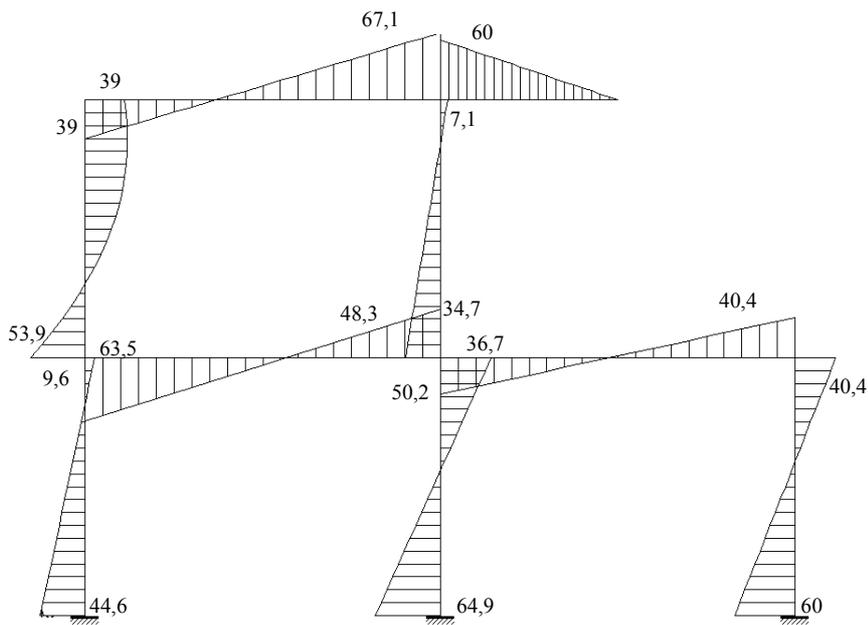
Para obtener los diagramas de momentos de cada barra, se deben superponer los debidos a las cargas aplicadas en ella y los originados por los momentos hiperestáticos en los extremos. La única barra que tiene carga aplicada entre sus nudos extremos es la barra 4. Su diagrama de momentos será:



Para las restantes barras, que no tienen ninguna carga aplicada entre sus nudos, sólo hay que situar los momentos resultantes en sus extremos orientados según su sentido horario o antihorario, y unir estos valores con una recta al ser el diagrama lineal. Por ejemplo, para la barra 1 se tendría:



Haciendo lo mismo para las restantes barras se obtienen el diagrama de momentos para toda la estructura, resultando el indicado en la siguiente figura (los diagramas están dibujados hacia el lado de la barra donde se produciría la tracción). Se añade, finalmente, un dibujo aproximado de la deformada.

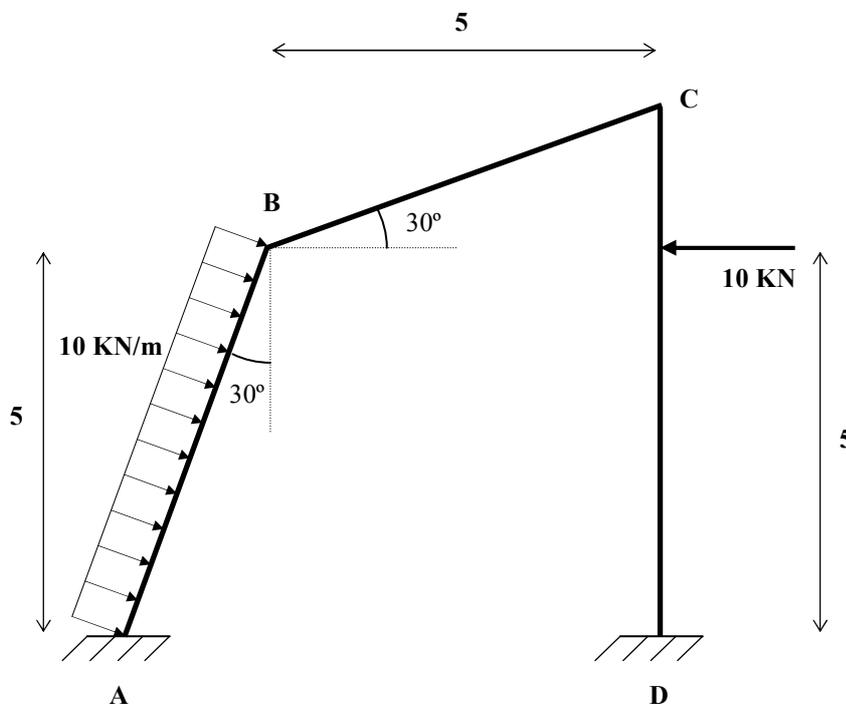


4.2. La estructura de la figura está sometida a una carga puntual de 10 KN y a una carga uniformemente repartida de 10 KN/m, aplicadas tal como se indica. El apoyo empotrado A sufre un asentamiento vertical de 2 cm.

a) Plantear todas las ecuaciones precisas para su resolución aplicando el método de la deformación angular.

b) Representar el diagrama de momentos de la barra CD debidamente acotado (de la resolución de las ecuaciones del apartado anterior se obtienen, entre otros, los siguientes valores:  $M_{CD} = 29,3 \text{ KN.m}$ , en sentido antihorario, y  $M_{DC} = 6,6 \text{ KN.m}$ , en sentido horario).

Todas las barras son del mismo material de módulo de elasticidad  $E=210 \text{ MPa.}$  y de inercia constante a lo largo de la directriz, de valor  $I=1 \times 10^4 \text{ m}^4$ . Las longitudes representadas en la figura están en metros.



a) Planteamiento de las ecuaciones

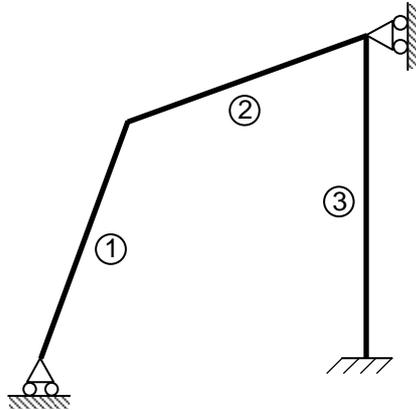
Se trata de una estructura con un grado de desplazabilidad:  $m = 2 \times 4 - 3 - 4 = 1$ , al que hay que añadir otro más debido al asentamiento conocido de 2 cm. La figura siguiente muestra la numeración de las barras utilizada y un conjunto posible de 2 apoyos deslizantes con los que se consigue la inmovilización de todos los nudos de la estructura.

Las longitudes de las tres barras, necesarias para las ecuaciones del método, se obtienen mediante sencillas consideraciones geométricas:

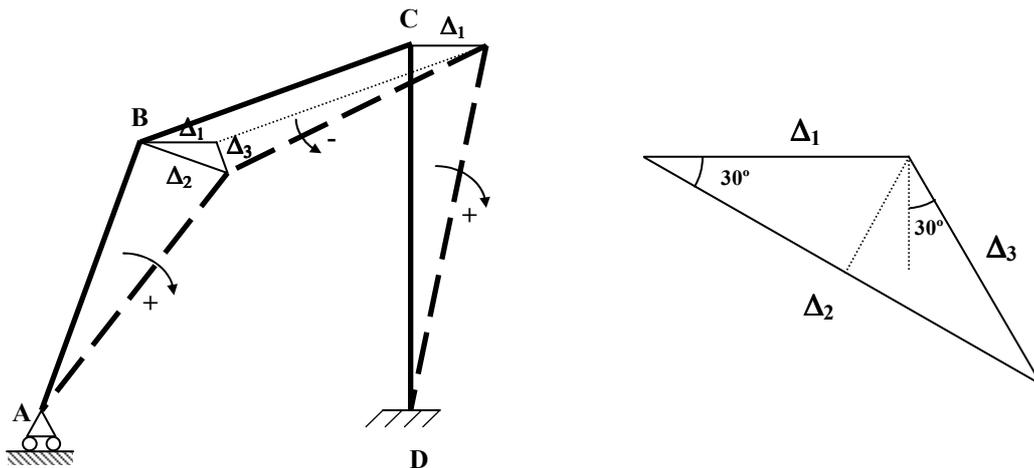
$$L_1 = 5 / \cos 30 = 5,77 \text{ m}$$

$$L_2 = 5 / \cos 30 = 5,77 \text{ m}$$

$$L_3 = 5 + 5 \operatorname{tg} 30 = 7,88 \text{ m}$$



Quitando el apoyo del nudo C, los nudos de la estructura quedarían desplazados de la siguiente manera:



A la vista del triángulo isósceles de la derecha, la relación entre desplazamientos es la siguiente:

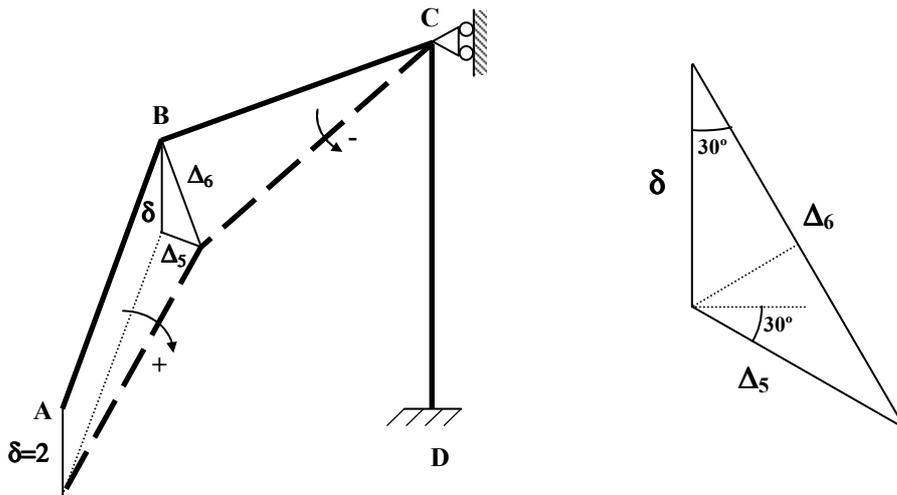
$$\Delta_3 = \Delta_1$$

$$\Delta_2 = 2 \cdot \Delta_1 \cdot \cos 30 = 1,73\Delta_1$$

En la figura siguiente se indica el desplazamiento que experimentan todos los nudos de la estructura al quitar el apoyo del nudo A y permitir a este nudo un asentamiento de valor 2 cm. En el nuevo triángulo isósceles que se forma en B se deducen las relaciones siguientes:

$$\Delta_5 = \delta = 2 \text{ cm}$$

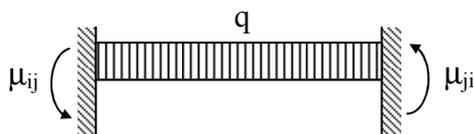
$$\Delta_6 = 2 \cdot \delta \cdot \cos 30 = 1,73 \cdot \delta = 3,46 \text{ cm}$$



Para cada una de las barras, y teniendo en cuenta el convenio de signos, el desplazamiento transversal total será:

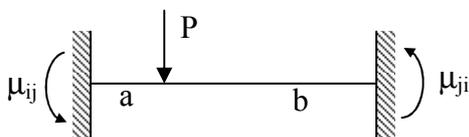
$$\begin{aligned}\delta_1 &= \Delta_2 + \Delta_5 = 1,73 \cdot \Delta_1 + 2 \cdot 10^{-2} \\ \delta_2 &= -\Delta_3 - \Delta_6 = -\Delta_1 - 3,46 \cdot 10^{-2} \\ \delta_3 &= \Delta_1\end{aligned}$$

Para formular las ecuaciones del método se necesitan los valores de los momentos de empotramiento perfecto de las barras que soportan alguna carga, en este caso las barras 1 y 3:



$$\mu_{ij} = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5,77^2}{12} = 2,77 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$\mu_{ji} = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -2,77 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$



$$\mu_{ij} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2,88 \cdot 5^2}{7,88^2} = 1,16 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$\mu_{ji} = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2,88^2 \cdot 5}{7,88^2} = -6,68 \cdot 10^3 \text{ Nm}$$

La estructura está formada por tres barras, así que se tendrán 6 ecuaciones de momentos (dos por cada barra):

$$M_{AB} = 2,77 \cdot 10^4 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5,77} \left[ \theta_A + \frac{1}{2} \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{(1,73 \Delta_1 + 2 \cdot 10^{-2})}{5,77} \right]$$

$$M_{BA} = -2,77 \cdot 10^4 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5,77} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_A + \frac{3}{2} \cdot \frac{(1,73\Delta_1 + 2 \cdot 10^{-2})}{5,77} \right]$$

$$M_{BC} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5,77} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_C + \frac{3}{2} \cdot \frac{(-\Delta_1 - 3,46 \cdot 10^{-2})}{5,77} \right]$$

$$M_{CB} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5,77} \left[ \theta_C + \frac{1}{2} \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{(-\Delta_1 - 3,46 \cdot 10^{-2})}{5,77} \right]$$

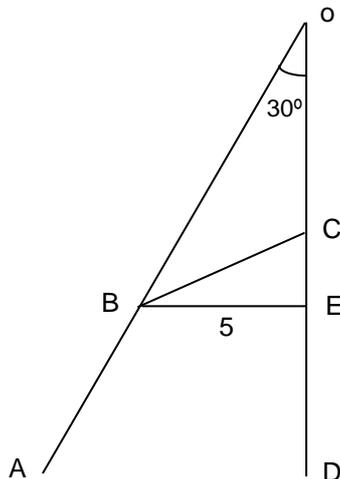
$$M_{CD} = 1,16 \cdot 10^4 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{7,88} \left[ \theta_C + \frac{1}{2} \theta_D + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_1)}{7,88} \right]$$

$$M_{DC} = -6,68 \cdot 10^3 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{7,88} \left[ \theta_D + \frac{1}{2} \theta_C + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_1)}{7,88} \right]$$

Donde  $E = 210 \times 10^9$  Pa e  $I = 1 \times 10^{-4}$  m. Puesto que la estructura consta de 4 nudos, de la consideración del equilibrio o del giro de cada uno de ellos surgirá una ecuación adicional:

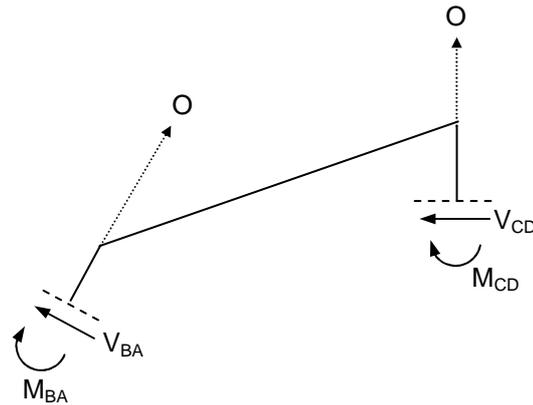
$$\begin{aligned} \theta_A &= 0 \\ M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ M_{CB} + M_{CD} &= 0 \\ \theta_D &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación que falta, se realiza un corte por las barras 1 y 3 y se plantea el equilibrio de momentos. Los datos geométricos que se necesitarán son:



$$\begin{aligned} OB &= \frac{5}{\sin 30} = 10 \text{ m} \\ OE &= OB \cdot \cos 30 = 8,66 \text{ m} \\ OC &= OE - CE = 8,66 - 2,88 = 5,78 \text{ m} \end{aligned}$$

Una vez dado el corte, se plantea el equilibrio de momentos respecto del punto O para evitar que intervengan los esfuerzos axiales de las barras 1 y 3:

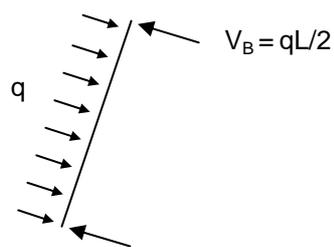


$$\sum M_O = 0$$

$$M_{BA} + V_{BA} \cdot 10 + M_{CD} + V_{CD} \cdot 5,78 = 0$$

Para el cálculo de los cortantes se aísla la barra correspondiente:

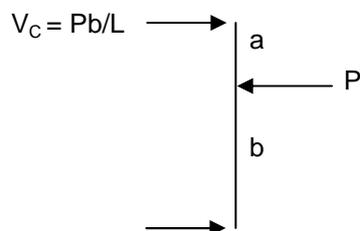
Barra 1:



1) Cortante por momentos (horario):  $V_{BA}^{(1)} = \frac{M_{BA} + M_{AB}}{5,77}$

2) Cortante por cargas (horario):  $V_{BA}^{(2)} = -\frac{q \cdot L}{2} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5,77}{2} = -2,89 \cdot 10^4 \text{ N}$

Barra 3:



1) Cortante por momentos (horario):  $V_{CD}^{(1)} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{7,88}$

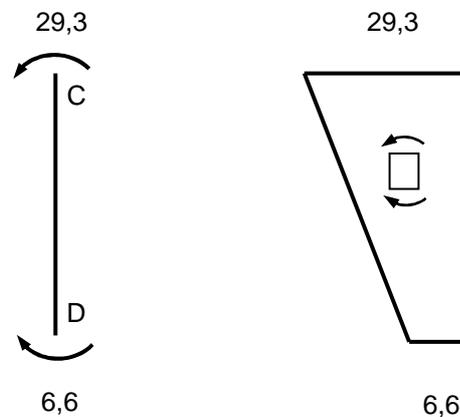
2) Cortante por cargas (horario):  $V_{CD}^{(2)} = \frac{P \cdot b}{L} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5}{7,88} = 6,35 \cdot 10^3 \text{ N}$

De esta forma la ecuación de equilibrio de momentos respecto a O queda expresada únicamente en función de las incógnitas del problema:

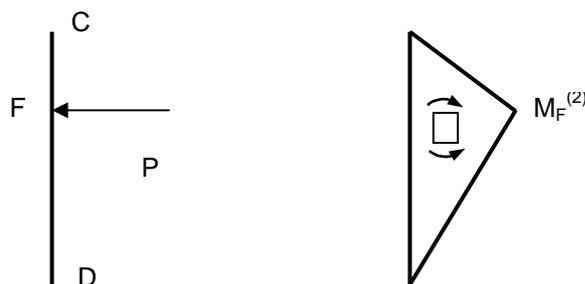
$$M_{BA} + \left( \frac{M_{BA} + M_{AB}}{5,77} - 2,89 \cdot 10^3 \right) \cdot 10 + M_{CD} + \left( \frac{M_{CD} + M_{DC}}{7,88} + 6,35 \cdot 10^3 \right) \cdot 5,78 = 0$$

a) Diagrama de momentos de la barra CD

Teniendo en cuenta los momentos en los extremos de la barra, obtenidos mediante resolución del sistema de ecuaciones, el diagrama de momentos hiperestáticos de la barra CD es:



Debido a la carga P habrá que superponer al diagrama de momentos anterior el correspondiente a dicha carga:

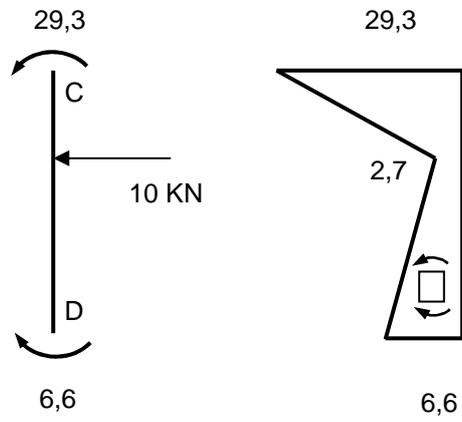


$$M_F^{(2)} = \frac{P \cdot a \cdot b}{L} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 2,88}{7,88} = 18,3 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Sumando algebraicamente ambos diagramas se obtienen dos tramos lineales con un momento total en el punto intermedio F de:

$$M_F = 6,6 + \frac{29,3 - 6,6}{7,88} \cdot 5 - 18,3 = 2,7 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

y por consiguiente, el diagrama final de momentos de la barra CD es:



- 4.3. Determinar, por el método de la deformación angular, los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes para la viga de la figura, dibujándolos debidamente acotados, cuando el apoyo intermedio **B** experimenta un asentamiento vertical descendente de **3 cm**. Calcular también la tensión máxima de flexión.

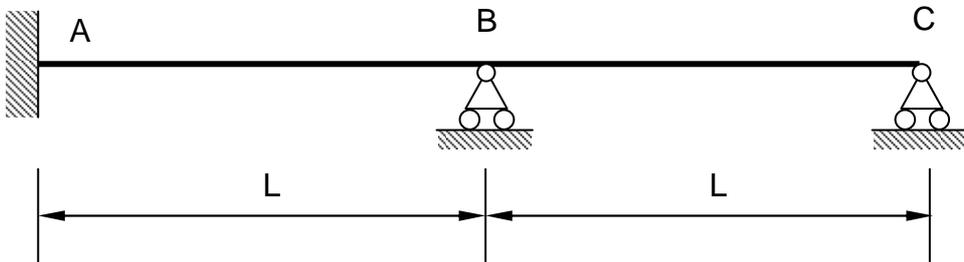
Características mecánicas y geométricas de la viga:

$$E = 200 \text{ GPa}$$

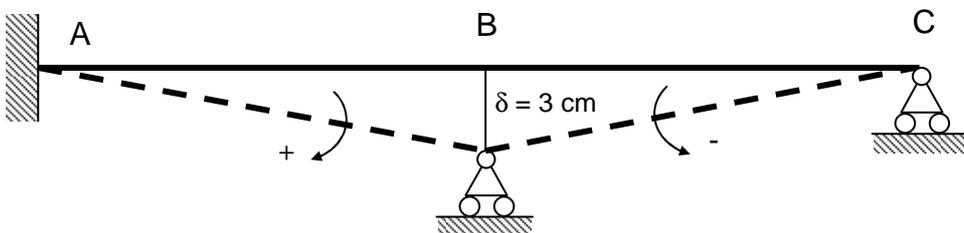
$$I = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$\text{Canto de la viga} = 30 \text{ cm}$$



Si el apoyo B desciende 3 cm. el grado de desplazabilidad de la estructura sería 1, de valor conocido:



La estructura tiene dos barras, así que se tendrán 4 ecuaciones de momentos:

$$M_{AB} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{10} \left[ \theta_A + \frac{1}{2} \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10} \right]$$

$$M_{BA} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{10} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_A + \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10} \right]$$

$$M_{BC} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{10} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_C - \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10} \right]$$

$$M_{CB} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{10} \left[ \theta_C + \frac{1}{2} \theta_B - \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10} \right]$$

De la consideración de los nudos se deducen las 3 ecuaciones siguientes:

$$\theta_A = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} = 0$$

Se tienen ya las 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Resolviendo:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10} + \theta_B + \frac{1}{2} \theta_C - \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10} = 0 \Rightarrow \theta_C = -4\theta_B$$

$$M_{CB} = 0 \Rightarrow \theta_C + \frac{1}{2} \theta_B - \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10} = 0 \Rightarrow -4\theta_B + \frac{1}{2} \theta_B - 4,5 \cdot 10^{-3} = 0$$

$$\theta_B = -1,286 \cdot 10^{-3} \text{ rad. (horario)}$$

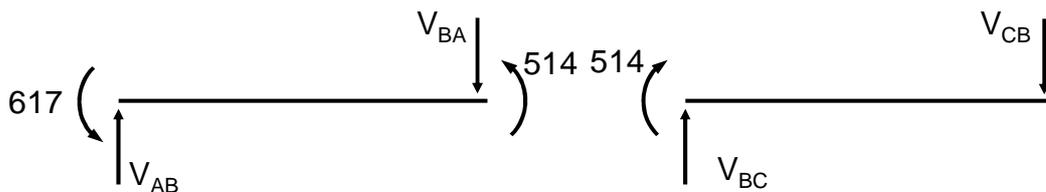
$$\theta_C = -4\theta_B = 5,14 \cdot 10^{-3} \text{ rad. (antihorario)}$$

$$M_{AB} = 617,12 \text{ KN.m (antihorario)}$$

$$M_{BA} = 514,14 \text{ KN.m (antihorario)}$$

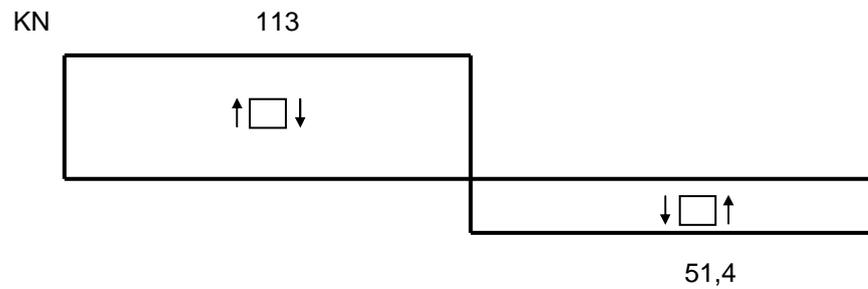
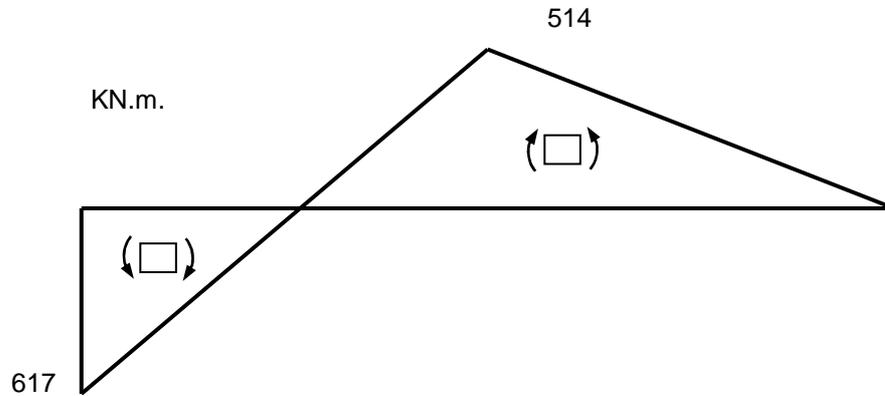
$$M_{BC} = -514,56 \text{ KN.m (horario)}$$

Para dibujar los diagramas de momentos, al no haber cargas aplicadas en ninguna barra, sólo habrá que unir con una línea recta los momentos obtenidos en los extremos (respetando el sentido obtenido).



$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{10} = \frac{-617 - 514}{10} = -113 \text{ KN}$$

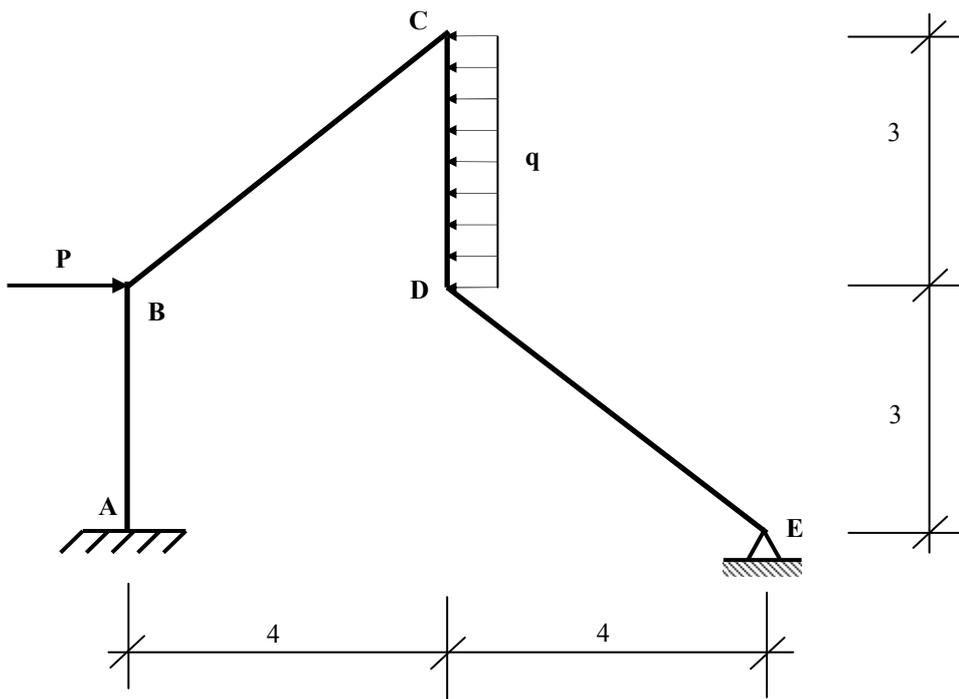
$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{10} = \frac{514}{10} = 51,4 \text{ KN}$$



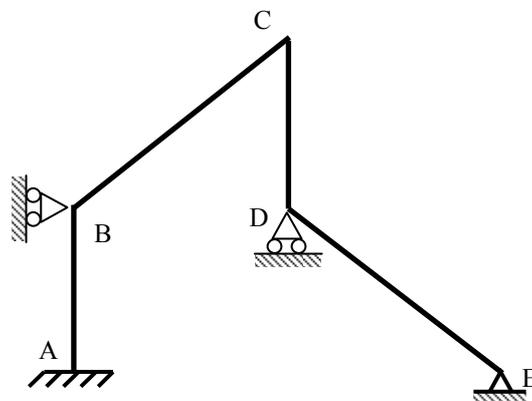
$$\sigma_{xx \max} = \frac{M_{z \max} \cdot y_{\max}}{I} = \frac{617 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} = 46,27 \text{ MPa}$$

- 4.4. La estructura de la figura, cuyas dimensiones y cargas aplicadas se indican, tiene un apoyo empotrado en A y otro articulado en E. Todas las barras son del mismo material, de módulo de elasticidad  $E$ , y tienen la misma sección transversal, con momento de inercia de valor  $I$  constante en toda su longitud.

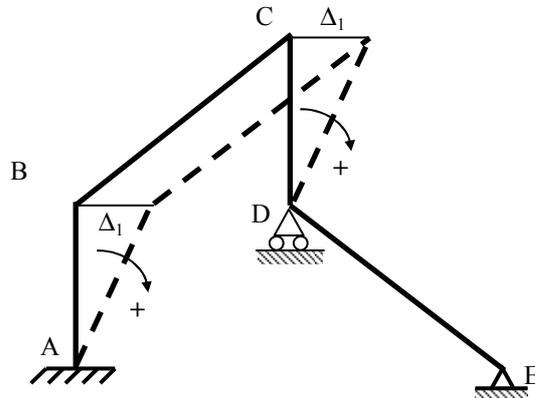
Plantear las ecuaciones necesarias para resolver la estructura por el método de la deformación angular.



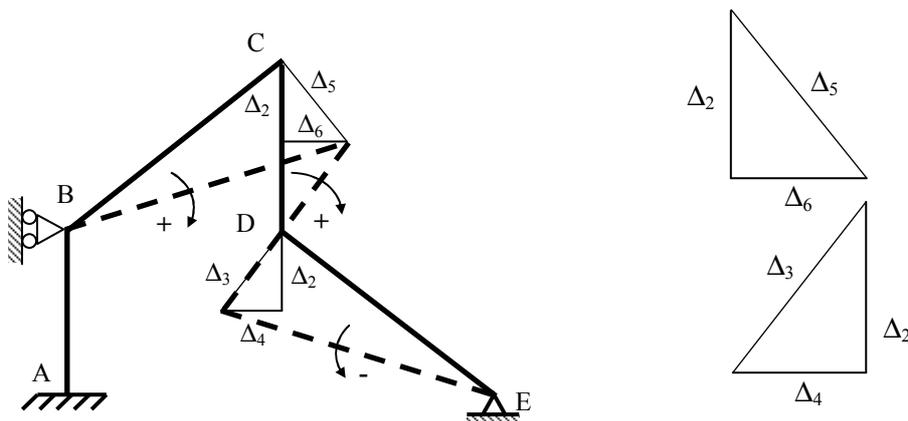
El grado de desplazabilidad de esta estructura es de 2:  $m = 2 \times 5 - 4 - 4 = 2$



Quitando el apoyo en B y dando un desplazamiento  $\Delta_1$  a este nudo, el resto de nudos quedaría de la siguiente manera:



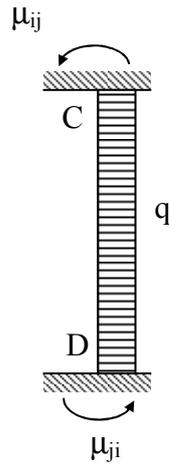
Quitando el apoyo en D y dando un desplazamiento  $\Delta_3$  (componente vertical descendente  $\Delta_2$ ) a este nudo, el resto de nudos se desplazaría como indica la figura:



Por semejanza de triángulos, es posible expresar los desplazamientos de todos los nudos en función de uno sólo, en este caso  $\Delta_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{5}{4} \Delta_2 & \Delta_5 &= \frac{5}{4} \Delta_2 \\ \Delta_4 &= \frac{3}{4} \Delta_2 & \Delta_6 &= \frac{3}{4} \Delta_2 \end{aligned}$$

Para las ecuaciones de los momentos será necesario obtener los momentos de empotramiento perfecto de la barra CD sometida a la carga q:



$$\mu_{ij} = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{q \cdot 3^2}{12}$$

$$\mu_{ji} = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -\frac{q \cdot 3^2}{12}$$

Las 8 ecuaciones de momentos (4 barras) quedan de la siguiente manera:

$$M_{AB} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_A + \frac{1}{2} \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{BA} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_A + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$M_{BC} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5} \left[ \theta_B + \frac{1}{2} \theta_C + \frac{3}{2} \cdot \frac{(5/4 \Delta_2)}{5} \right]$$

$$M_{CB} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5} \left[ \theta_C + \frac{1}{2} \theta_B + \frac{3}{2} \cdot \frac{(5/4 \Delta_2)}{5} \right]$$

$$M_{CD} = \frac{q \cdot 3^2}{12} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_C + \frac{1}{2} \theta_D + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_1 + 6/4 \Delta_2)}{3} \right]$$

$$M_{DC} = -\frac{q \cdot 3^2}{12} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} \left[ \theta_D + \frac{1}{2} \theta_C + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\Delta_1 + 6/4 \Delta_2)}{3} \right]$$

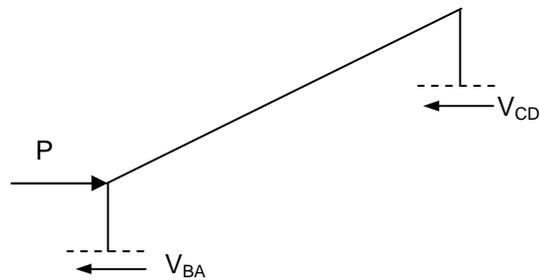
$$M_{DE} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5} \left[ \theta_D + \frac{1}{2} \theta_E + \frac{3}{2} \cdot \frac{(-5/4 \Delta_2)}{5} \right]$$

$$M_{ED} = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{5} \left[ \theta_E + \frac{1}{2} \theta_D + \frac{3}{2} \cdot \frac{(-5/4 \Delta_2)}{5} \right]$$

De la consideración de los cinco nudos se formulan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\theta_A &= 0 \\ M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ M_{CB} + M_{CD} &= 0 \\ M_{DC} + M_{DE} &= 0 \\ M_{ED} &= 0\end{aligned}$$

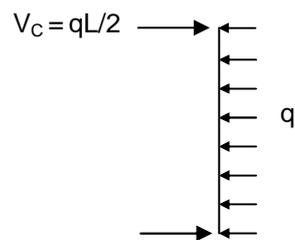
Faltan dos ecuaciones que se obtienen realizando sendos cortes a la estructura. El primero de ellos se muestra a continuación:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{BA} + V_{CD} - P = 0$$

Para el cálculo de los cortantes se aísla la barra correspondiente:

Barra CD:



- 1) Cortante por momentos (horario):  $V_{CD}^{(1)} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{3}$
- 2) Cortante por cargas (horario):  $V_{CD}^{(2)} = \frac{q \cdot L}{2} = \frac{q \cdot 3}{2}$

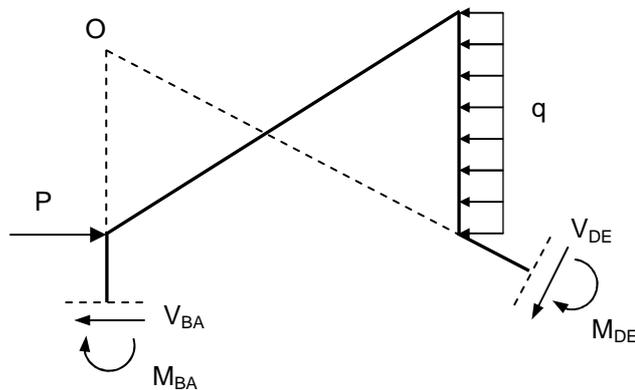
Barra AB:

1) Cortante por momentos (horario):  $V_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{3}$

La primera ecuación de corte queda:

$$\left( \frac{M_{CD} + M_{DC}}{3} + \frac{q \cdot 3}{2} \right) + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{3} - P = 0$$

El segundo y último corte se muestra en la figura siguiente:



Tomando momentos respecto al punto O, los axiles de las barras no aparecen y se tendría la segunda ecuación de corte:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{BA} + V_{BA} \cdot 3 + M_{DE} + V_{DE} \cdot 5 - P \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

Como las barras AB y DE no tienen cargas aplicadas, la ecuación queda finalmente de esta forma:

$$M_{BA} + \frac{M_{BA} + M_{AB}}{3} \cdot 3 + M_{DE} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{5} \cdot 5 - P \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$2M_{BA} + M_{AB} + 2M_{DE} + M_{ED} - 3P + \frac{9q}{2} = 0$$

Obteniendo con esta última ecuación el sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas.