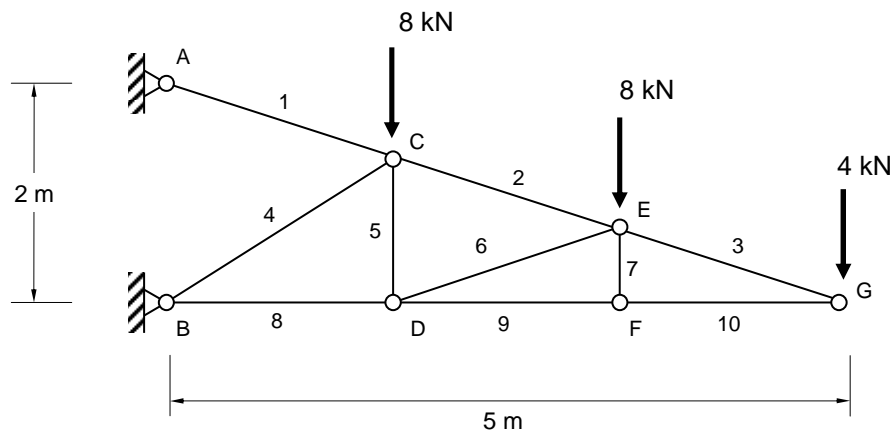


TEMA 2: PROBLEMAS RESUELTOS DE CELOSÍAS

- 2.1. La figura muestra una celosía formada por diversas barras de un mismo material, un acero de módulo de elasticidad $E=210 \text{ GPa}$. La sección de las barras del cordón inferior y de las diagonales es de $6,16 \text{ cm}^2$, las del cordón superior $5,34 \text{ cm}^2$ y $2,67 \text{ cm}^2$ la de los montantes. Las tres barras del cordón inferior tienen la misma longitud. Calcular el desplazamiento vertical que experimenta el nudo G bajo la acción de las cargas indicadas.



Como fácilmente puede comprobarse se trata de una celosía isostática ($b+r=2n$). Para obtener el desplazamiento vertical del nudo G la expresión que debe utilizarse es:

$$\Delta_{Gy} = \sum_{i=1}^{10} \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^v$$

con lo que quedan especificados los elementos que es preciso determinar previamente, y que conviene agrupar en una tabla para facilitar los cálculos.

Se calculan en primer lugar las flexibilidades. Y así, para las barras 1, 2 y 3, que tienen las mismas dimensiones:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1,795}{210 \cdot 10^6 \cdot 5,34 \cdot 10^{-4}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ m/kN}$$

Para las barras 8, 9 y 10:

$$\rho_8 = \rho_9 = \rho_{10} = \frac{1,667}{210 \cdot 10^6 \cdot 6,16 \cdot 10^{-4}} = 12,88 \cdot 10^{-6} \text{ m/kN}$$

y de forma análoga se calculan las flexibilidades para las restantes barras.

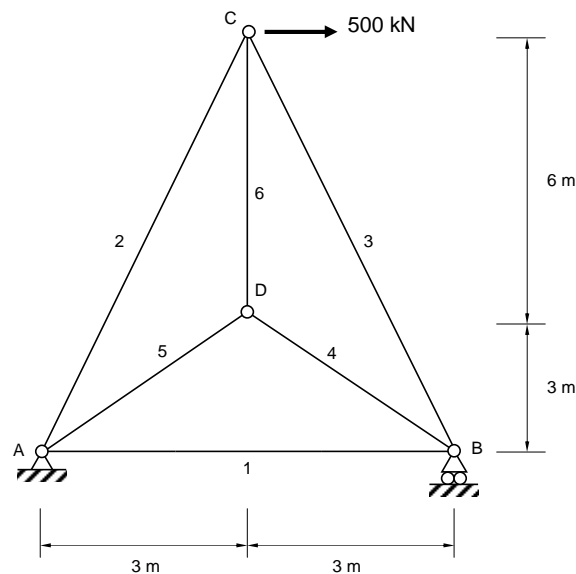
A continuación, aplicando el método de los nudos se calculan los esfuerzos en las barras N_i debidos a las cargas aplicadas, así como los esfuerzos N_i^v debidos a una carga virtual unidad aplicada en el nudo G. Sus respectivos valores, así como los de las flexibilidades, se recogen en la siguiente tabla:

Barra i	$\rho_i \cdot 10^6$ (m/kN)	N_i (kN)	N_i^v	$\rho_i \cdot N_i \cdot N_i^v \cdot 10^6$
1	16	32,36	2,7	1397,95
2	16	21,54	2,7	930,53
3	16	10,77	2,7	465,26
4	16,5	-12,83	0	0
5	23,78	4	0	0
6	13,88	-10,77	0	0
7	11,89	0	0	0
8	12,88	-20	-2,5	644
9	12,88	-10	-2,5	322
10	12,88	-10	-2,5	322

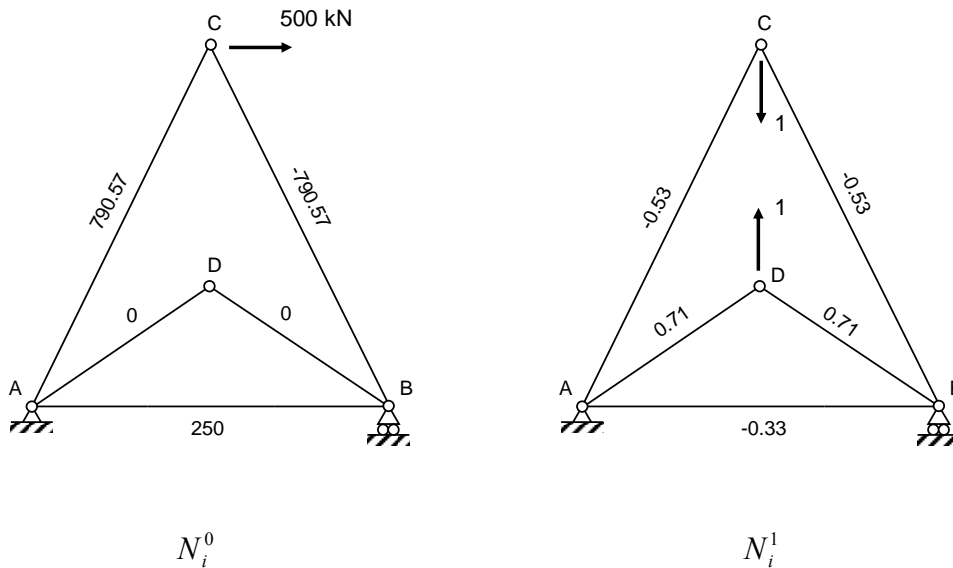
Finalmente, el valor del desplazamiento vertical de G no es sino la suma de los elementos agrupados en la última columna, es decir:

$$\Delta_{Gy} = \sum_{i=1}^{10} \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^v = 4081,74 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4,08 \text{ mm}$$

- 2.2.** En la celosía de la figura las barras 1, 2 y 3 tienen una sección de 60 cm^2 , y las 4, 5 y 6 una sección de 30 cm^2 . Todas son del mismo material de módulo de elasticidad $E=210 \text{ GPa}$. Bajo la acción de la carga indicada, calcular los esfuerzos en las barras.



Se trata de una celosía hiperestática de grado 1 ($h=b+r-2n=1$). Se elige como incógnita hiperestática X_1 el esfuerzo en la barra 6. Eliminada esta barra, en la celosía isostática resultante se calculan, por el método de los nudos, los esfuerzos N_i^0 en las barras debidos a la carga exterior aplicada de 500 kN, así como los N_i^1 debidos a una carga unidad en la dirección de la barra 6. Los valores que se obtienen, así como los de las flexibilidades de las barras, se incorporan en la tabla correspondiente.



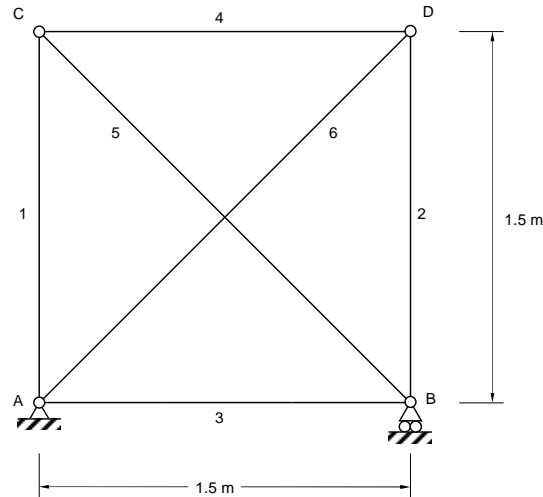
Barra \underline{i}	$\rho_i \cdot 10^6$ (m/kN)	N_i^0 (kN)	N_i^1	$N_i = N_i^0 + X_1 \cdot N_i^1$	$\rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 \cdot 10^6$	N_i (kN)
1	4,76	250	-0,33	$250 - 0,33 \cdot X_1$	$-392,7 + 0,52 \cdot X_1$	243,85
2	7,53	790,57	-0,53	$790,57 - 0,53 \cdot X_1$	$-3155,09 + 2,12 \cdot X_1$	780,69
3	7,53	-790,57	-0,53	$-790,57 - 0,53 \cdot X_1$	$3155,09 + 2,12 \cdot X_1$	-800,45
4	6,73	0	0,71	$0,71 \cdot X_1$	$3,39 \cdot X_1$	13,24
5	6,73	0	0,71	$0,71 \cdot X_1$	$3,39 \cdot X_1$	13,24
6	9,52	0	1	X_1	$9,52 \cdot X_1$	18,65

La ecuación de compatibilidad a aplicar es la planteada a continuación, teniendo en cuenta que la incógnita hiperestática está incluida en la expresión de los esfuerzos en las barras. Por consiguiente:

$$\sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 = -392,7 + 21,06 \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 18,65 \text{ kN}$$

Calculada la incógnita hiperestática, la obtención de los esfuerzos en las barras es inmediata. Sus valores figuran en la última columna de la tabla.

- 2.3. La estructura articulada de la figura, en la que $L=1,5\text{ m}$, se construye sin la barra BC. Posteriormente se inserta la citada barra, que por defecto de construcción es una longitud $\Delta=1\text{ mm}$ mayor de la debida. Calcular los esfuerzos en las barras. Todas tienen la misma sección $A=5\text{ cm}^2$ y son del mismo material de módulo de elasticidad $E=200\text{ GPa}$.



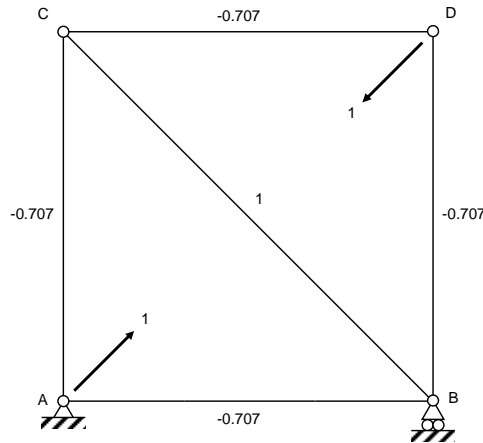
Se trata de una estructura hiperestática de grado 1. Se elige como incógnita hiperestática X_1 el esfuerzo en la barra 6.

La ecuación de compatibilidad a aplicar es la planteada a continuación, teniendo en cuenta las expresiones para los esfuerzos en las barras, y la ecuación para incluir el error en la longitud de la barra 5. Puesto que no hay aplicadas fuerzas exteriores, la ecuación (2.25) puede expresarse en la forma:

$$X_1 \cdot \sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot N_i^1 \cdot N_i^1 = -\sum_{i=1}^6 \lambda_i \cdot N_i^1 = -\lambda_5 \cdot N_5^1$$

siendo preciso calcular los esfuerzos en las barras debidos a una carga unidad en la dirección de la barra 6. En la siguiente figura se indican dichos esfuerzos, los cuales, junto con las flexibilidades de las barras, se incluyen en la tabla adecuada.

Barra i	$\rho_i \cdot 10^5$ (m/kN)	N_i^1	$\rho_i \cdot N_i^1 \cdot N_i^1 \cdot 10^5$	N_i (kN)
1	1,5	-0,707	0,75	9,77
2	1,5	-0,707	0,75	9,77
3	1,5	-0,707	0,75	9,77
4	1,5	-0,707	0,75	9,77
5	2,12	1	2,12	-13,81
6	2,12	1	2,12	-13,81



$$N_i^1$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_5 = 10^{-3} m$, resulta finalmente para la ecuación de compatibilidad:

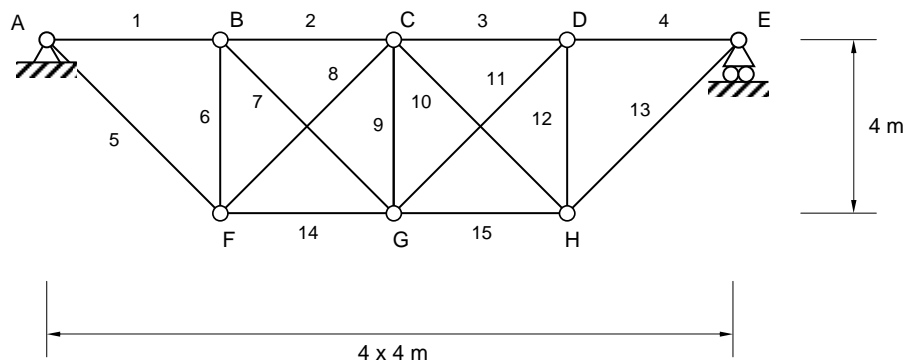
$$7,24 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = -10^{-3} \Rightarrow X_1 = -13,81 \text{ kN}$$

y los esfuerzos en las barras vienen dados por la expresión:

$$N_i = X_1 \cdot N_i^1$$

y se recogen en la última columna de la tabla.

- 2.4.** Calcular los esfuerzos en las barras y el desplazamiento vertical del nudo G en la celosía de la figura, cuando se produce un calentamiento de $40^\circ C$ en todo el cordón superior ABCDE, y no actúan fuerzas exteriores. Todas las barras tienen las mismas propiedades: módulo de elasticidad $E=200 \text{ GPa}$, coeficiente de dilatación lineal $\alpha=10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y sección $A=20 \text{ cm}^2$.



Se trata de una celosía hiperestática de grado $h=2$. Puesto que la hiperestaticidad está localizada en los paneles BCFG y CDGH, las incógnitas redundantes deben elegirse entre las barras que forman dichos paneles: se adoptan los esfuerzos en

las barras BG(7) y GD(11). La estructura resultante de suprimir estas barras es la celosía isostática básica.

El sistema de ecuaciones a emplear es el siguiente:

$$\sum_{k=1}^2 X_k \cdot \sum_{i=1}^{15} \rho_i \cdot N_i^j \cdot N_i^k = -\sum_{i=1}^{15} N_i^0 \cdot \rho_i \cdot N_i^j - \sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^j \quad (j=1,2)$$

Al no haber ninguna fuerza exterior aplicada, los esfuerzos N_i^0 son todos nulos, con lo que el sistema de ecuaciones anterior queda:

$$X_1 \cdot \sum_{i=1}^{15} \rho_i \cdot N_i^1 \cdot N_i^1 + X_2 \cdot \sum_{i=1}^{15} \rho_i \cdot N_i^1 \cdot N_i^2 = -\sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^1$$

$$X_1 \cdot \sum_{i=1}^{15} \rho_i \cdot N_i^2 \cdot N_i^1 + X_2 \cdot \sum_{i=1}^{15} \rho_i \cdot N_i^2 \cdot N_i^2 = -\sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^2$$

Por consiguiente, los valores a calcular son: las flexibilidades de las barras, los esfuerzos para los dos casos hiperestáticos, y los alargamientos de las barras debidos a las variaciones de temperatura. Una vez obtenidos se incorporan a la tabla correspondiente.

a) Flexibilidades.

Las barras de los cordones superior e inferior y de los montantes tienen la misma flexibilidad, de valor:

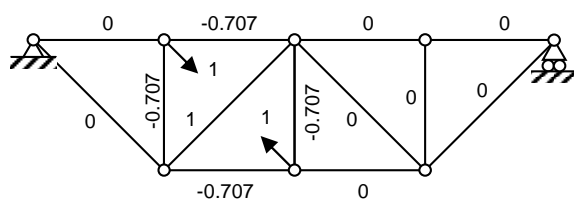
$$\rho_i = \frac{\ell_i}{E_i \cdot A_i} = \frac{4}{200 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 10^{-5} \text{ m/kN} \quad (i=1,2,3,4,6,9,12,14,15)$$

Para las diagonales:

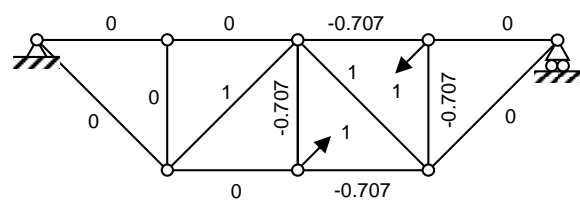
$$\rho_i = \frac{\ell_i}{E_i \cdot A_i} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{200 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 1,414 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN} \quad (i=7,8,10,11)$$

b) Casos hiperestáticos.

En las respectivas figuras se indican los esfuerzos originados en las barras, cuyo cálculo es inmediato.



Caso 1 (N_i^1)



Caso 2 (N_i^2)

c) Efectos de la temperatura.

Son términos de la forma: $\sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^j$, donde $\lambda_i = \alpha_i \cdot \Delta T_i \cdot L_i$, y hay que tener en cuenta que sólo experimentan variaciones de temperatura las barras del cordón superior (i=1,2,3,4).

Ahora bien, al ser $N_1^1 = N_1^2 = N_4^1 = N_4^2 = 0$, sólo tiene influencia el incremento de temperatura de las barras 2 y 3, pero no influye para nada el calentamiento de las barras 1 y 4. Tiene una explicación lógica: estas últimas están situadas en la zona isostática de la estructura y por lo tanto no tienen influencia en los esfuerzos de origen térmico. Por consiguiente, se obtiene para los términos independientes del sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^1 = \lambda_2 \cdot N_2^1 + \lambda_3 \cdot N_3^1 = \lambda_2 \cdot N_2^1 = (\alpha \cdot L \cdot \Delta T)_2 \cdot N_2^1 = 10^{-5} \cdot 4 \cdot 40 \cdot (-0,707) = -1.1312 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^2 = \lambda_2 \cdot N_2^2 + \lambda_3 \cdot N_3^2 = \lambda_3 \cdot N_3^2 = (\alpha \cdot L \cdot \Delta T)_3 \cdot N_3^2 = 10^{-5} \cdot 4 \cdot 40 \cdot (-0,707) = -1.1312 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

con lo que sólo resta por calcular cada uno de los coeficientes que afectan a las incógnitas hiperestáticas en dicho sistema. Para ello sirve de ayuda confeccionar la siguiente tabla (expresados todos los valores en m y kN):

i	$\rho_i \cdot 10^5$	N_i^1	N_i^2	$\rho_i \cdot N_i^1 \cdot N_i^1 \cdot 10^5$	$\rho_i \cdot N_i^1 \cdot N_i^2 \cdot 10^5$	$\rho_i \cdot N_i^2 \cdot N_i^2 \cdot 10^5$	N_i	N_i^{0V}
1	1	0	0	0	0	0	0	-0,5
2	1	-0,707	0	0,5	0	0	-15,01	-0,5
3	1	0	-0,707	0	0	0,5	-15,01	-0,5
4	1	0	0	0	0	0	0	-0,5
5	1,414	0	0	0	0	0	0	0,707
6	1	-0,707	0	0,5	0	0	-15,01	0
7	1,414	1	0	1,414	0	0	21,23	-
8	1,414	1	0	1,414	0	0	21,23	-0,707
9	1	-0,707	-0,707	0,5	0,5	0,5	-30,02	1
10	1,414	0	1	0	0	1,414	21,23	-0,707
11	1,414	0	1	0	0	1,414	21,23	-
12	1	0	-0,707	0	0	0,5	-15,01	0
13	1,414	0	0	0	0	0		0,707
14	1	-0,707	0	0,5	0	0	-15,01	1
15	1	0	-0,707	0	0	0,5	-15,01	1
				4,828	0,5	4,828		

Con lo que el sistema de ecuaciones será:

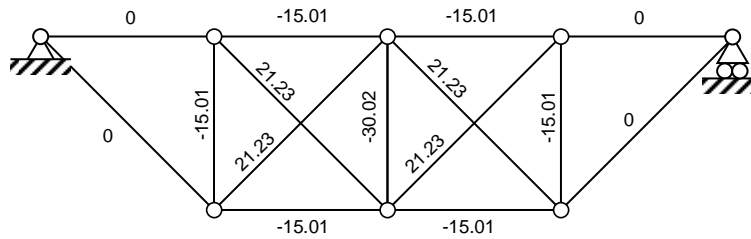
$$(4,828 \cdot X_1 + 0,5 \cdot X_2) \cdot 10^{-5} = 1.1312 \cdot 10^{-3}$$

$$(0,5 \cdot X_1 + 4,828 \cdot X_2) \cdot 10^{-5} = 1.1312 \cdot 10^{-3}$$

obteniéndose para las incógnitas:

$$X_1 = X_2 = 21,23 \text{ kN}$$

Los esfuerzos finales en las barras ($N_i = N_i^0 + X_1 \cdot N_i^1 + X_2 \cdot N_i^2$) figuran en la tabla. Se observa que sólo están cargadas las barras situadas en la zona hiperestática. En la zona isostática las variaciones de temperatura no dan lugar a ningún esfuerzo.



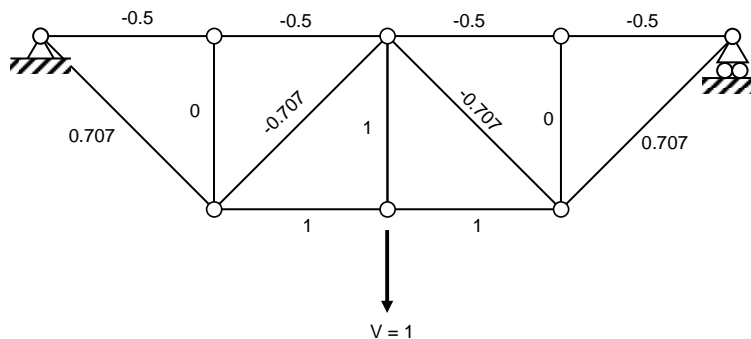
Esfuerzos N_i finales

Cálculo del desplazamiento vertical del nudo G

Viene dado por la ecuación:

$$\Delta_{Gy} = \sum_{i=1}^{15} \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V} + \sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^{0V}$$

donde N_i son los esfuerzos en las barras, ya calculados, y N_i^{0V} son los esfuerzos en las barras de la estructura isostática básica resultantes de aplicar la fuerza virtual unidad hacia abajo en G. Estos esfuerzos son fácilmente calculables por el método de los nudos o el de las secciones y se muestran en la siguiente figura y también en la última columna de la tabla.



Esfuerzos N_i^{0V}

Luego:
$$\sum_{i=1}^{15} \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V} = -87,48 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

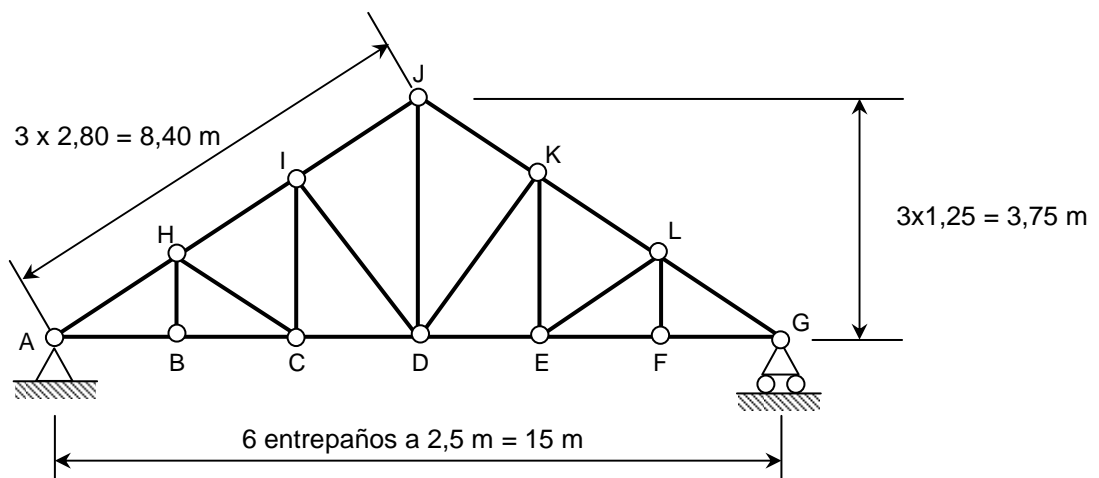
y:
$$\sum_{i=1}^{15} \lambda_i \cdot N_i^{0V} = 4 \cdot (10^{-5} \cdot 4 \cdot 40) \cdot (-0,5) = -320 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

es decir:
$$\Delta_{Gy} = (-87,48 - 320) \cdot 10^{-5} = -407,48 \cdot 10^{-5} \text{ m} = -4,075 \text{ mm}$$

A esta deformación colaboran, por el primer sumando, todas las barras que tienen esfuerzo N no nulo (es decir, las situadas en la zona hiperestática) y, por el segundo sumando, aquellas barras que tienen temperatura aplicada (λ no nulo) y esfuerzo no nulo en el caso virtual. A este segundo sumando colaboran las cuatro barras del cordón superior.

De este ejemplo se deduce, y la conclusión es general, que en estructuras cargadas únicamente con cargas de origen térmico, sólo aparecen esfuerzos en las zonas de la estructura que son hiperestáticas, pero no en las zonas que son isostáticas. Las deformaciones se producen en toda la estructura: en las zonas hiperestáticas la deformación producida por el esfuerzo axial (término $\sum \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V}$) se suma a la deformación térmica (término $\sum \lambda_i \cdot N_i^{0V}$). En las zonas isostáticas sólo se originan deformaciones de origen térmico ($\sum \lambda_i \cdot N_i^{0V}$).

- 2.5.** La cercha de cubierta de la figura está simplemente apoyada sobre dos muros. Se trata de una cercha intermedia de una serie de ellas separadas 5 metros entre ejes. El entramado está dispuesto de forma tal que las cargas del tejado están aplicadas únicamente en los nudos del cordón superior. El tejado, incluyendo las correas, pesa 34,6 kg por m² de superficie de cubierta; la cercha misma pesa 150 kg por metro en horizontal, con el peso repartido por igual entre los nudos de los cordones superior e inferior. Se considerará una carga de nieve de 160 kg por m² de superficie horizontal de proyección de tejado. La carga de hielo se tomará de 80 kg por m² de superficie horizontal. Para las cargas de viento, de acuerdo con normativa, se adoptará una succión a barlovento de valor 30 kg/m² y para el lado de sotavento una succión de valor 75 kg/m².



Analizar la cercha para las siguientes combinaciones de carga:

- 1) Carga permanente más nieve sobre toda la cubierta.
- 2) Carga permanente más viento más nieve en el lado de sotavento.
- 3) Carga permanente más hielo en toda la cubierta más viento.

A) Carga permanente del conjunto cercha y tejado

Dado que en todas las hipótesis de carga a considerar están presentes, comenzaremos por determinar las cargas permanentes.

El peso propio de la cercha de 150 kg/m se reparte de la siguiente manera:

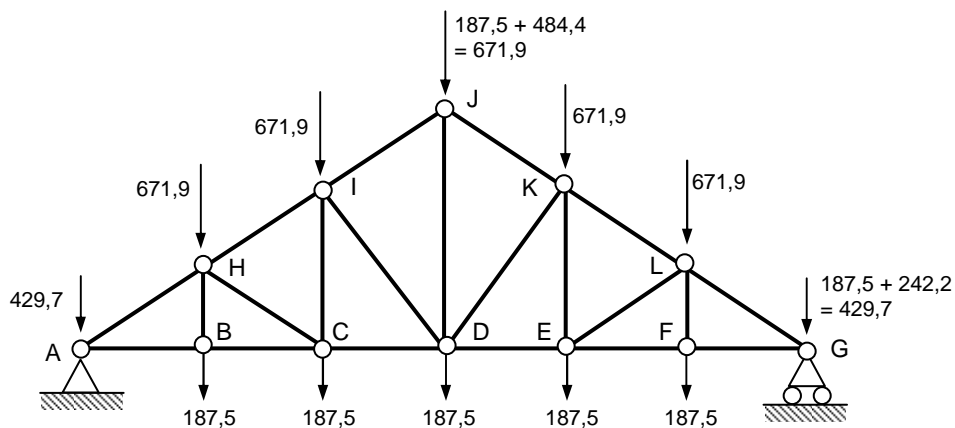
Nudos intermedios B a F: $150 \text{ kg/m} \times (2,5 \text{ m})/2 \text{ nudos} = 187,5 \text{ kg}$.

Nudos extremos A y G: $150 \text{ kg/m} \times (2,5/2 \text{ m})/1 \text{ nudos} = 187,5 \text{ kg}$.

El peso del entramado de cubierta, se reparte en los nudos del cordón superior:

Nudos intermedios B a F: $34,6 \text{ kg/m}^2 \times 2,8 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 484,4 \text{ kg}$.

Nudos extremos A y G: $34,6 \text{ kg/m}^2 \times (2,8/2) \text{ m} \times 5 \text{ m} = 242,2 \text{ kg}$.

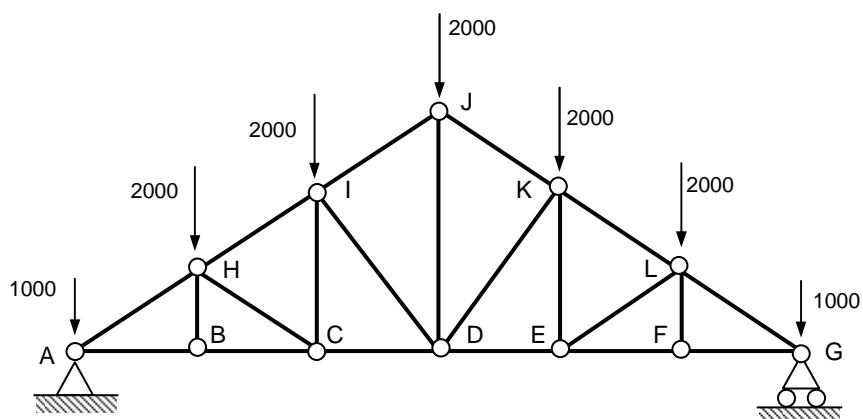


Cargas debidas al peso propio de la cercha y de la cubierta

B) Carga de Nieve: 160 kg/m² de superficie horizontal.

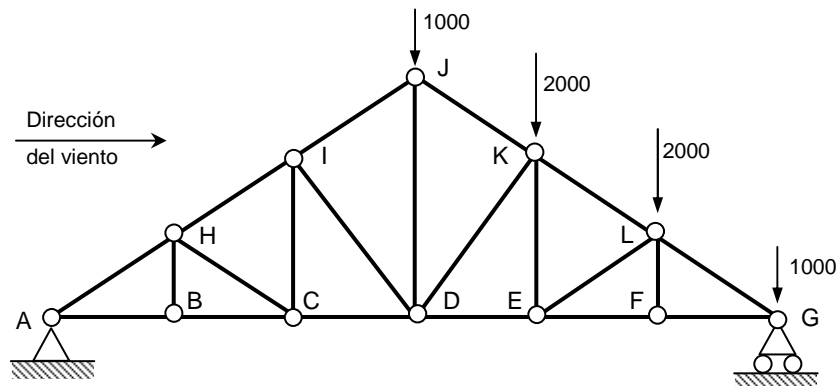
Nudos intermedios B a F: $160 \text{ kg/m}^2 \times 2,5 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 2000 \text{ kg}$.

Nudos extremos A y G: (la mitad) = 1000 kg.



Cargas debidas al peso de la Nieve

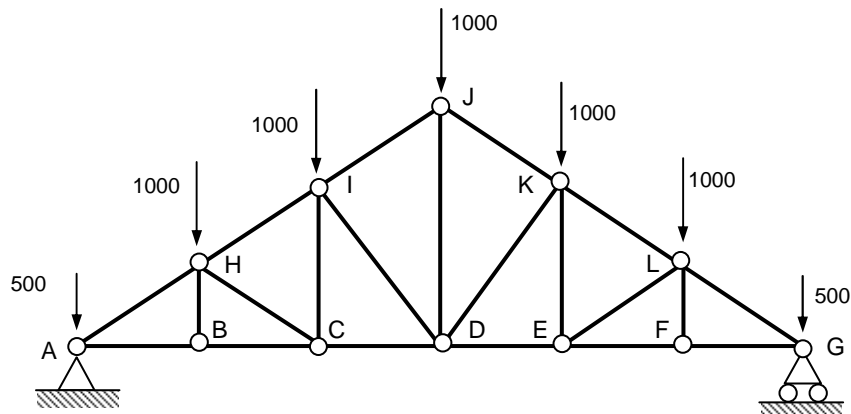
Para la hipótesis de carga en la que hemos de considerar nieve únicamente en el lado de sotavento, las cargas serán:



Cargas debidas al peso de la nieve en sotavento

C) Peso del Hielo: 80 kg/m² de superficie horizontal.

Este caso se reduce a la mitad de carga que en el caso de nieve.



D) Cargas debidas a la acción del viento

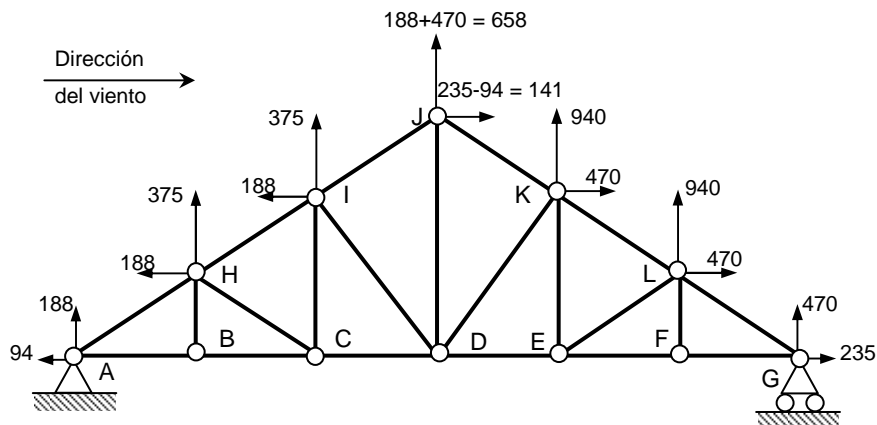
Para cada nudo de barlovento (succión de 30 kg/m²), la carga es perpendicular al cordón superior y tiene de módulo:

$$30 \times 2,8 \times 5 = 420 \text{ kg (en A la mitad)}$$

Para cada nudo de sotavento (succión de 75 kg/m²), la carga es perpendicular al cordón superior y tiene de módulo:

$$75 \times 2,8 \times 5 = 1050 \text{ kg (en G la mitad)}$$

En la siguiente figura se representan estas cargas, debidas a la acción del viento, mediante su componente horizontal y vertical sobre cada nudo de la celosía.

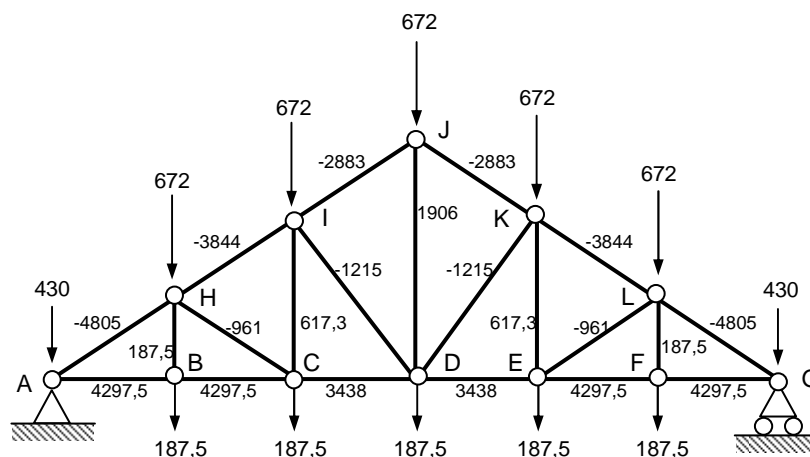


El siguiente paso consiste en el cálculo de los esfuerzos axiles en cada barra, para cada uno de los estados simples de carga. Estos resultados nos servirán para obtener los esfuerzos resultantes en cada barra para las diferentes hipótesis de carga que se han de comprobar, para lo cual posteriormente haremos uso del principio de superposición.

Caso A) Carga permanente del conjunto cercha y tejado

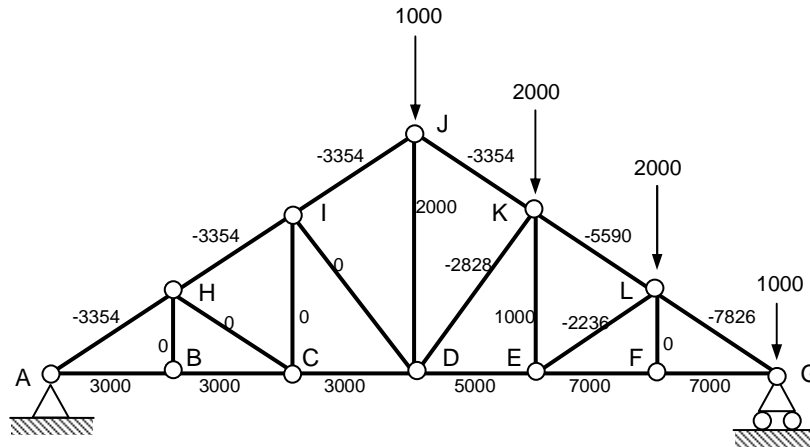
En la figura se representan los esfuerzos calculados en cada barra para este estado simple carga: signo (+) tracción, signo (-) compresión).

Los valores de las acciones se han redondeado para eliminar decimales.

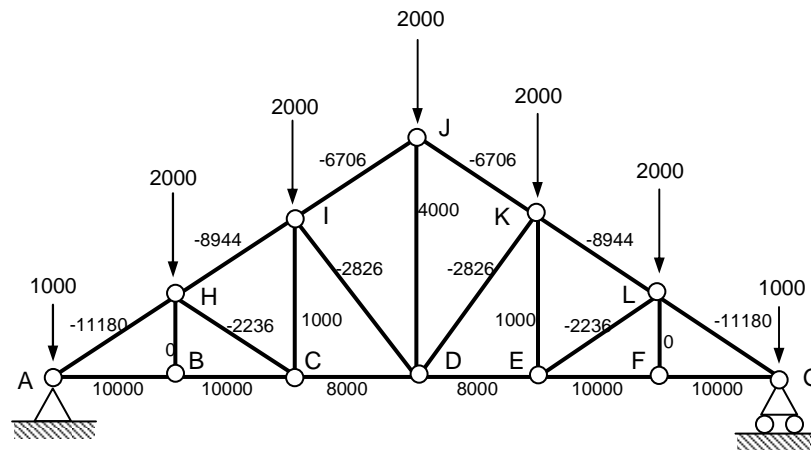


Caso B) Cargas de Nieve

En una de las hipótesis de carga hemos de considerar carga de nieve tan solo en el lado de sotavento. El cálculo de los esfuerzos de cada barra para esta situación conduce a los resultados de la figura:



Para el cálculo de carga de nieve sobre todo el tejado, podemos obtener los esfuerzos en las barras a partir del caso anterior, aplicando superposición:

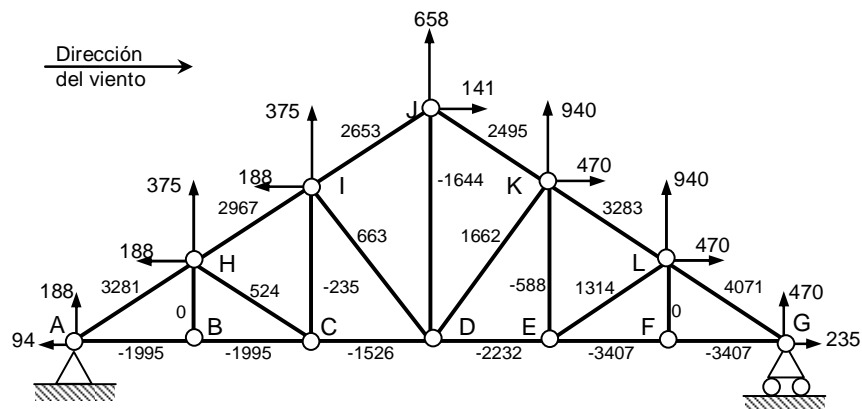


Caso C) Cargas de Hielo

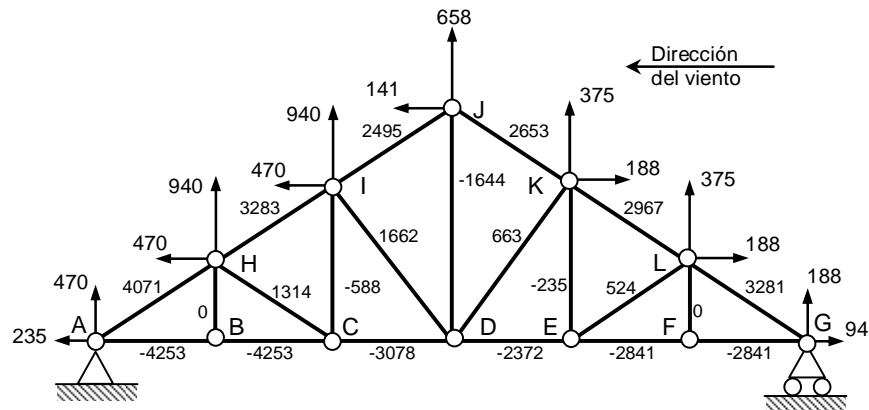
Las cargas de hielo son exactamente la mitad que las de nieve y por tanto los esfuerzos en cada barra también serán la mitad.

Caso D) Cargas de Viento

Los esfuerzos calculados en cada barra para el caso de carga de viento actuando por la izquierda son:



Los esfuerzos calculados en cada barra para el caso de carga de viento actuando por la derecha son:



Los resultados para estos casos simples de carga se recogen en la siguiente tabla, donde cada una de las columnas, refleja los siguientes valores:

CP = Esfuerzos de cada barra debidos al peso de la cercha y de la cubierta.

N = Esfuerzos de cada barra con nieve en toda la cubierta

N_s/N_b = Esfuerzos con nieve tan solo en sotavento (dos alternativas para cada barra según el viento sople en una dirección o la contraria).

H = Esfuerzos en cada barra para la carga de Hielo.

V = Esfuerzos en cada barra para la carga de Viento (dos alternativas según posibles direcciones del viento).

CP + N = Primera hipótesis de carga
 CP + V + N_s = Segunda hipótesis de carga
 CP + V + H = Tercera hipótesis de carga

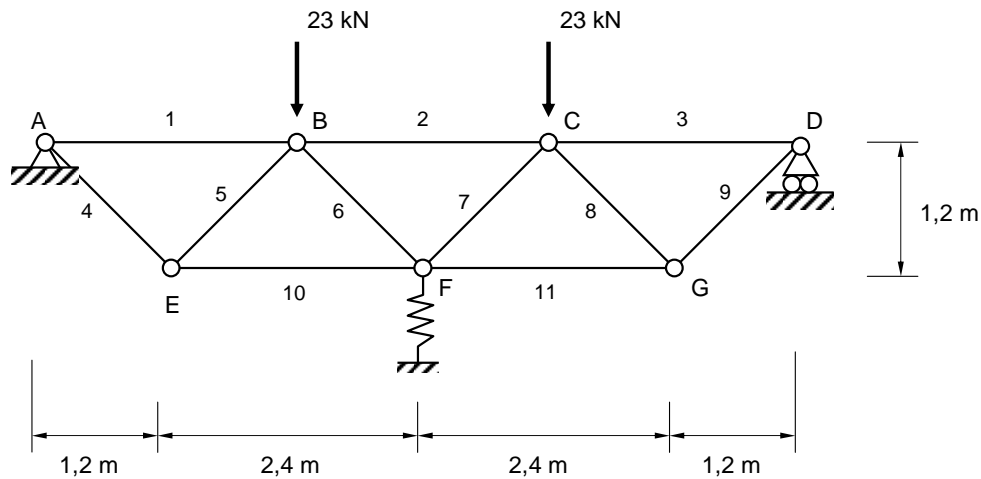
Barra	CP	N	N _s /N _b	H	V	(1)	(2)	(3)	Fuerza de barra máxima	Combinación de Cargas
						CP+N	CP+V+N _s	CP+V+H		
AB	4297,5	10000	3000 7000	5000	-1995 -4253	14297,5	5302,5 7044,5	7302,5 5044,5	14297,5	(1)
BC	4297,5	10000	3000 7000	5000	-1995 -4253	14297,5	5302,5 7044,5	7302,5 5044,5	14297,5	(1)
CD	3438,0	8000	3000 5000	4000	-1526 -3078	11438,0	4912,0 5360,0	5912,0 4360,0	11438,0	(1)
DE	3438,0	8000	3000 5000	4000	-2232 -2372	11438,0	4206,0 4066,0	5206,0 5066,0	11438,0	(1)
EF	4297,5	10000	7000 3000	5000	-3407 -2841	14297,5	7890,5 4456,5	5890,5 6456,5	14297,5	(1)
FG	4297,5	10000	7000 3000	5000	-3407 -2841	14297,5	7890,5 4456,5	5890,5 6456,5	14297,5	(1)
AH	-4805,0	-11180	-3354 -7826	-5590	3281 4071	-15985,0	-4878,0 -8560,0	-7114,0 -6324,0	-15985,0	(1)
HI	-3844,0	-8944	-3354 -5590	-4472	2967 3283	-12788,0	-4231,0 -6151,0	-5349,0 -5033,0	-12788,0	(1)
IJ	-2883,0	-6708	-3354 -3354	-3354	2653 2495	-9591,0	-3584,0 -3742,0	-3584,0 -3742,0	-9591,0	(1)
JK	-2883,0	-6708	-3354 -3354	-3354	2495 2653	-9591,0	-3742,0 -3584,0	-3742,0 -3584,0	-9591,0	(1)
KL	-3844,0	-8944	-5590 -3354	-4472	3283 2977	-12788,0	-6151,0 -4231,0	-5033,0 -5349,0	-12788,0	(1)
GL	-4805,0	-11180	-7826 -3354	-5590	4071 3281	-15985,0	-8560,0 -4878,0	-6324,0 -7114,0	-15985,0	(1)
BH	187,5	0	0 0	0	0 0	187,5	187,5 187,5	187,5 187,5	187,5	(1), (2), (3)
CH	-961,0	-2236	0 -2236	-1118	524 1314	-3197,0	-437,0 -1883,0	-1555,0 -765,0	-3197,0	(1)
CI	617,3	1000	0 1000	500	-235 -588	1617,3	382,3 1029,3	882,3 529,3	1617,3	(1)
DI	-1215,0	-2828	0 -2828	-1414	663 1662	-4043,0	-552,0 -2381,0	-1966,0 -967,0	-4043,0	(1)
DJ	1906,0	4000	2000	2000	-1644	5906,0	2262,0	2262,0	5906,0	(1)
DK	-1215,0	-2828	-2828 0	-1414	1662 663	-4043,0	-2381,0 -552,0	-967,0 -1966,0	-4043,0	(1)
EK	617,3	1000	1000 0	500	-588 -235	1617,3	1029,3 382,3	529,3 882,3	1617,3	(1)
EL	-961,0	-2236	-2236 0	-1118	1314 524	-3197,0	-1883,0 -437,0	-765,0 -1555,0	-3197,0	(1)
FL	187,5	0	0 0	0	0 0	187,5	187,5 187,5	187,5 187,5	187,5	(1), (2), (3)

Observando los esfuerzos de cada barra en cada una de los hipótesis de carga, se toman los valores máximos (décima columna) para dimensionar la sección de las barras.

En la práctica las hipótesis de carga a considerar son múltiples y se forman por combinación de los estados simples de carga, con coeficientes de ponderación recomendados por las diferentes normativas.

2.6. La estructura en celosía de la figura se compone de barras de acero de sección circular de 5 cm de diámetro y módulo de elasticidad $E=210$ GPa. El apoyo del nudo F tiene capacidad de asiento y puede ser simulado mediante un resorte de constante $k= 35$ kN/cm. Está sometida a la acción de dos cargas verticales de 23 kN en los nudos B y C, tal y como se indica. Se pide:

- Obtención de los esfuerzos en todas las barras de la estructura.
- Asiento que se produce en el nudo F.



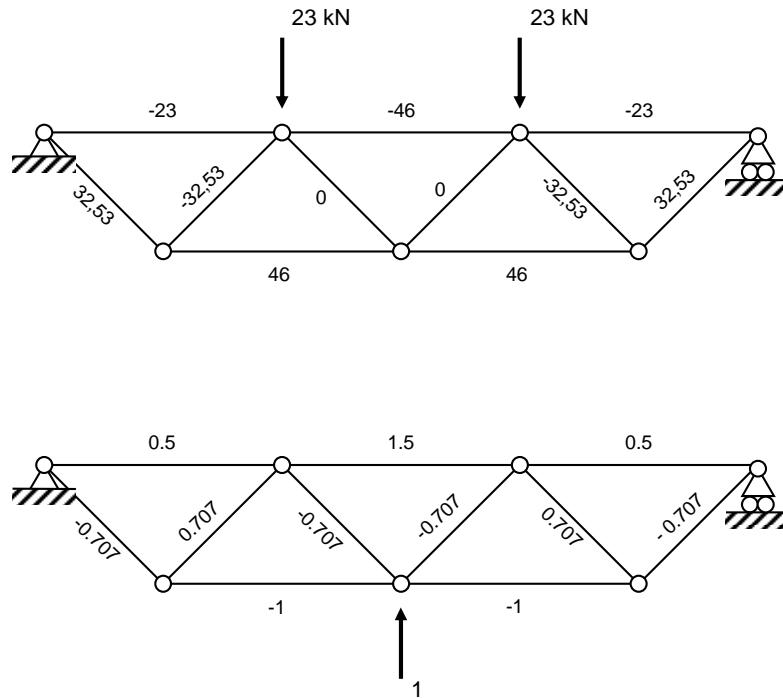
Se trata de una celosía hiperestática de grado 1. Como incógnita hiperestática se elige la reacción X en el resorte. La ecuación de compatibilidad a emplear, particularizada a esta estructura, se formula como:

$$\sum_{i=1}^{11} \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 = -\frac{X}{k}$$

siendo:

$$N_i = N_i^0 + X \cdot N_i^1$$

siendo necesario, por tanto, calcular las flexibilidades así como los esfuerzos en las barras de la celosía isostática básica (la de partida prescindiendo del resorte), tanto bajo la acción de las cargas exteriores como de una carga unidad aplicada en el nudo F y en el sentido indicado. Los valores obtenidos se indican en las respectivas figuras y se incluyen en la tabla.



Barra i	$\rho_i \cdot 10^6$ (m/kN)	N_i^0 (kN)	N_i^1	$N_i = N_i^0 + X \cdot N_i^1$	$\rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 \cdot 10^6$	N_i (kN)
1	5,82	-23	0,5	$-23+0,5X$	$-66,93+1,46X$	-20,78
2	5,82	-46	1,5	$-46+1,5X$	$-401,58+13,1X$	-39,33
3	5,82	-23	0,5	$-23+0,5X$	$-66,93+1,46X$	-20,78
4	4,12	32,53	-0,707	$32,53-0,707X$	$-94,75+2,06X$	29,38
5	4,12	-32,53	0,707	$-32,53+0,707X$	$-94,75+2,06X$	-29,38
6	4,12	0	-0,707	$-0,707X$	$2,06X$	-3,15
7	4,12	0	-0,707	$-0,707X$	$2,06X$	-3,15
8	4,12	-32,53	0,707	$-32,53+0,707X$	$-94,75+2,06X$	-29,38
9	4,12	32,53	-0,707	$32,53-0,707X$	$-94,75+2,06X$	29,38
10	5,82	46	-1	$46-X$	$-267,72+5,82X$	41,55
11	5,82	46	-1	$46-X$	$-267,72+5,82X$	41,55
					$-1.449,88+40,02X$	

Por consiguiente, teniendo en cuenta la ecuación de compatibilidad:

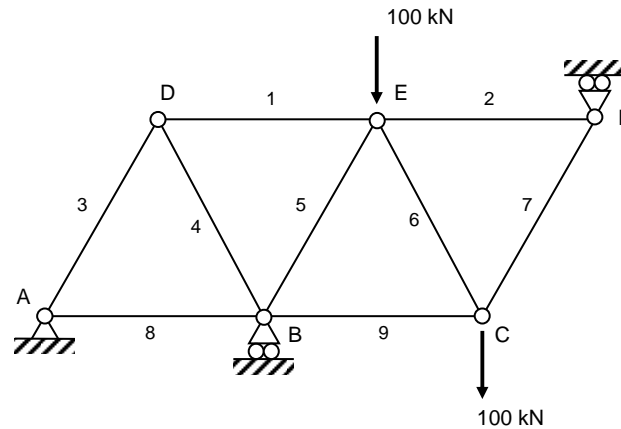
$$(-1449,88 + 40,02 \cdot X) \cdot 10^{-6} = -\frac{X}{3500} \Rightarrow X = 4,45 \text{ kN}$$

con lo que los esfuerzos en las barras serán los indicados en la última columna de la tabla, y el acortamiento del resorte:

$$\delta = \frac{X}{k} = \frac{4,45}{35} = 0,127 \text{ cm}$$

2.7. La estructura de la figura es una celosía con un apoyo fijo en A y apoyos deslizantes en B y en F. Recibe dos cargas verticales de 100 kN en los nudos E y C. Todas las barras son de acero de módulo de elasticidad $E=200$ GPa y tienen la misma longitud $L=3$ m y sección $A=5$ cm². Se pide:

- Reacciones en los apoyos y esfuerzos en las barras.
- Reacción en el apoyo F cuando además de las cargas indicadas dicho apoyo sufre un asentamiento vertical hacia debajo de 2 cm.



Celosía hiperestática de grado 1. Puesto que uno de los dos casos a contemplar es el de un asentamiento en el apoyo F, conviene elegir como incógnita hiperestática precisamente la reacción en dicho apoyo, pues de esta forma podrán utilizarse la mayor parte de los cálculos realizados previamente. La ecuación de compatibilidad a emplear, para el caso de que el apoyo F no experimente ningún tipo de asentamiento, se reduce a:

$$\sum_{i=1}^9 \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 = 0$$

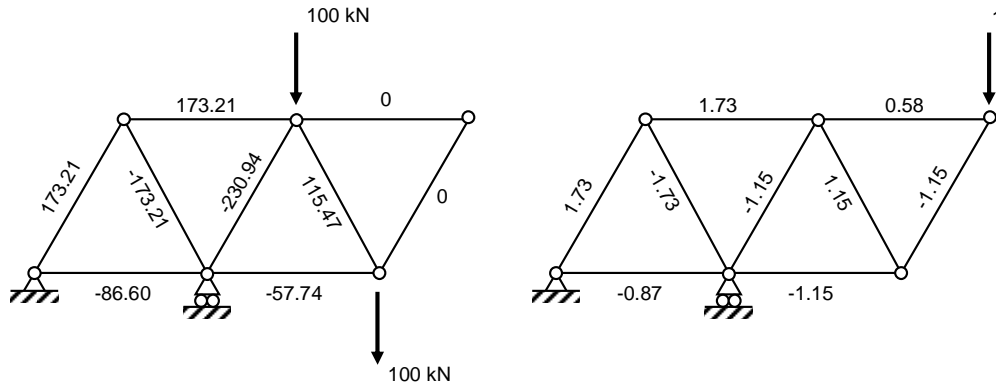
y puesto que todas las barras tienen la misma flexibilidad:

$$\sum_{i=1}^9 N_i \cdot N_i^1 = 0$$

siendo:

$$N_i = N_i^0 + X \cdot N_i^1$$

En las siguientes figuras se indican los valores de los esfuerzos en las barras de la celosía isostática básica bajo la acción de las cargas exteriores y de una carga unidad en F. Se incluyen también en la tabla correspondiente.



Barra i	N_i^0	N_i^1	$N_i = N_i^0 + X \cdot N_i^1$	$N_i \cdot N_i^1$	N_i (kN)
1	173,21	1,73	$173,21+1,73X$	$300,00+3,00X$	11,23
2	0	0,58	$0,58X$	$0,33X$	-54,00
3	173,21	1,73	$173,21+1,73X$	$300,00+3,00X$	11,23
4	-173,21	-1,73	$-173,21-1,73X$	$300,00+3,00X$	-11,23
5	-230,94	-1,15	$-230,94-1,15X$	$266,67+1,33X$	-122,96
6	115,47	1,15	$115,47+1,15X$	$133,33+1,33X$	7,49
7	0	-1,15	$-1,15X$	$1,33X$	107,98
8	-86,60	-0,87	$-86,60-0,87X$	$75,00+0,75X$	-5,62
9	-57,74	-1,15	$-57,74-1,15X$	$66,67+1,33X$	50,25
				1.441,67+15,42X	

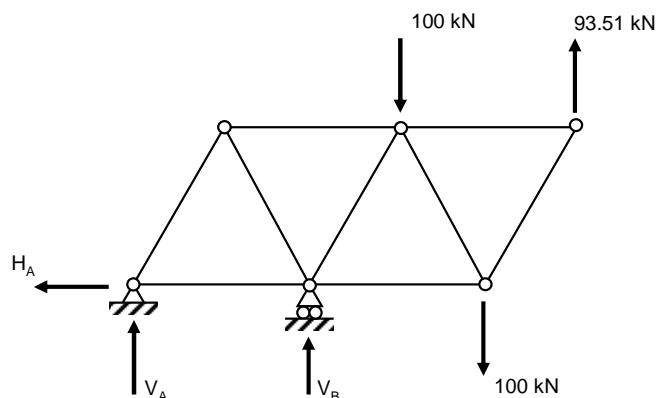
De la ecuación de compatibilidad resulta:

$$1441,67 + 15,42 \cdot X = 0 \Rightarrow X = -93,51 \text{ kN}$$

y los esfuerzos en las barras son los indicados en la última columna de la tabla.

Una vez conocida la reacción en F, para calcular las reacciones en los restantes apoyos bastará aplicar las ecuaciones de equilibrio en la celosía isostática, obteniéndose:

$$H_A = 0; \quad V_A = -9,73 \text{ kN}; \quad V_B = 116,22 \text{ kN}$$



Si el apoyo F experimenta un asentamiento vertical hacia debajo de 2 cm, cambia respecto del planteamiento anterior la ecuación de compatibilidad, que ahora pasa a ser:

$$\sum_{i=1}^9 \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 = \rho \cdot \sum_{i=1}^9 N_i \cdot N_i^1 = \Delta_F$$

siendo la flexibilidad de las barras:

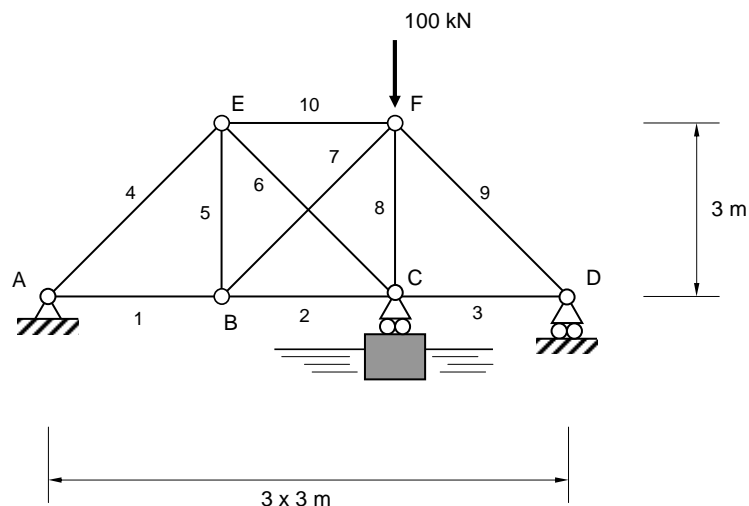
$$\rho = \frac{L}{E \cdot A} = \frac{3}{200 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN}$$

Luego para la reacción en el apoyo F se obtiene:

$$3 \cdot 10^{-5} \cdot (1441,67 + 15,42 \cdot X) = 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow X = -50,27 \text{ kN}$$

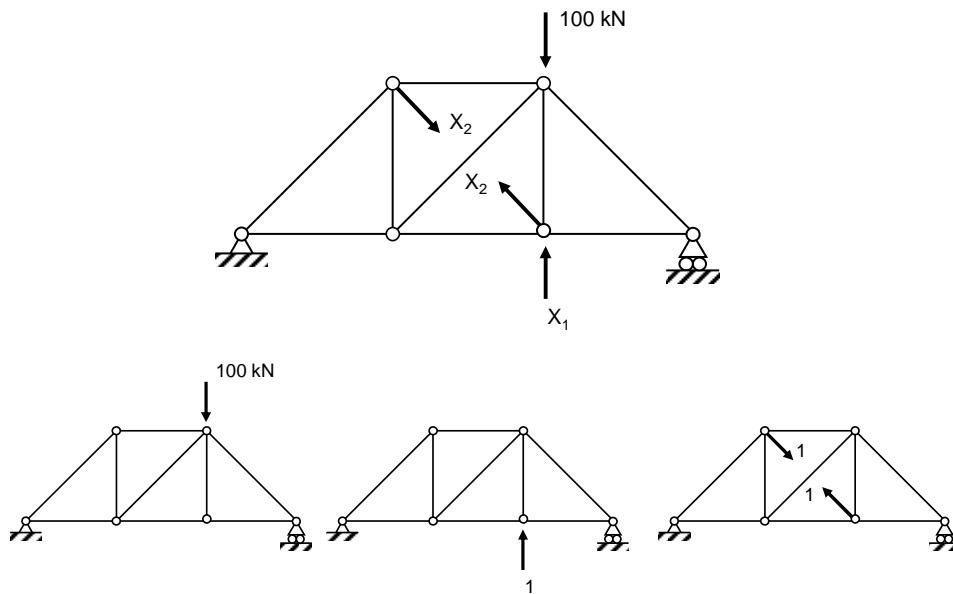
- 2.8.** La celosía de la figura está sustentada en un apoyo fijo en A, un apoyo móvil en D, y un apoyo elástico en C, de forma tal que este último desciende 1mm por cada kN aplicado en él. Las barras del cordón superior, inferior y los montantes tienen una sección de $3,75 \text{ cm}^2$, en tanto que las de las restantes barras es de $3,75\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Todas son del mismo material de módulo de elasticidad $E=200 \text{ GPa}$.

Bajo la acción de la carga vertical de 100 kN aplicada en el nudo F, calcular las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en las barras.



El apoyo elástico se comporta como un resorte de constante $k=1 \text{ kN/mm}$ (1000 kN/m).

Se trata de una estructura hiperestática de grado $h=2$. Como incógnitas hiperestáticas se eligen la reacción en el apoyo elástico y el esfuerzo axial en la barra EC. En la siguiente figura se indican tanto la celosía isostática básica como los diferentes casos isostáticos que es preciso resolver para el análisis completo de la estructura. Los esfuerzos correspondientes a estos casos, denominados respectivamente N_i^0 , N_i^1 y N_i^2 , se calculan por el método de los nudos y se incluyen en la tabla correspondiente, así como las flexibilidades de las barras (expresados todos los valores en m y kN).



Se necesitan dos ecuaciones de compatibilidad. Para la reacción en el apoyo se utilizará la compatibilidad con el resorte. El segundo sumatorio es nulo:

$$\sum_{i=1}^{10} \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 = -\Delta_C = -\frac{X_1}{k}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^2 = 0$$

donde los esfuerzos finales en las barras vienen dados por:

$$N_i = N_i^0 + X_1 \cdot N_i^1 + X_2 \cdot N_i^2$$

Particularizando estas ecuaciones a la estructura que se está analizando, resulta:

$$\begin{aligned} 0,04 \cdot 10^{-3} \cdot (-254,88 + 3,55 \cdot X_1 + 1,65 \cdot X_2) &= -X_1 \cdot 10^{-3} \\ -94,47 + 1,55 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 &= 0 \end{aligned}$$

con lo que se obtiene para la incógnitas:

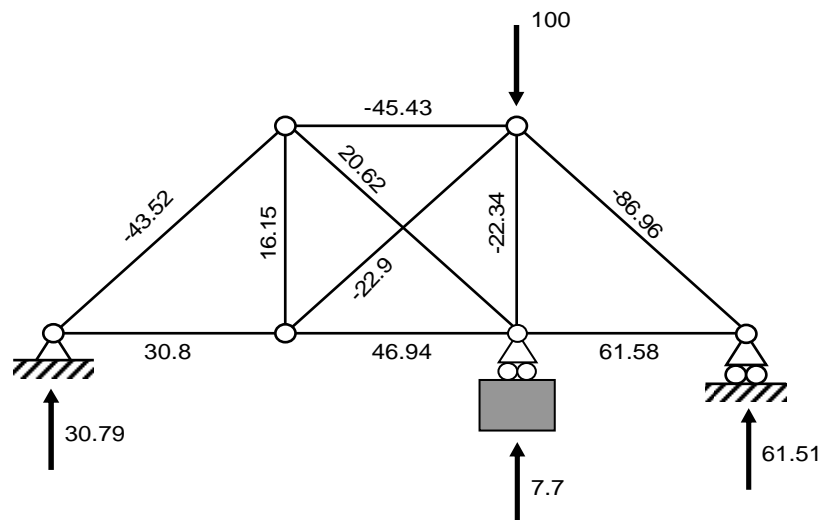
$$X_1 = 7,7 \text{ kN}$$

$$X_2 = 20,62 \text{ kN}$$

i	$\rho_i \cdot 10^3$	N_i^0	N_i^1	N_i^2	N_i
1	0,04	33,33	-0,33	0	$33,33-0,33 X_1$
2	0,04	66,66	-0,66	-0,71	$66,66-0,66 X_1-0,71 X_2$
3	0,04	66,66	-0,66	0	$66,66-0,66 X_1$
4	0,04	-47,14	0,47	0	$-47,14+0,47 X_1$
5	0,04	33,33	-0,33	-0,71	$33,33-0,33 X_1-0,71 X_2$
6	0,04	-	-	1	X_2
7	0,04	-47,14	0,47	1	$-47,14+0,47 X_1+ X_2$
8	0,04	0	-1	-0,71	$-X_1-0,71 X_2$
9	0,04	-94,27	0,95	0	$-94,273+0,95 X_1$
10	0,04	-33,33	0,33	-0,71	$-33,33+0,33 X_1-0,71 X_2$

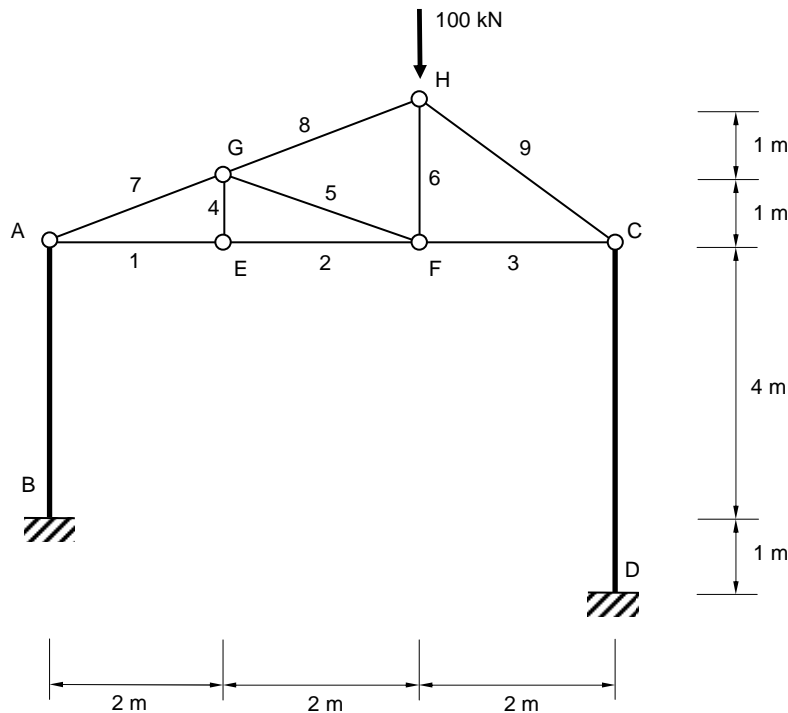
i	$\rho_i \cdot 10^3$	$N_i \cdot N_i^1$	$N_i \cdot N_i^2$	N_i
1	0,04	$-11+0,11 X_1$	0	30,8
2	0,04	$-44+0,44 X_1+0,47 X_2$	$-47,33+0,47 X_1+0,5 X_2$	46,94
3	0,04	$-44+0,44 X_1$	0	61,58
4	0,04	$-22,16+0,22 X_1$	0	-43,52
5	0,04	$-11+0,11 X_1+0,23 X_2$	$-23,66+0,23 X_1+0,5 X_2$	16,15
6	0,04	-	X_2	20,62
7	0,04	$-22,16+0,22 X_1+0,47 X_2$	$-47,14+0,47 X_1+ X_2$	-22,9
8	0,04	$X_1+0,71 X_2$	$0,71 X_1+0,5 X_2$	-22,34
9	0,04	$-89,56+0,9 X_1$	0	-86,96
10	0,04	$-11+0,11 X_1-0,23 X_2$	$23,66-0,23 X_1+0,5 X_2$	-45,43
		$-254,88+3,55 X_1+1,65 X_2$	$-94,47+1,65 X_1+4 X_2$	

En la siguiente figura se indican los esfuerzos finales en las barras (también se incluyen en la tabla), y las reacciones en los apoyos (obtenidos mediante aplicación de las condiciones de equilibrio). Todos los valores se expresan en kN.



2.9. En la estructura de la figura las barras AB y CD tienen una rigidez a flexión $EI=4 \times 10^4 \text{ kNm}^2$. Las restantes barras están articuladas en sus extremos, siendo su rigidez a esfuerzo axial $EA=10^5 \text{ kN}$. Se desprecia el acortamiento de las barras AB y CD. Bajo la acción de la carga vertical de 100 kN, calcular:

- Reacciones en B y D.
- Esfuerzos axiales en las barras de la celosía.
- Desplazamiento vertical del nudo H.



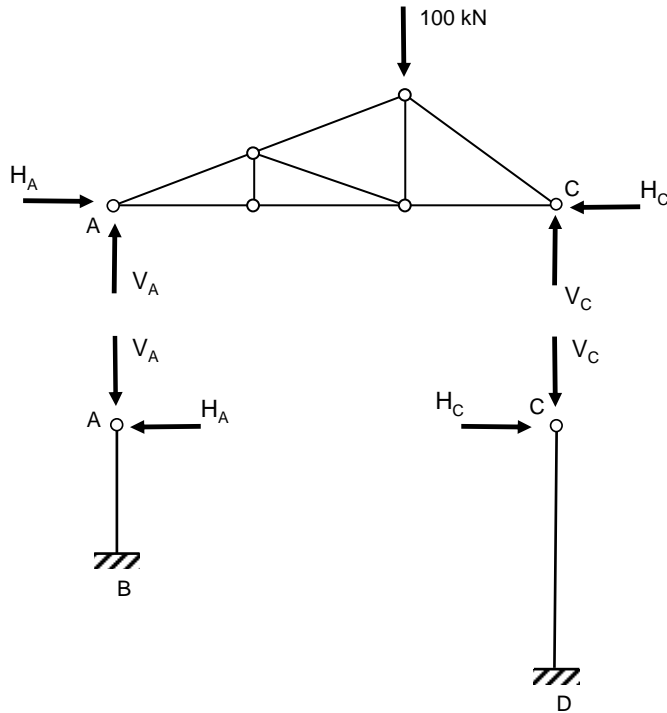
La carga de 100 kN se transmite a los pilares a través de la celosía y, en último término, por medio de las articulaciones de unión A y C. Se designan como H_A, V_A, H_C y V_C las fuerzas transmitidas a través de dichas articulaciones, expresadas en sus componentes.

Del equilibrio de la celosía se deducen los valores de las componentes verticales

$$V_A = 33,33 \text{ kN}; \quad V_C = 66,66 \text{ kN}$$

en tanto que no es posible calcular el valor de la componente horizontal ($H_A = H_C$), que será la incógnita X_1 del problema.

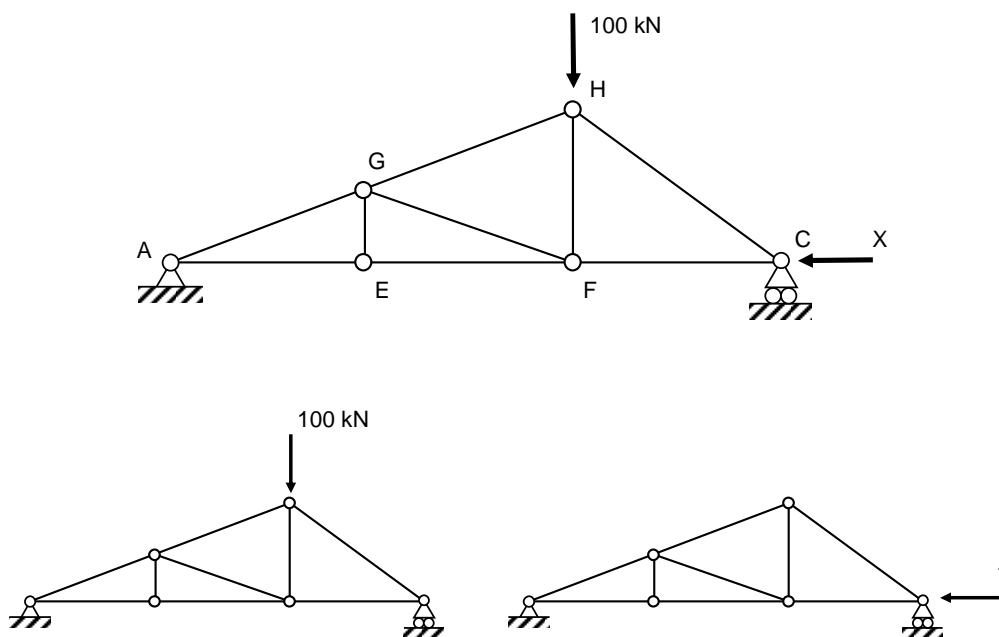
Para formular la ecuación de compatibilidad bastará tener en cuenta que en la deformación celosía y pilares permanecerán unidos y, por lo tanto, el desplazamiento relativo entre los extremos A y C de los pilares debe ser idéntico al que se produce entre los nudos A y C de la celosía.



Considerando los pilares, dicho desplazamiento es:

$$\Delta_{pil}^{AC} = \frac{X_1 \cdot 4^3}{3 \cdot 4 \cdot 10^4} + \frac{X_1 \cdot 5^3}{3 \cdot 4 \cdot 10^4} = \frac{63 \cdot X_1}{4 \cdot 10^4} \text{ m}$$

En cuanto a la celosía, como lo que interesa es el desplazamiento relativo entre los nudos A y C de la misma, para su cálculo puede suponerse uno de los apoyos fijos, por ejemplo el A, y el otro deslizante. Se trata de una celosía isostática sometida simultáneamente a la fuerzas de 100 kN y \$X_1\$, tal y como e indica en las siguientes figuras.



El desplazamiento relativo entre A y C vendrá dado por:

$$\Delta_{cel}^{AC} = \Delta_{cel}^C = \frac{\partial U}{\partial X_1} = \sum_{i=1}^9 \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1$$

siendo:

$$N_i = N_i^0 + X \cdot N_i^1$$

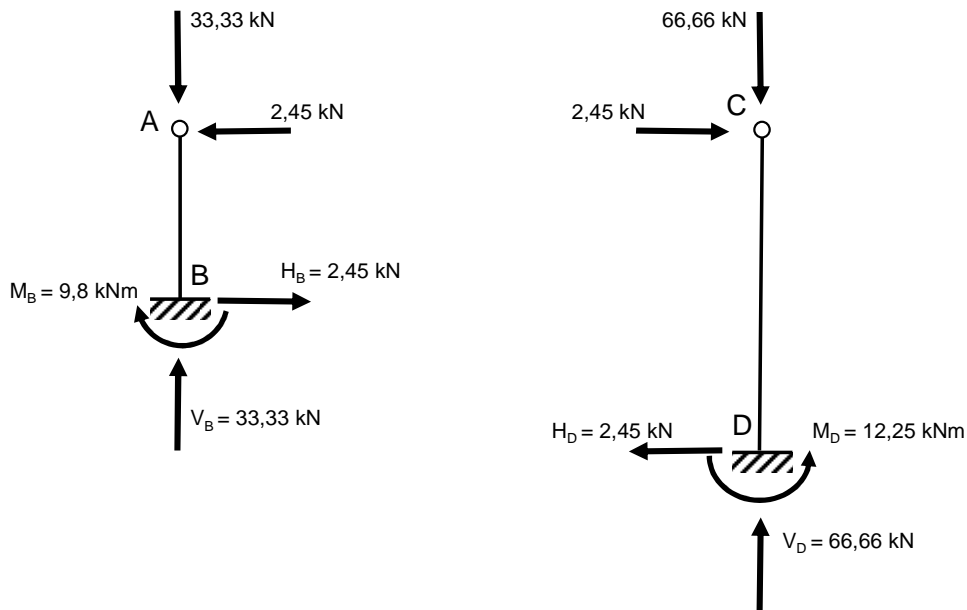
donde, como es habitual, los esfuerzos en las barras correspondientes a la carga de 100 kN y a la carga unidad se calculan por el método de los nudos. Los resultados, así como los valores de las flexibilidades se incluyen en la tabla (valores expresados en m y kN).

i	$\rho_i \cdot 10^5$	N_i^0	N_i^1	$N_i = N_i^0 + X_1 \cdot N_i^1$	$\rho_i \cdot N_i \cdot N_i^1 \cdot 10^5$	N_i	N_i^{0V}
1	2	66,66	-1	66,66-X ₁	-133,32+2X ₁	64,21	0,67
2	2	66,66	-1	66,66-X ₁	-133,32+2X ₁	64,21	0,67
3	2	66,66	-1	66,66-X ₁	-133,32+2X ₁	64,21	0,67
4	1	0	0	0	0	0	0
5	2,24	0	0	0	0	0	0
6	2	0	0	0	0	0	0
7	2,24	-74,56	0	-74,56	0	74,56	-0,75
8	2,24	-74,56	0	74,56	0	-74,56	-0,75
9	2,83	-94,27	0	-94,27	0	-94,27	-0,94
					-399,96+6X ₁		

Aplicando la ecuación de compatibilidad.

$$(-399,96 + 6 \cdot X_1) \cdot 10^{-5} = \frac{-63 \cdot X_1}{4 \cdot 10^4} \Rightarrow X_1 = 2,45 \text{ kN}$$

Conocido este valor de la componente horizontal que se transmite a los pilares, a partir de la consideración de su equilibrio se calculan las reacciones en los empotramientos B y D, tal como se indica en la siguiente figura. Los esfuerzos en las barras se incluyen en la penúltima columna de la tabla.



Finalmente, el desplazamiento vertical del nudo H se obtiene mediante la expresión (2.43), donde N_i^{0V} representa los esfuerzos en las barras debidos a una carga vertical unidad en el nudo H, que actúa sobre la estructura básica. Dada la linealidad del comportamiento:

$$N_i^{0V} = \frac{N_i^0}{100}$$

Estos valores se recogen en la última columna de la tabla.

Operando resulta para ese desplazamiento:

$$\Delta_{Hy} = \sum_{i=1}^9 \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V} = 759,42 \cdot 10^{-5} m = 0,76 \text{ cm}$$