
TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 6: *INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO PLÁSTICO*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU



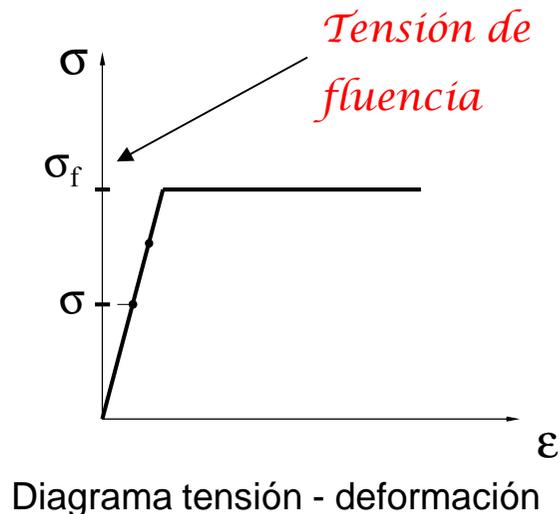


1. Introducción

A lo largo de este capítulo se considerará que los materiales de las estructuras objeto de estudio son materiales dúctiles, como lo es por ejemplo el acero.

En el método elástico de diseño, se entiende que la estructura ha llegado a su estado límite o situación de fallo, cuando en alguna o en varias secciones simultáneamente se ha alcanzado la tensión de fluencia.

Sin embargo, experimentalmente se ha comprobado que una estructura hecha con un material dúctil puede seguir soportando cargas crecientes pese a que en algún lugar haya abandonado el comportamiento elástico: es decir, tiene todavía una reserva de resistencia. Esta reserva de resistencia es mayor en las estructuras hiperestáticas que en las isostáticas.



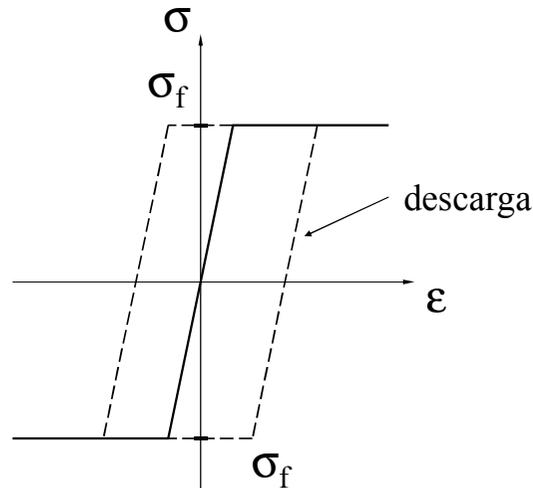
Si en esa estructura se continúa con el proceso de carga, cada vez van apareciendo más puntos en los cuales se ha iniciado la fluencia plástica, hasta que finalmente ese número de puntos es tal y se combinan de tal modo que la estructura llega a la situación de colapso.

Esto ocurre cuando la estructura está sometida a la que se conoce con el nombre de **carga última**, **carga de agotamiento** o **carga de colapso**, que es realmente la carga máxima que la estructura es capaz de soportar.



2. Hipótesis básicas

a) Material elastoplástico perfecto



El material es perfectamente elástico hasta alcanzar la tensión de fluencia σ_f .

A partir de σ_f y hasta alcanzar la rotura, el material es perfectamente plástico.

Se supone el mismo valor de σ_f a tracción y a compresión.

Si en la zona de deformaciones plásticas se descarga el material, el proceso sigue una línea paralela a la de carga elástica.

b) Pequeñas deformaciones

Las deformaciones plásticas permanecen en el mismo orden de magnitud que las deformaciones elásticas debido a la compatibilidad de deformaciones entre los elementos de la estructura.

c) Hipótesis de Navier

Las secciones planas permanecen planas después de la deformación.

Se cumplirá por tanto, en secciones trabajando a flexión y mientras no haya agotamiento: $\epsilon_x = \frac{y}{\rho}$

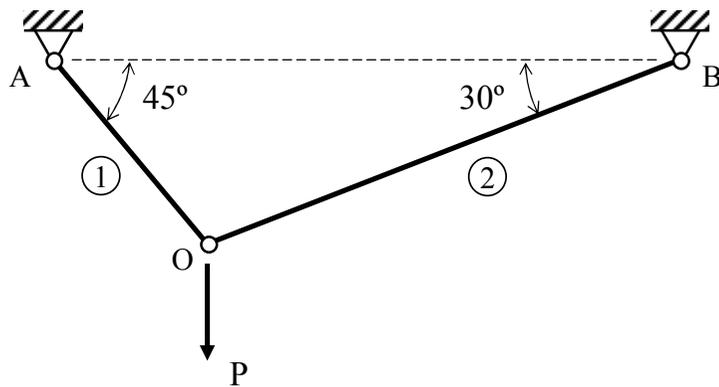
ϵ_x : deformación de una fibra longitudinal; y : distancia al eje neutro de la fibra; ρ = curvatura de la sección



3. Análisis elastoplástico

A continuación se estudiará el comportamiento de dos celosías, una isostática y otra hiperestática, bajo la acción de una carga creciente. Son dos ejemplos sencillos que permitirán introducir ideas importantes sin excesiva dificultad, ni matemática ni conceptual.

3.1. Celosías estáticamente determinadas



Secciones de las barras: $A_1=A$ y $A_2=2A$

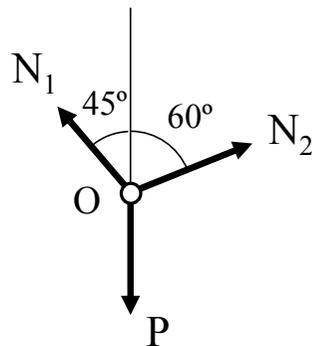
Material de las barras de características E , σ_F

Calcular:

- a) P_{max} según el método elástico
- b) P_p : Carga de colapso

1) $0 < P < P_f \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 < \sigma_F \\ \sigma_2 < \sigma_F \end{cases}$

Formulación del equilibrio en el nudo O:



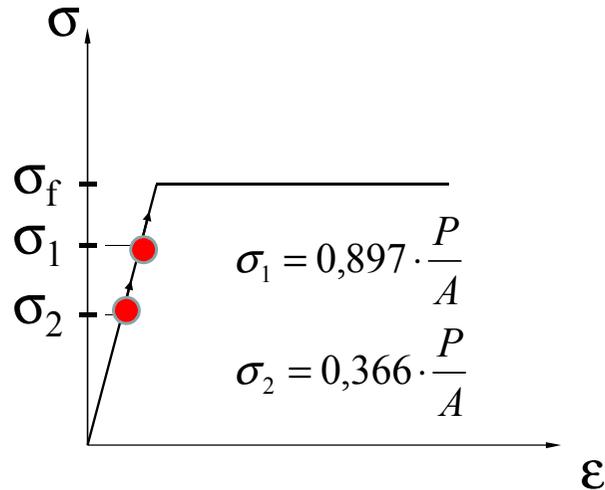
$$\left. \begin{aligned} \frac{N_1}{\sqrt{2}} &= \frac{N_2 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ \frac{N_1}{\sqrt{2}} + \frac{N_2}{2} &= P \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,897 \cdot P \\ N_2 &= 0,732 \cdot P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0,897 \cdot \frac{P}{A} \\ \sigma_2 &= 0,366 \cdot \frac{P}{A} \end{aligned}$$



3. Análisis elastoplástico



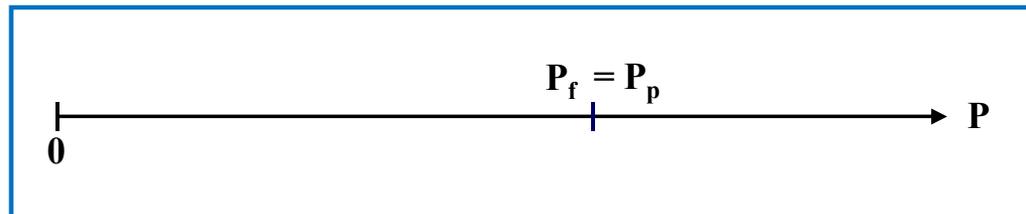
Al continuar aumentando la carga P , la barra que entra en fluencia en primer lugar es la barra 1. Al valor de la carga correspondiente se le denomina carga de fluencia P_f .

Su valor será:

$$\sigma_1 = \sigma_f \Rightarrow 0,897 \cdot \frac{P_f}{A} = \sigma_f \Rightarrow P_f = 1,115 \cdot \sigma_f \cdot A$$

A partir de este momento, cualquier incremento de P daría lugar a deformaciones plásticas en el elemento 1, cuya tensión permanecería fija en el valor σ_f . La tensión en la barra 1 es ahora independiente de P . Por tanto, para una carga $P > P_f$ las ecuaciones de equilibrio planteadas en el nudo ya no se cumplen, y la estructura se convierte en un mecanismo.

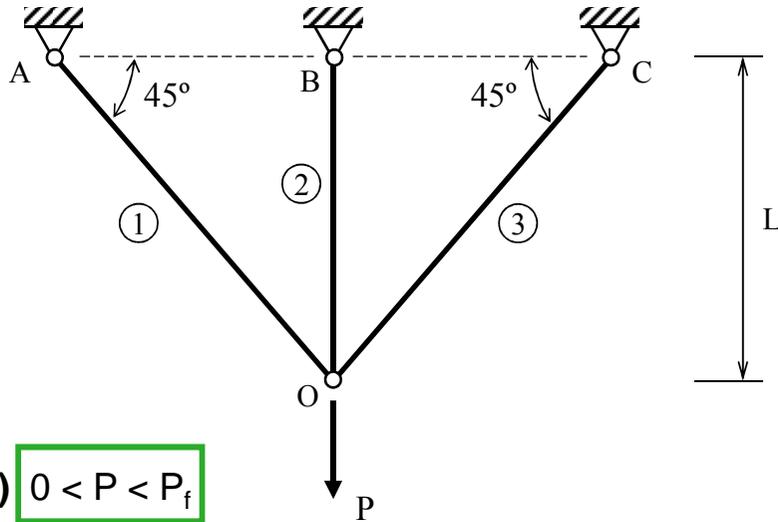
$$P_p = P_f = 1.115 \sigma_f \cdot A$$





3. Análisis elastoplástico

3.2. Celosías estáticamente indeterminadas



Secciones de las barras: $A_1 = A_2 = A_3 = A$

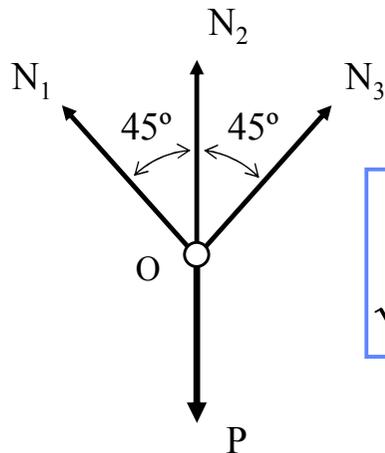
Material de las barras de características E, σ_F

Calcular:

- a) P_f según el método elástico
- b) P_p : Carga de colapso

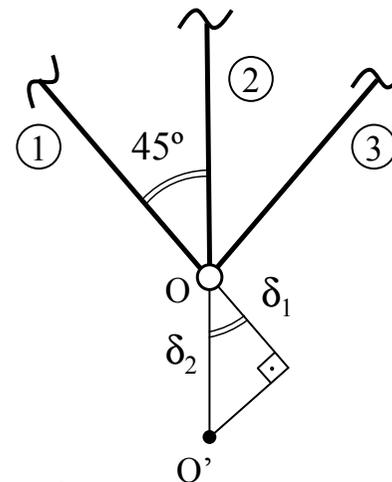
1) $0 < P < P_f$

Equilibrio en el nudo O:



$$N_1 = N_3$$
$$\sqrt{2} \cdot N_1 + N_2 = P$$

Compatibilidad de deformaciones:



$$\delta_2 = \sqrt{2} \cdot \delta_1$$



3. Análisis elastoplástico

Ley de comportamiento

$$\delta_1 = \frac{N_1 \cdot \sqrt{2} \cdot L}{E \cdot A}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 \cdot L}{E \cdot A}$$

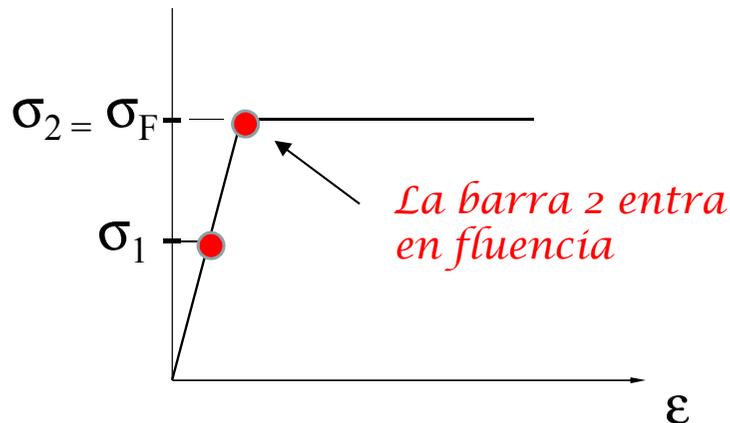
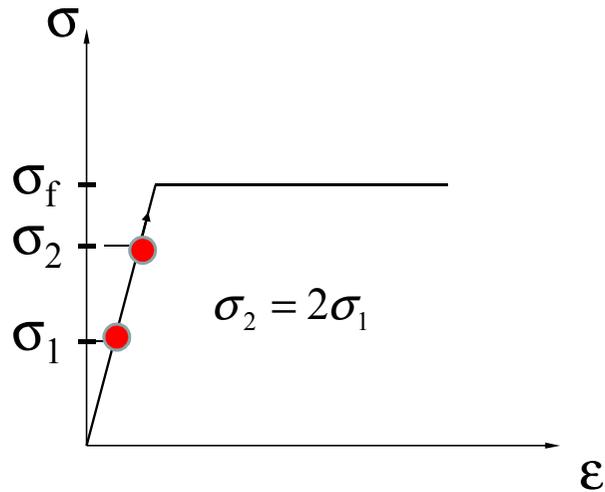
Solución:

$$N_1 = N_3 = 0,293 \cdot P$$

$$N_2 = 0,585 \cdot P$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0,293 \cdot \frac{P}{A}$$

$$\sigma_2 = 0,585 \cdot \frac{P}{A}$$



Si se continua aumentando la carga P, la barra que entra en fluencia en primer lugar es la barra 2. Al valor de la carga correspondiente se le denomina carga de fluencia P_f .

Carga de fluencia:

$$\sigma_2 = \sigma_F \Rightarrow 0,585 \cdot \frac{P_f}{A} = \sigma_F \Rightarrow P_f = 1,707 \cdot \sigma_F \cdot A$$

En ese instante, el desplazamiento del nudo O es:

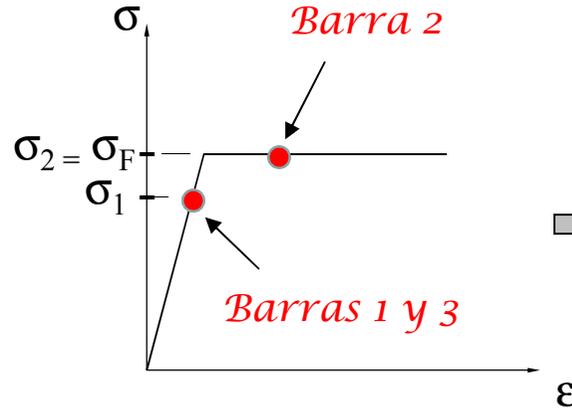
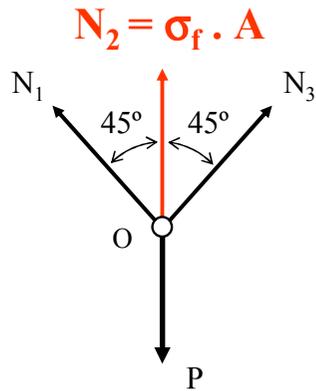
$$\delta_{OF} = \delta_2 = \frac{N_2 L}{EA} = \frac{(\sigma_F \cdot A) L}{EA} = \frac{\sigma_F L}{E}$$



3. Análisis elastoplástico

2) $P_f < P < P_p$

A partir de aquí, la barra 2 no puede resistir posteriores incrementos de carga, pero la estructura en conjunto sí, ya que las barras laterales aún están trabajando en régimen elástico.

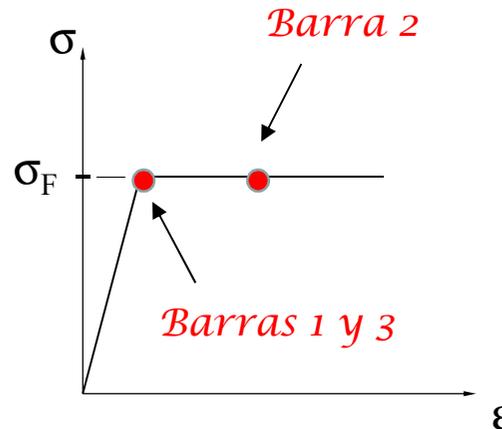
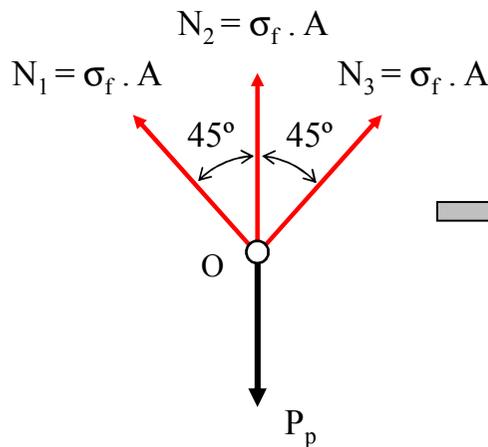


Equilibrio del nudo O:

$$P = \sqrt{2} \cdot N_1 + \sigma_F \cdot A$$

$$N_1 = N_3 = 0,707(P - \sigma_F \cdot A)$$

Si se continúa aumentando la carga, el valor máximo de P que es capaz de aguantar la estructura será aquél que hace entrar a las tres barras en fluencia (las laterales lo hacen simultáneamente, por simetría del problema). Se calculará como:



Carga de fluencia:

Equilibrio del nudo O:

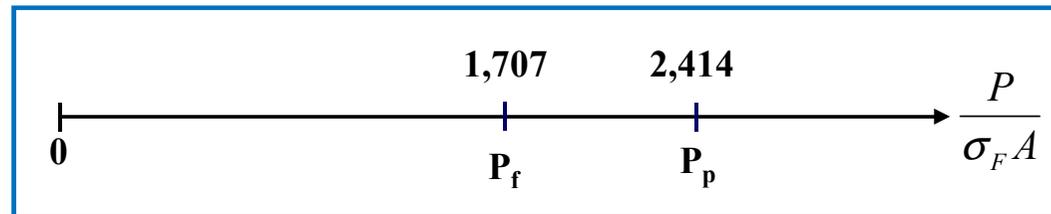
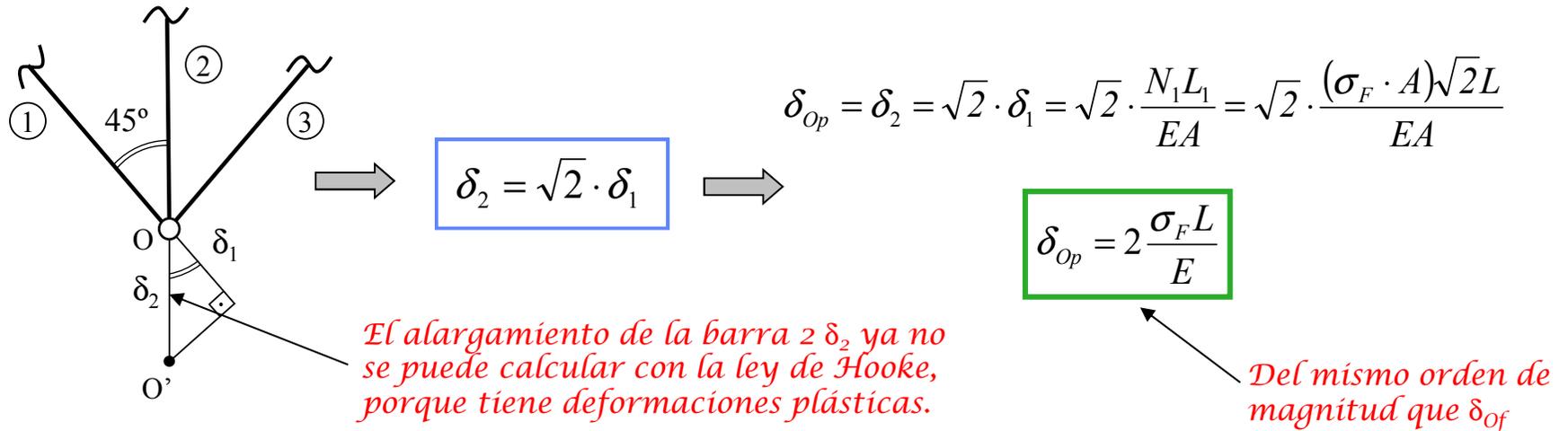
$$P_p = \sqrt{2} \cdot \sigma_F \cdot A + \sigma_F \cdot A$$

$$P_p = 2,414 \cdot \sigma_F \cdot A$$



3. Análisis elastoplástico

En el instante de colapso, el desplazamiento del nudo O se debe calcular por medio del alargamiento de la barra 1 y la ecuación de compatibilidad de deformaciones:



Economía que supone la aplicación del cálculo plástico al dimensionado de la estructura:

$$\frac{P_p - P_f}{P_f} 100 = \frac{2,414 - 1,707}{1,707} 100 = 41,43\%$$



3. Análisis elastoplástico

Conclusiones del análisis elastoplástico de la celosía hiperestática:

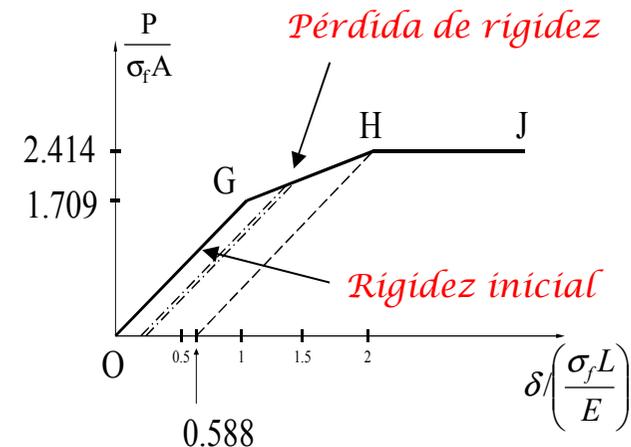
➤ **El grado de indeterminación de la estructura** se reduce en una unidad cada vez que un elemento de la misma entra en fluencia. Por consiguiente, el mínimo número de miembros de la estructura que es preciso que fluyan plásticamente para producir su colapso es una unidad superior a su grado de hiperestaticidad.

➤ **Redistribución de esfuerzos internos.** Las magnitudes relativas cambian drásticamente cuando se inicia la fluencia en un elemento. Los miembros que al comienzo están menos solicitados (como es el 1, por ejemplo), una vez iniciada la fluencia en la estructura, soportan gradualmente una proporción mayor de la carga aplicada

➤ **Reducción de rigidez.** Inicialmente, mientras la estructura mantiene un comportamiento elástico, su rigidez es la máxima (tramo OG), pero cada vez que un miembro entra en fluencia (y por consiguiente se reduce el grado de hiperestaticidad), se produce una disminución súbita de la rigidez.

➤ **Sencillez en la determinación de la carga de colapso.** Requiere únicamente la aplicación de condiciones de equilibrio, sin necesidad de recurrir a la formulación de condiciones de compatibilidad de las deformaciones.

➤ **Imperfecciones iniciales.** El valor de la carga de colapso no se ve afectado por imperfecciones iniciales ni por asentamientos de los apoyos, al depender únicamente del equilibrio en el instante de colapso.





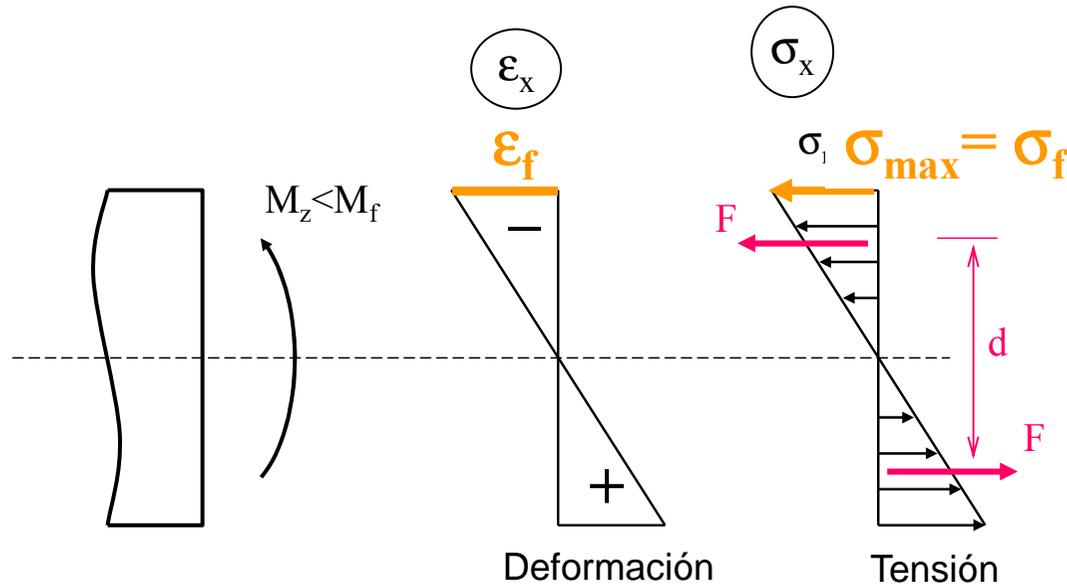
4. Flexión pura elastoplástica

Antes de considerar el colapso de estructuras de nudos rígidos, es necesario examinar lo que ocurre en la sección de uno cualquiera de sus elementos cuando el momento flector que soporta crece de forma continua hasta alcanzar el valor máximo que la sección es capaz de resistir.

4.1. Estados tensionales sucesivos para secciones simétricas

Sea una sección simétrica respecto a los ejes Y y Z, sometida a flexión pura con un momento flector que aumenta paulatinamente desde cero. Se analizará a continuación cómo varía la distribución de tensiones en la sección conforme crece el valor del momento.

Fase 1: Hasta alcanzar la fluencia



En esta fase, toda la sección se comporta elásticamente. Por tanto, la distribución de tensiones es lineal.

Al continuar aumentando M_z , llega un momento en el que la tensión en las fibras extremas alcanza el valor de la tensión de fluencia, siendo éste el último instante en que es aplicable la fórmula de Navier para tensiones.



4. Flexión pura elastoplástica

➤ Al momento flector correspondiente a ese instante se le denomina **momento de fluencia** M_f , y se puede obtener a partir de la ecuación de Navier, igualando la tensión máxima a la de fluencia:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z} = \sigma_f \quad \Rightarrow \quad M_f = \sigma_f \cdot W_z$$

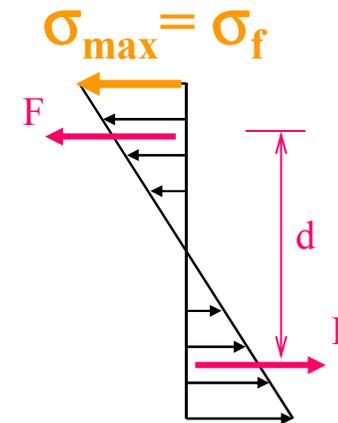
$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_f$$

Por ejemplo, para una sección rectangular se tendría:

$$M_f = F \cdot d = \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma_f \cdot \frac{h}{2} \cdot b\right) \left(2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2}\right) = \sigma_f \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} = \sigma_f \cdot W_z$$

↙
Cálculo mediante equivalencia
estática momento - tensiones

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1/12 \cdot b \cdot h^3}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

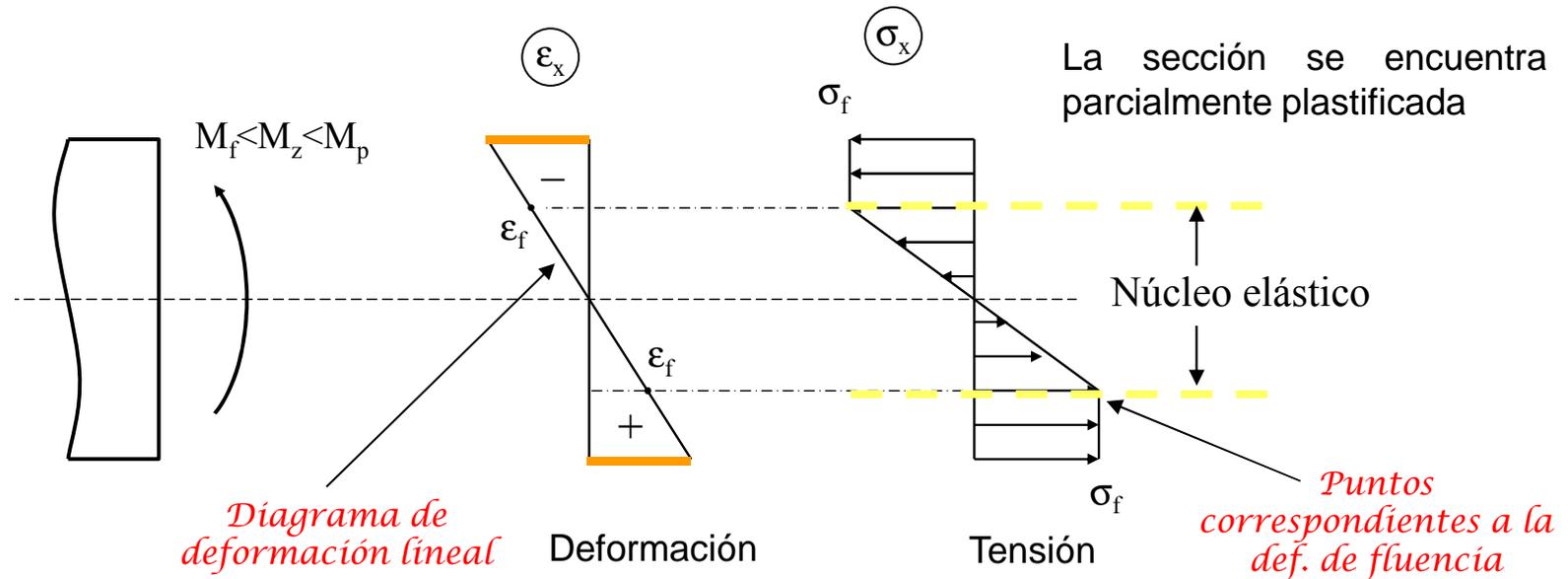


Fase 2: Hasta que toda la sección alcanza la fluencia

➤ Si el valor del momento flector sigue incrementándose por encima de M_f , las deformaciones unitarias en la sección continuarán aumentando y el valor máximo de ε_x será mayor que ε_f . Al ser el material elastoplástico perfecto, la tensión máxima permanecerá constante e igual a σ_f .



4. Flexión pura elastoplástica

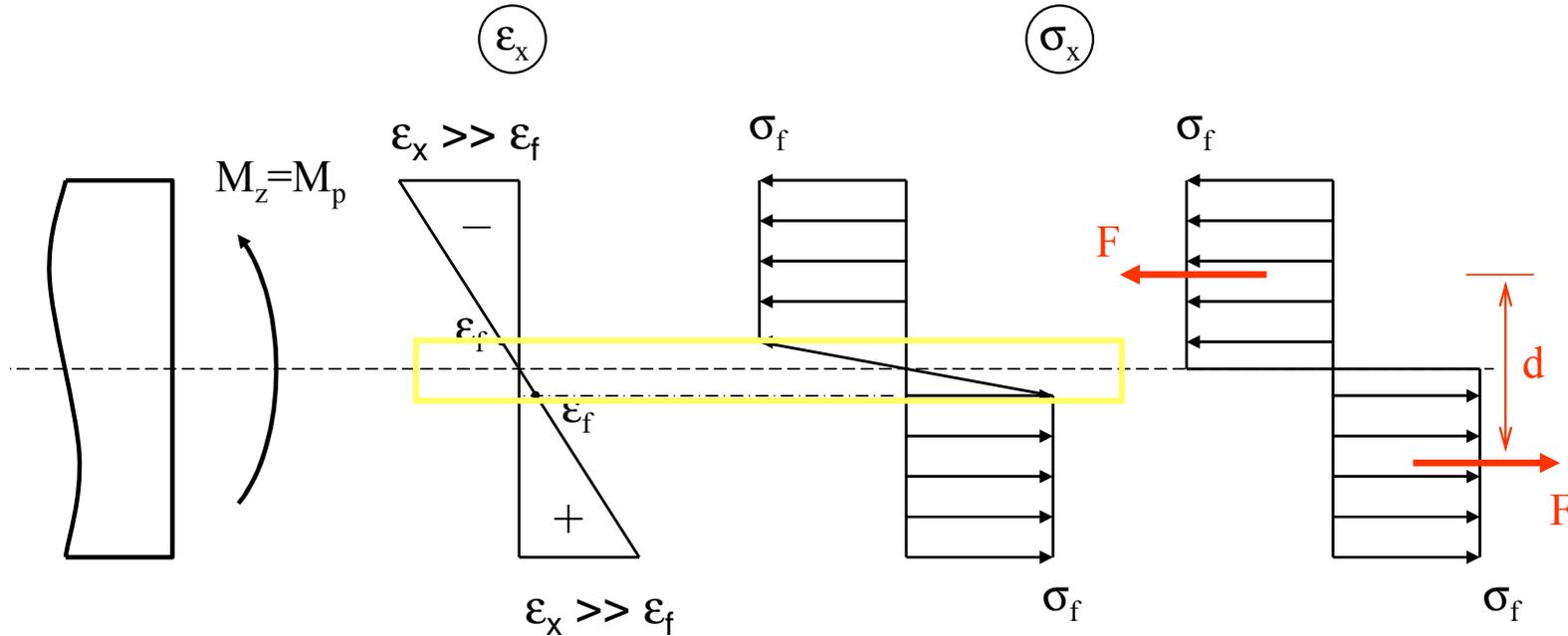


➤ Las zonas más externas de la sección se habrán plastificado enteramente, mientras que un núcleo interior continúa linealmente elástico; es éste el llamado núcleo elástico. Además, como la sección es simétrica, el eje neutro mantendrá su posición en el centro de gravedad de la sección ($y=0$).

➤ Conforme el momento flector va aumentando más, las zonas plastificadas se agrandan avanzando hacia el eje neutro al mismo tiempo que las deformaciones unitarias se hacen cada vez mayores. El proceso continúa hasta que el momento aplicado alcanza un valor, llamado momento plástico o momento último M_p , que es el máximo momento flector que es capaz de resistir la sección.



4. Flexión pura elastoplástica



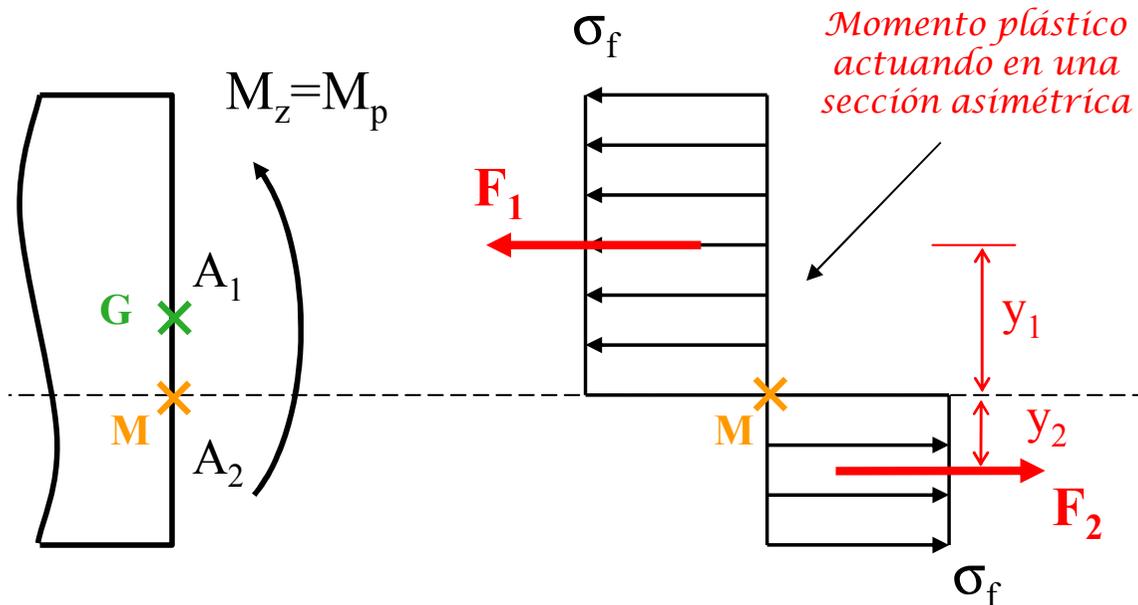
- Realmente, el agotamiento de la sección se produce poco antes de que en todos sus puntos se alcance la tensión de fluencia, ya que en las proximidades del eje neutro siempre existe un núcleo elástico, aunque a efectos prácticos es tan pequeño que no se tiene en cuenta en el cálculo de M_p .
- El cálculo del momento plástico M_p se realiza planteando el par resultante de las tensiones en la sección totalmente plastificada. Una vez alcanzado dicho valor, se considera que en la sección se ha formado una **rótula plástica** y no opone resistencia al giro.

$$M_p = F \cdot d = \sigma_f \cdot \frac{A}{2} \cdot d$$

Para una sección rectangular: $\Rightarrow M_f = \sigma_F \cdot \frac{bh}{2} \cdot 2 \cdot \frac{h}{4} = \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4}$

4. Flexión pura elastoplástica

4.2. Análisis para secciones asimétricas



En régimen elástico y hasta alcanzar el momento de fluencia, el eje neutro M pasa por el centro de gravedad de la sección.

$$G = M$$

Si $M_z > M_f$ el eje neutro ya no coincide con el centro de gravedad en secciones asimétricas, y se va desplazando conforme M crece.

$$G \neq M$$

➤ En la distribución de tensiones correspondiente al momento plástico, el eje neutro dividirá a la sección en dos partes de igual área. Esto es así porque en flexión pura, la fuerza resultante de las tensiones de compresión es igual a la fuerza resultante de las tensiones de tracción:

$$\sigma_f A_1 = \sigma_f A_2$$

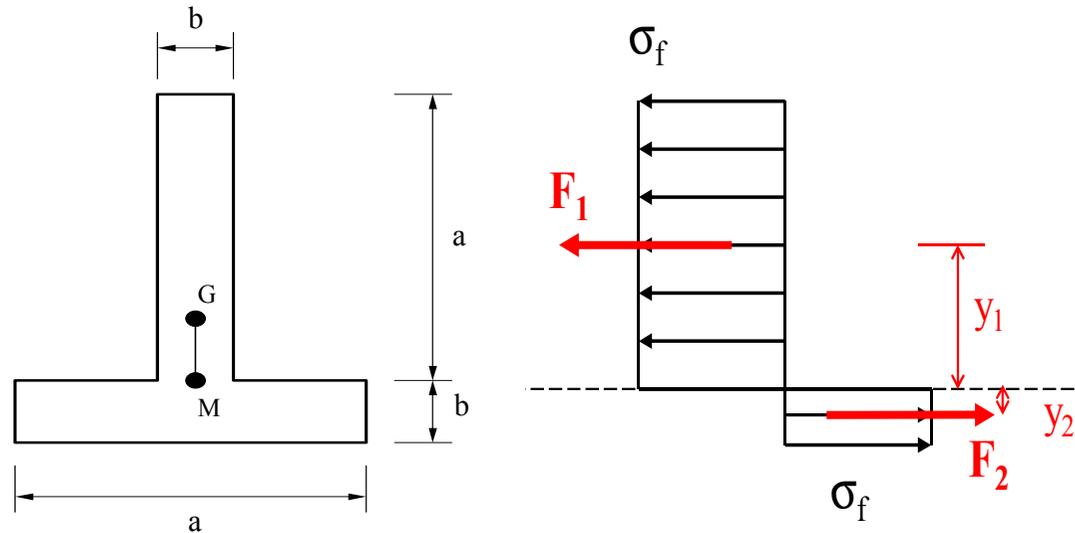
$$A_1 + A_2 = A \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 = A/2$$

Cálculo del Momento Plástico: $\Rightarrow M_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = \sigma_f A_1 y_1 + \sigma_f A_2 y_2 = \frac{\sigma_f A}{2} (y_1 + y_2)$



4. Flexión pura elastoplástica

Ejemplo: sección en T



En un estado intermedio entre el comienzo de la fluencia y la carga última, la posición del eje neutro estará comprendida entre la correspondiente al rango elástico (centro de gravedad de la sección) y la de agotamiento. Así, para la sección en T invertida de la figura, el eje neutro variará en el rango elastoplástico entre el centro de gravedad G y el punto M que divide la sección en dos áreas iguales.

Cálculo del Momento Plástico: $\Rightarrow M_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = \sigma_F \cdot ab \cdot \frac{a}{2} + \sigma_F \cdot ab \cdot \frac{b}{2} = \frac{\sigma_F \cdot ab}{2} (a + b)$



4. Flexión pura elastoplástica

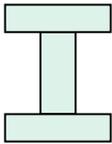
4.3. Factor de forma

Se denomina factor de forma de una sección al cociente entre los valores correspondientes del momento último y el momento de fluencia:

$$f = \frac{M_p}{M_f}$$

Sección rectangular: $f = \frac{\sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4}}{\sigma_F \cdot \frac{bh^2}{6}} = 1,5$ 

Sección circular: $f = 1,7$ 

Sección doble T: $1,15 < f < 1,20$ 

El factor de forma es adimensional y no depende de la tensión de fluencia, solo de la geometría de la sección.

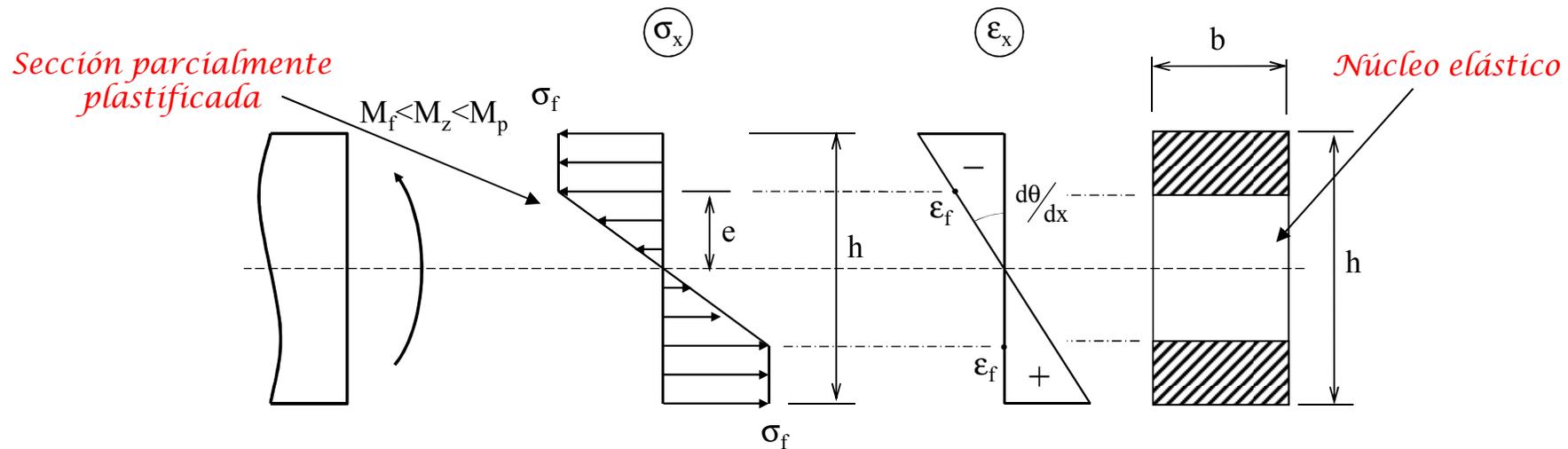
Contrariamente a lo que pueda parecer, interesa un factor de forma pequeño, porque entonces la zona de trabajo elástico, que es la habitual en estructuras, es más amplia (para la misma carga última).



4. Flexión pura elastoplástica

4.4. Relación entre momento y curvatura

A continuación se estudiará la relación entre el momento flector M_z aplicado en una sección y la curvatura k de la misma, tomando como ejemplo una sección rectangular.



$$M_z = \underbrace{\sigma_f \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - e\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + e\right)}_{\text{Zona uniforme}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sigma_f \cdot e \cdot b \cdot \frac{4}{3} \cdot e}_{\text{Zona triangular}} = \frac{\sigma_f \cdot b \cdot h^2}{6} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot e^2}{h^2}\right) = M_f \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot e^2}{h^2}\right)$$

Zona uniforme

Zona triangular

Curvatura en régimen elástico: $\kappa = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$

Curvatura en el límite elástico: (empieza la fluencia) $\kappa_f = \frac{M_f}{E \cdot I_z}$



$$\frac{M_z}{M_f} = \frac{\kappa}{\kappa_f}$$

Relación lineal entre momento y curvatura en el rango elástico



4. Flexión pura elastoplástica

➤ La relación momento – curvatura que es lineal en el rango elástico, si la sección está parcialmente plastificada se calcula como:

Curvatura de la sección, κ : $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon_x}{y} = \frac{\varepsilon_f}{e} \rightarrow \varepsilon_f = k \cdot e$

Si $e = h/2 \Rightarrow M_z = M_f \quad k_f = \frac{\varepsilon_f}{h/2} \rightarrow \varepsilon_f = k_f \cdot \frac{h}{2}$

Por tanto: $\varepsilon_f = k_f \cdot \frac{h}{2} = k \cdot e \rightarrow e = \frac{h}{2} \cdot \frac{k_f}{k}$

Sustituyendo e en la ecuación del momento $M_z = M_f \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot e^2}{h^2} \right)$ resulta:

$$\frac{M_z}{M_f} = 1,5 - 0,5 \cdot \left(\frac{\kappa_f}{\kappa} \right)^2$$

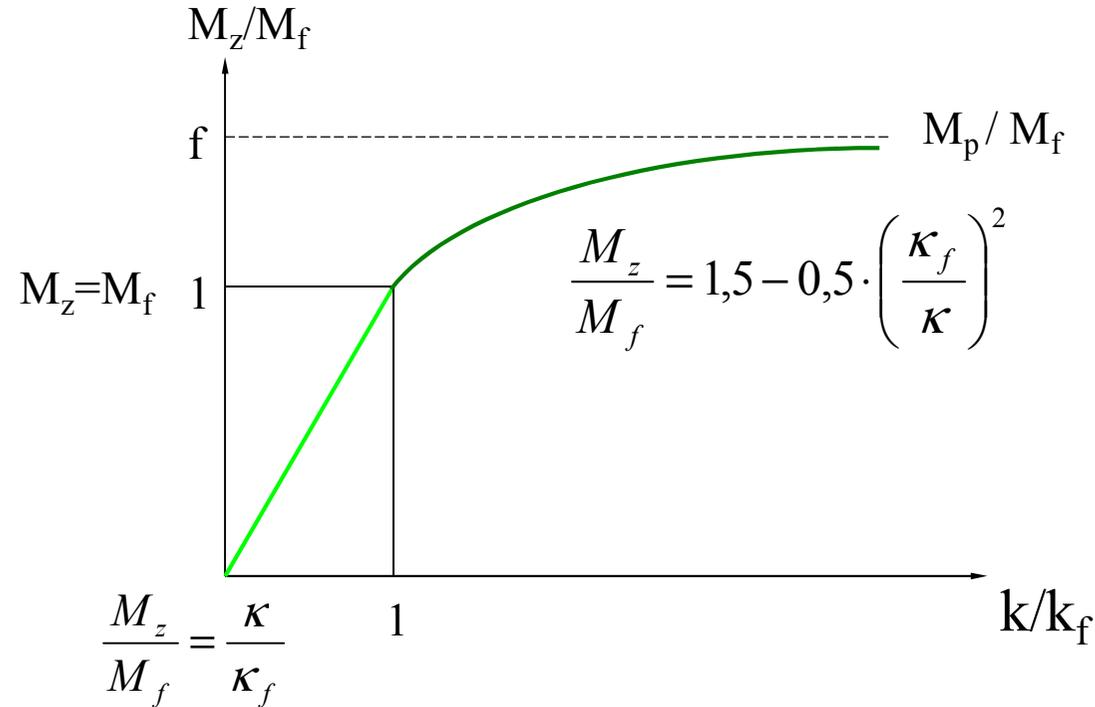
Relación no lineal entre momento y curvatura en el rango plástico

➤ De la relación anterior se deduce que a medida que la curvatura k crece, el momento M_z tiende al valor límite (1,5 era precisamente el factor de forma f de la sección). Para este valor límite $M_z = 1.5 M_f$, la curvatura k se hace infinita y además $e = 0$: el núcleo elástico desaparece, toda la sección ha plastificado y el correspondiente momento flector es el momento plástico M_p .



4. Flexión pura elastoplástica

Representación gráfica de la relación momento - curvatura



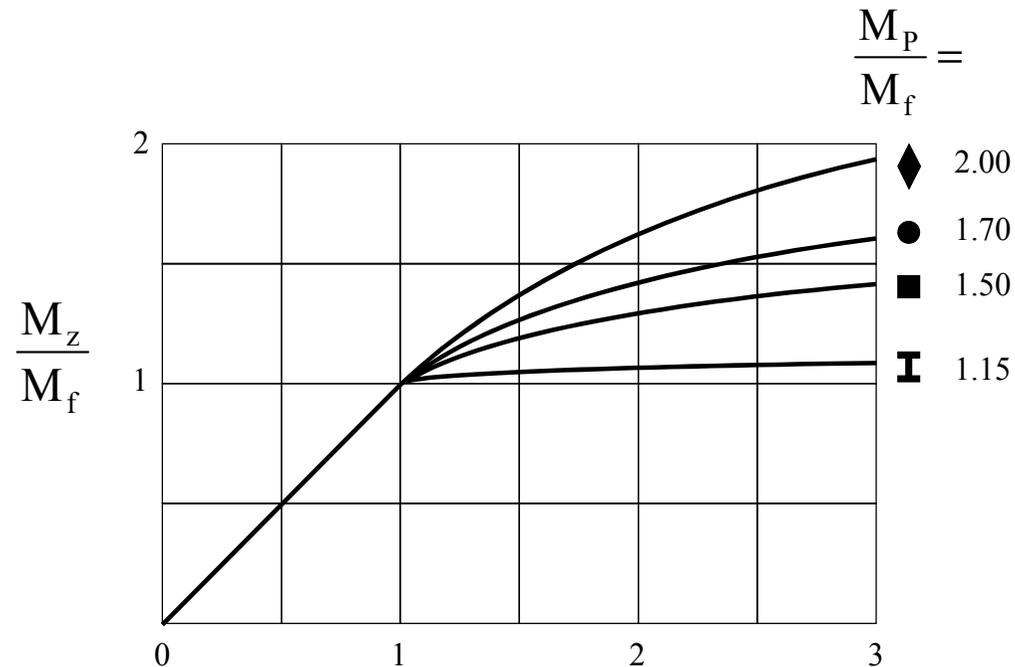
- Cuando en una sección se alcanza el momento plástico M_p , simultáneamente en ella se desarrolla una curvatura infinita, formándose un mecanismo muy parecido a una rótula (**rótula plástica**)





4. Flexión pura elastoplástica

Gráfica con los diagramas momento-curvatura para diversos tipos de secciones. Como puede observarse, la situación de plastificación total y formación de la consiguiente rótula plástica se alcanza tanto más rápidamente cuanto menor es el factor de forma f y el fenómeno es muy acusado en las vigas de sección en doble T.



Sea cual sea el tipo de sección, el diagrama consiste en una recta que representa un comportamiento linealmente elástico, seguida por una línea curva que representa el rango de valores del momento para los cuales el comportamiento de la sección es parcialmente elástico y parcialmente plástico por haberse superado el momento de fluencia.

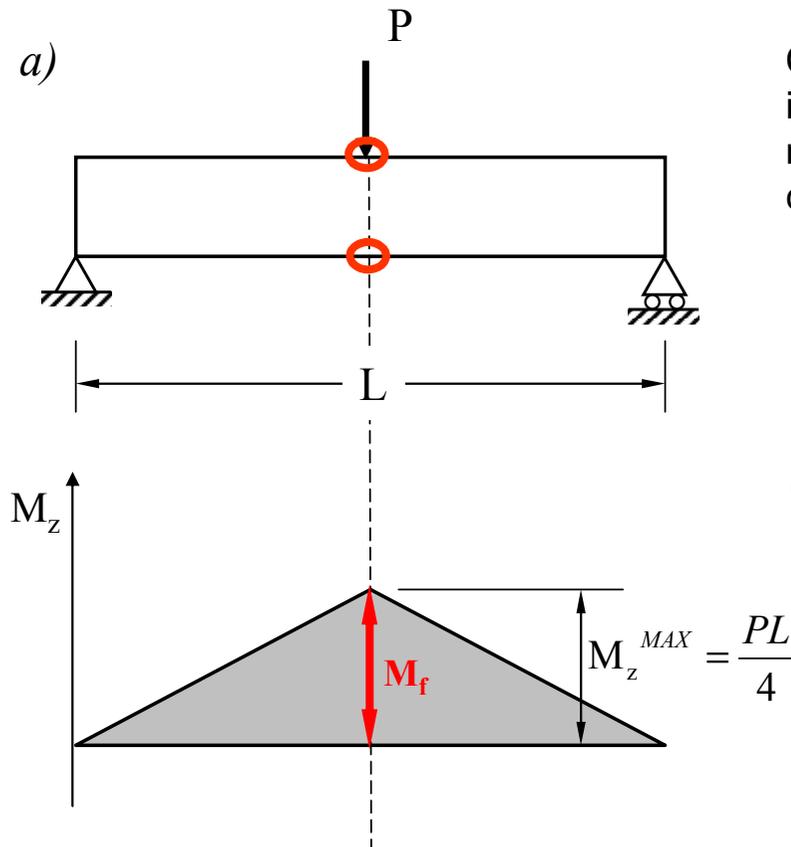


5. Análisis plástico de vigas

5.1. Análisis plástico de vigas isostáticas

- En una viga isostática, basta con que se forme una rótula plástica para que la estructura se convierta en un mecanismo.
- $M_z^{\max} = M_p$ es la condición que se impone para el cálculo de la carga de colapso.

1. Ejemplo



Considerando la viga de la figura, si la carga P se va incrementando, llegará un momento en el que el momento máximo alcance el momento de fluencia. A la carga correspondiente se le denomina carga de fluencia.

$$M_z^{\max} = PL/4 = M_f \rightarrow$$

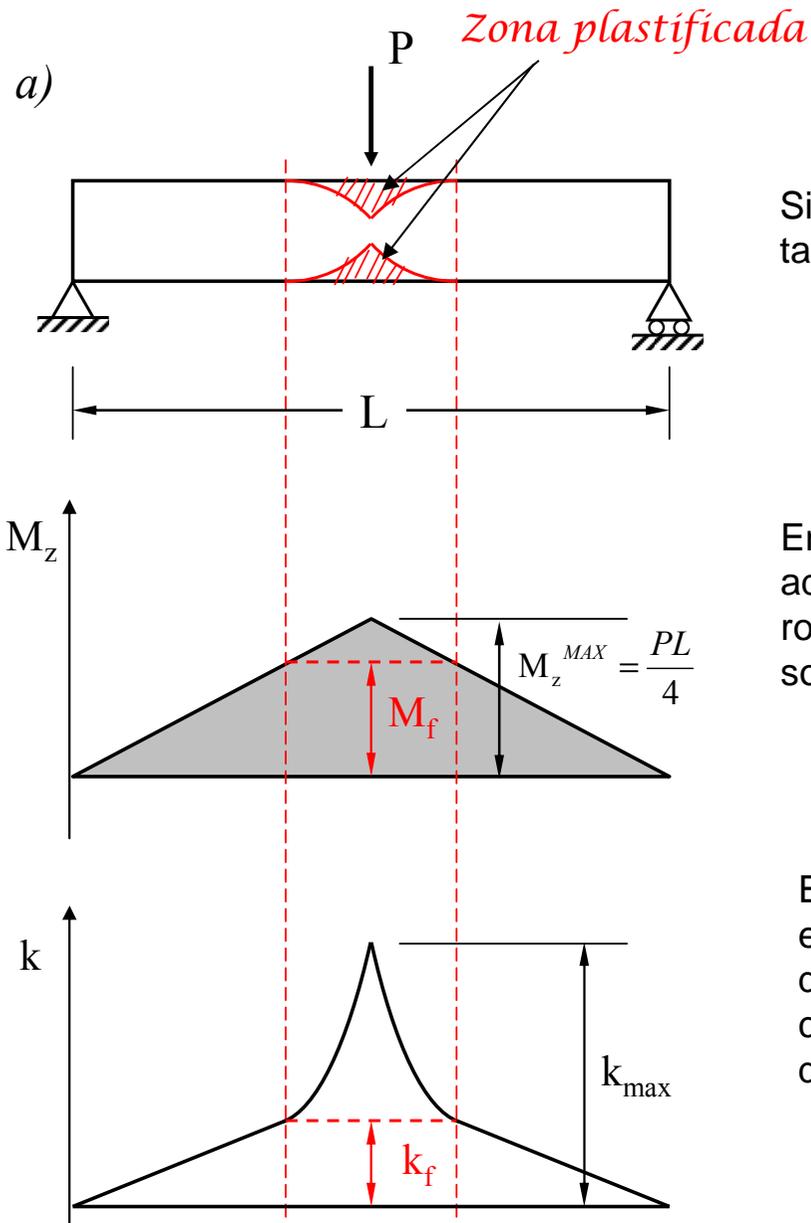
$$P_f = 4M_f/L$$

Carga de fluencia

Los puntos marcados en rojo plastificarán al haber alcanzado la tensión de fluencia.



5. Análisis plástico de vigas



Si la carga P sigue aumentando, el momento máximo también aumentará y será mayor que M_f .

$$M_z^{max} = PL/4 > M_f$$

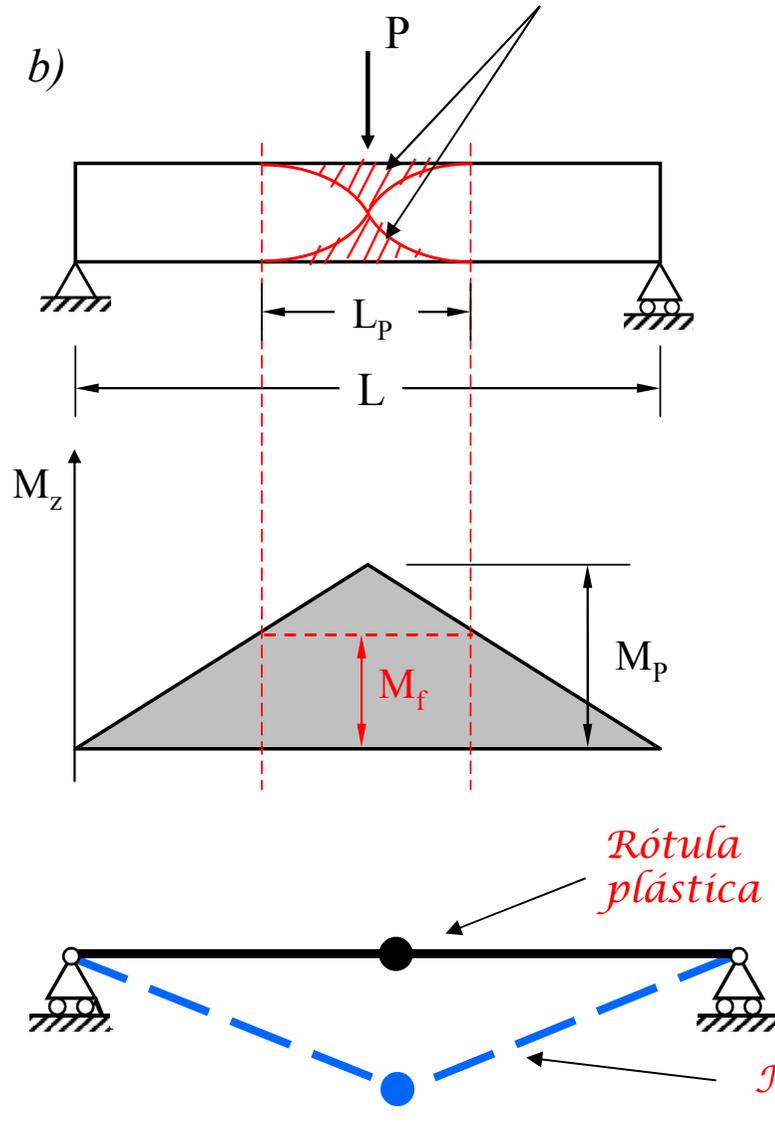
En la viga aparecerá una zona plastificada en las secciones adyacentes al punto de aplicación de la carga (marcada en rojo en la figura), dado que en esas secciones se ha sobrepasado el momento de fluencia.

En cuanto a la curvatura K , aumenta linealmente desde los extremos hasta que se alcanzan las secciones con deformaciones plásticas. A partir de ellas la curvatura crece con mayor rapidez hasta alcanzar el máximo en el centro de la viga.



5. Análisis plástico de vigas

Carga de colapso P_p Zona plastificada



Finalmente, cuando el momento máximo sea igual a M_p , la sección transversal en el centro de la viga será totalmente plástica. La curvatura alcanza valores extremadamente grandes, se forma una rótula plástica y la viga se convierte en un mecanismo.

La carga para la cual ocurre esta situación se denomina carga de colapso o carga última P_p

$$M_z^{\max} = PL/4 = M_p \rightarrow P_p = 4M_p/L$$

Carga de colapso

El mecanismo de colapso se produce al formarse una rótula plástica en el punto de aplicación de la carga P , dado que al estar los dos extremos articulados, se producen en ese instante movimientos de sólido rígido.



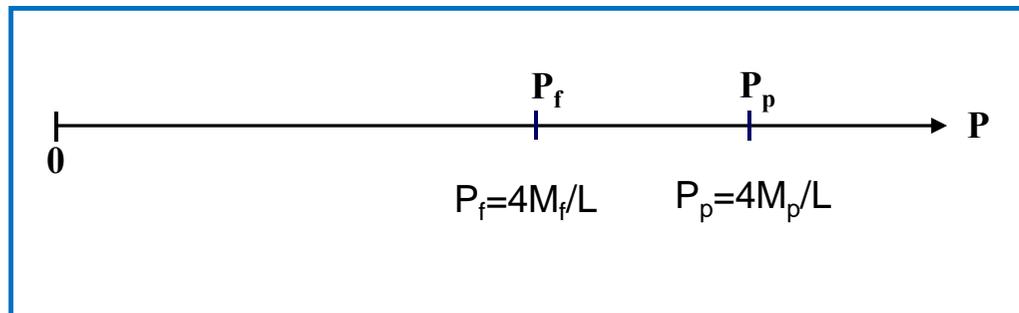
5. Análisis plástico de vigas

Relación entre P_p y P_f

En las estructuras isostáticas, por propia definición, la plastificación total de una sección, es decir, la formación de una sola rótula plástica es suficiente para convertirla en un mecanismo, dando lugar al agotamiento de la estructura.

Para este tipo de estructuras realmente tiene poco interés aplicar el método de cálculo plástico, ya que en ellas siempre se verifica que la relación entre la carga de agotamiento y la carga de fluencia es el factor de forma de la sección transversal de la viga, como puede deducirse para el caso que se ha estudiado:

$$\frac{P_p}{P_f} = \frac{M_p}{M_f} = f \quad \leftarrow \text{factor de forma}$$



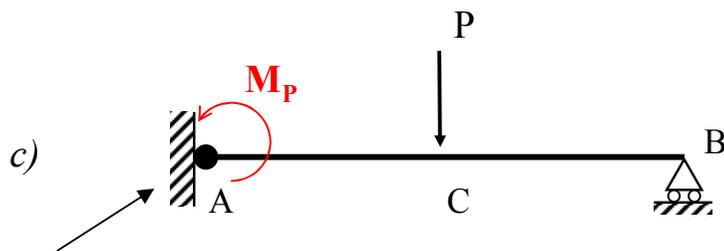
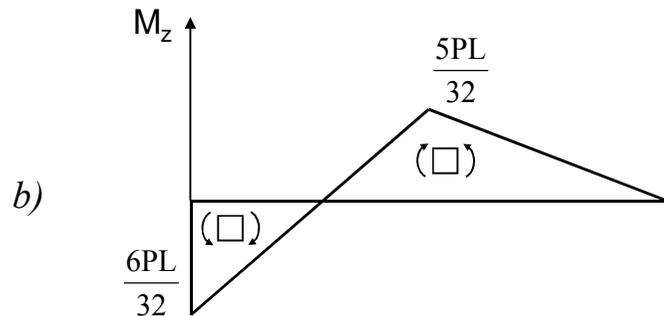
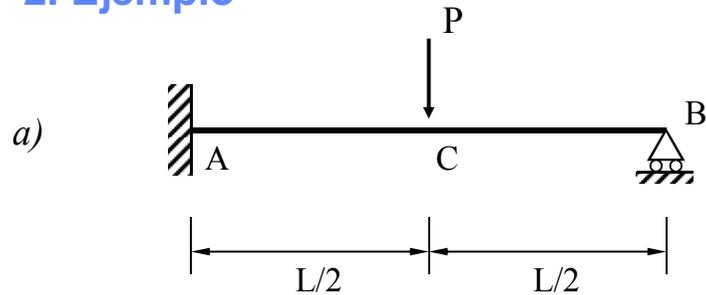


5. Análisis plástico de vigas

5.2. Análisis plástico de vigas hiperestáticas

➤ Si la estructura es hiperestática, se necesitan, como norma general, $h+1$ rótulas, siendo h el grado de hiperestaticidad de la estructura.

2. Ejemplo



Primera rótula plástica

El momento máximo se presenta en la sección empotrada A y es numéricamente igual a $6PL/32$. En dicha sección comenzará la fluencia plástica y el correspondiente valor de la carga de fluencia será:

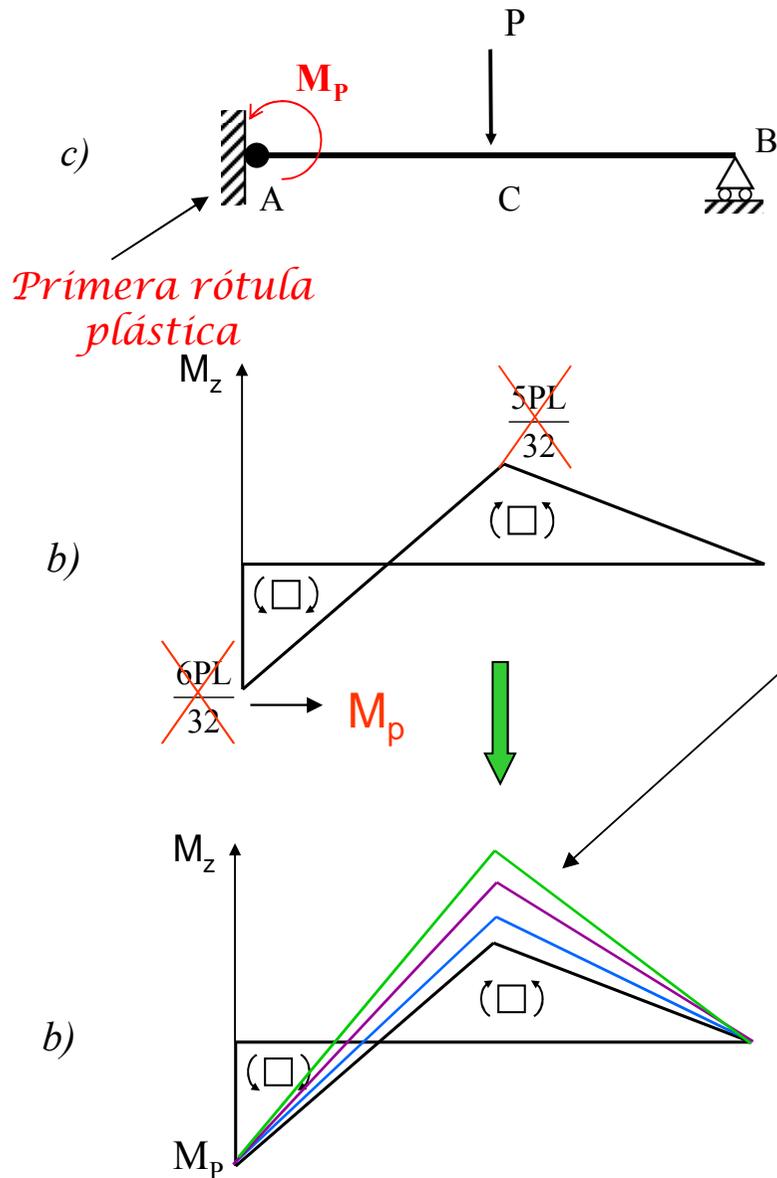
$$M_z^{\max} = 6PL/32 = M_f \rightarrow P_f = 32M_f / 6L = \boxed{16M_f / 3L}$$

Si P sigue aumentando y supera el valor de P_f , llegará un instante en el que la sección C también alcance el momento de fluencia, y empiece a plastificar.

Si la carga P aumenta lo suficiente, el momento en A alcanzará el momento plástico y se formará una rótula plástica, si bien no es suficiente para que se forme un mecanismo, y la estructura seguirá resistiendo incrementos de carga.



5. Análisis plástico de vigas



Al seguir aumentando la carga P , la sección A totalmente plastificada no es capaz de resistir un momento mayor, lo que da lugar a que secciones que todavía no se encuentran en el límite de su resistencia acudan en ayuda de aquellas que ya lo están, absorbiendo momentos superiores y modificando la forma del diagrama de momentos, que va diferenciándose con el que se tenía en régimen elástico.

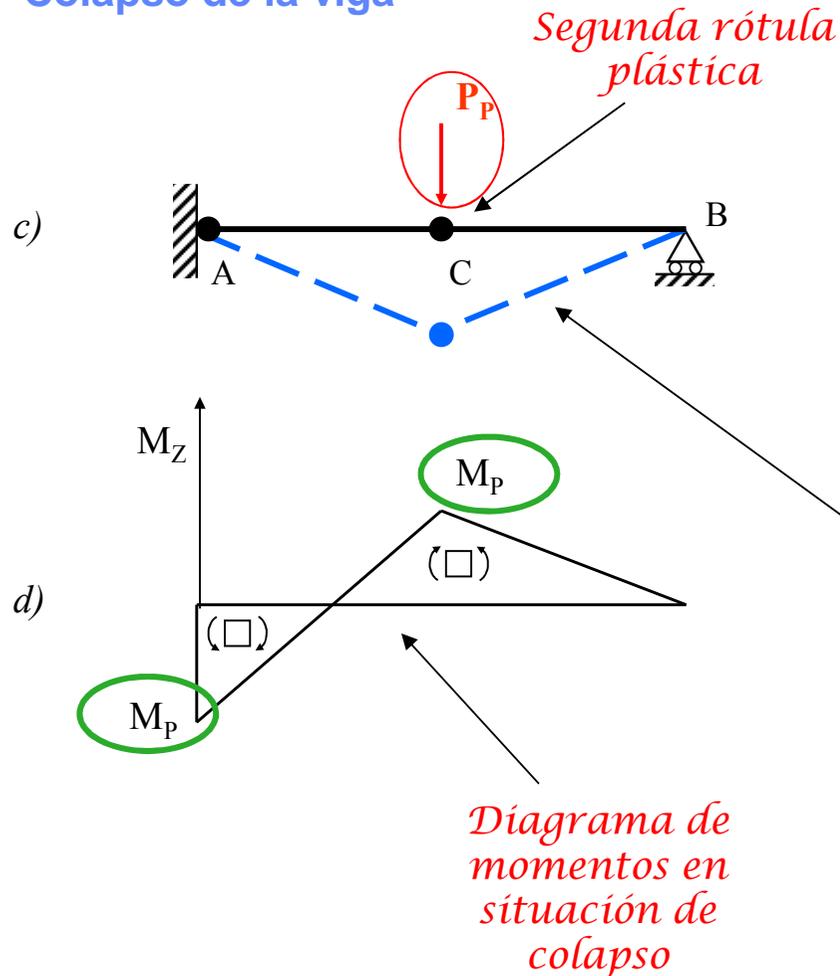
En la figura se aprecia cómo el momento C aumenta conforme lo hace la carga, mientras que el momento en A permanece constante, e igual al momento plástico.

Este fenómeno de redistribución de momentos se denomina *adaptación plástica de las secciones*, que hace que se incremente la resistencia de la viga por el hecho de que al fallar una sección, las demás secciones de la estructura soportan una carga adicional. Este hecho ocurre únicamente en estructuras hiperestáticas.



5. Análisis plástico de vigas

Colapso de la viga



Al continuar aumentando P , llegará un momento en que en la siguiente sección de momento máximo, en la sección C, se alcance también M_p , formándose en ella una nueva rótula plástica. En este instante se produce el colapso de la viga, pues se ha transformado en un mecanismo, mecanismo de colapso, siendo, por consiguiente, incapaz de absorber posteriores incrementos de carga.

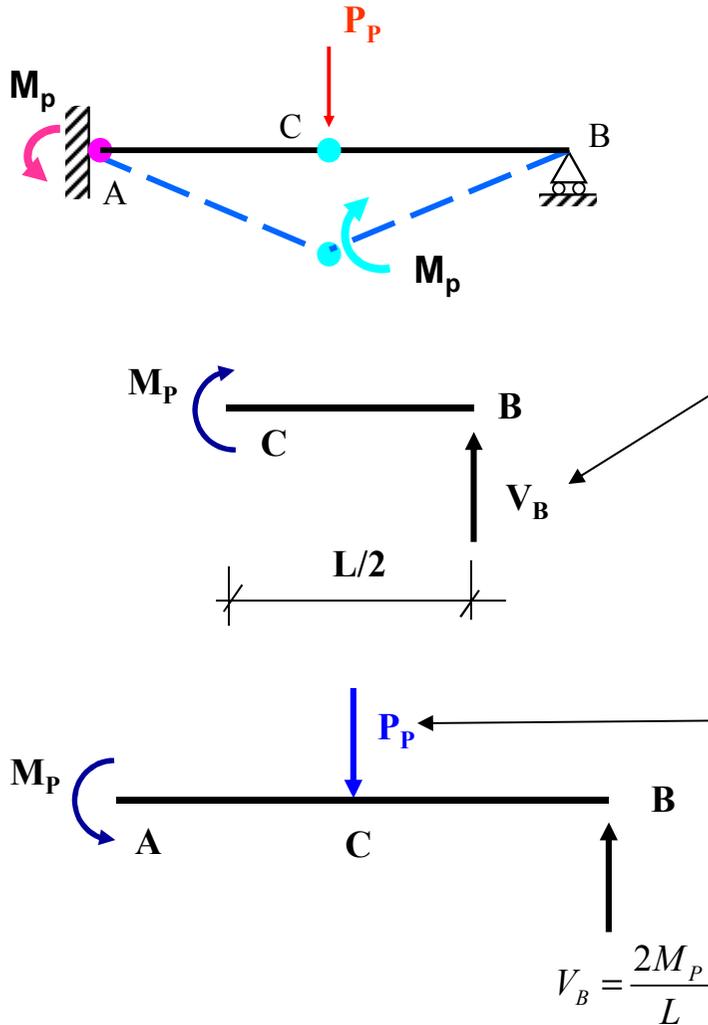
Mecanismo de colapso

En la situación final de colapso, el diagrama de momentos es como el que se muestra en la figura, con valores de momentos plásticos M_p en las rótulas plásticas que se han formado.



5. Análisis plástico de vigas

Cálculo de la carga de colapso



Puede hacerse utilizando exclusivamente ecuaciones de la estática

Planteando equilibrio de momentos respecto a C de la mitad derecha de la viga:

$$\sum M_{rotulaC} = 0$$

$$V_B \cdot \frac{L}{2} - M_p = 0$$

$$V_B = \frac{2 \cdot M_p}{L}$$

Planteando equilibrio de momentos respecto a A de toda la viga:

$$\sum M_{rotulaA} = 0$$

$$V_B \cdot L - P_p \cdot \frac{L}{2} + M_p = 0$$

$$\frac{2 \cdot M_p}{L} \cdot L - P_p \cdot \frac{L}{2} + M_p = 0$$

$$P_p = \frac{6 \cdot M_p}{L}$$



5. Análisis plástico de vigas

Comparación estructuras isostáticas e hiperestáticas

	P_f	P_p	P_p / P_f
Isostática	$4M_f / L$	$4M_p / L$	$M_p / M_f = f$
Hiperestática	$16M_f / 3L$	$6M_p / L$	$9/8 \cdot M_p / M_f = 1.125f$

*Mayor
que f*

La relación entre la carga de fluencia y la carga de colapso es mayor en la estructura hiperestática. Las estructuras hiperestáticas presentan una mayor resistencia, ya que tras formarse la primera rótula las demás secciones de la estructura empiezan a soportar una carga adicional.

- Facilidad de cálculo de la carga última P_p (equilibrio)
- Insensibilidad a las imperfecciones de contorno
- No es aplicable el principio de superposición: dependencia del orden de aplicación de las cargas (cargas aplicadas simultáneamente y proporcionales).

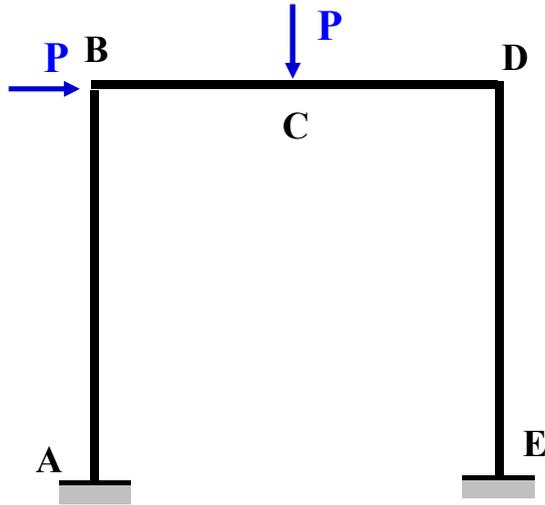


6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

- Sea cual sea el procedimiento utilizado para calcular la carga de agotamiento, un paso previo es conocer con precisión cuál es el mecanismo real de colapso de la estructura y, por lo tanto, el diagrama de momentos flectores correspondiente al momento en que la estructura se agota y se transforma en un mecanismo.
- Procedimientos para determinar el mecanismo real de colapso:
 - Método paso a paso
 - Por simple inspección
 - Método estático
 - Método cinemático
 - Método de combinación de mecanismos
- Para el estudio de estructuras de bajo grado de hiperestaticidad utilizaremos el método de simple inspección.
- En un primer paso se tratará de establecer los posibles mecanismos de colapso de la estructura que se esté analizando.
- Como para las estructuras que consideraremos el número de posibles mecanismos de agotamiento será bajo, en un segundo paso se calculará la carga de colapso para cada uno de ellos, y la menor de todas estas cargas y el mecanismo correspondiente serán la carga y el mecanismo real de colapso de la estructura que se está analizando.



6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

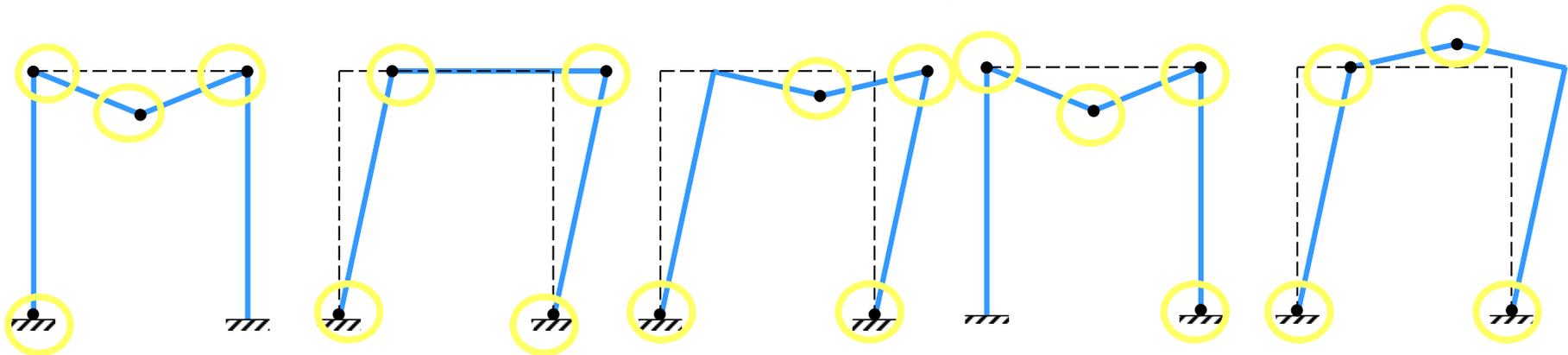


En el ejemplo del pórtico, al ser el grado de hiperestaticidad $h = 3$, se necesitarán en general 4 rótulas plásticas para formar un mecanismo de colapso.

Las secciones donde se puede formar una rótula plástica (secciones con un máximo relativo en el diagrama de momentos) son **A, B, C, D** y **E**.

Se obtienen 5 posibles mecanismos de colapso. El mecanismo real será aquél que tenga una menor carga de colapso P_p .

Posibles mecanismos de colapso:



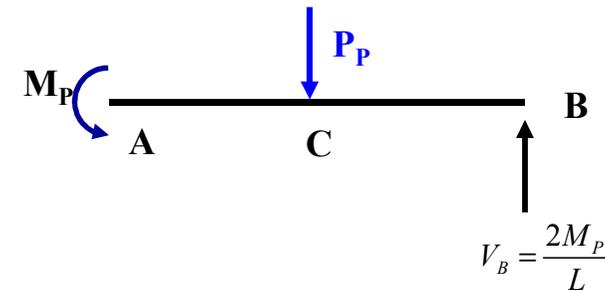
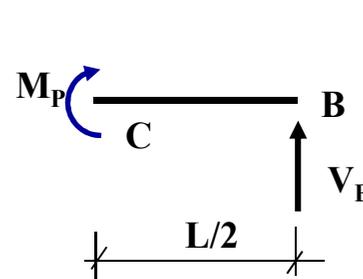
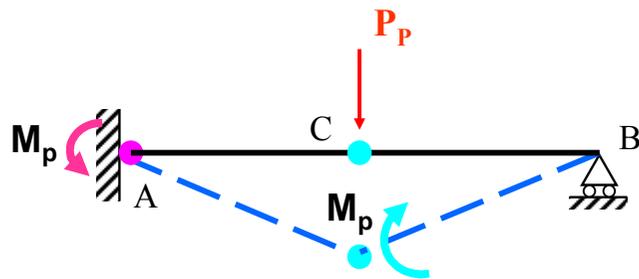


6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

- Hay dos grandes métodos para determinar la carga de colapso en cada uno de los mecanismos posibles:
 - Métodos basados en la aplicación de las condiciones de equilibrio en el momento en el que se produce el colapso en la estructura.
 - Métodos basados en la aplicación del principio de los trabajos virtuales.

6.1. Método basado en la aplicación de las condiciones de equilibrio

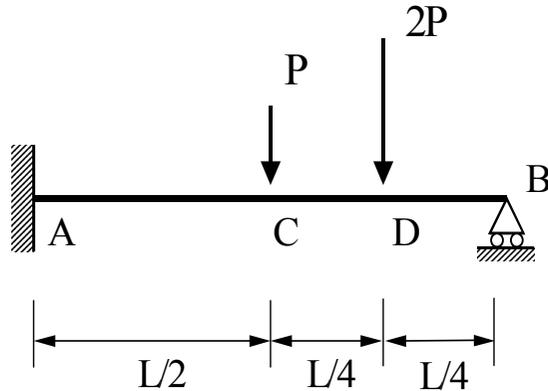
- Consiste en aplicar las ecuaciones de equilibrio a diversas partes de la estructura, una vez planteado el posible mecanismo de colapso. Dado que en la situación de colapso, se han formado en general $h + 1$ rótulas plásticas, el valor del momento flector en estas secciones es conocido, e igual al valor del momento plástico de la sección M_p .
- Conocidos los $h + 1$ momentos en las rótulas plásticas, con las condiciones de equilibrio se pueden resolver las h incógnitas hiperestáticas y la carga de colapso P_p .
- Este método es el que se ha usado para calcular la carga de colapso en la viga del apartado 5.2





6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

Ejemplo de resolución mediante las ecuaciones de equilibrio



$h = 1 \rightarrow 2$ rótulas necesarias (2 ec. de equilibrio)

Posibles secciones: A, C, D

Posibles mecanismos: AC // AD // CD

1) Mecanismo con rótulas en A y C:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_p = V_B \frac{L}{2} - 2P_p \frac{L}{4} \Rightarrow V_B = \frac{2}{L} \left(M_p + \frac{P_p L}{2} \right)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_p = P_p \frac{L}{2} + 2P_p \frac{3L}{4} - \frac{2}{L} \left(M_p + \frac{P_p L}{2} \right) L$$

$$P_p = \frac{3M_p}{L}$$



6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

2) Mecanismo con rótulas en A y D:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_p = V_B \frac{L}{4} \Rightarrow V_B = \frac{4M_p}{L}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_p = P_p \frac{L}{2} + 2P_p \frac{3L}{4} - \frac{4M_p}{L}$$

$$P_p = \frac{5M_p}{2L}$$

Solución

3) Mecanismo con rótulas en C y D:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_p = V_B \frac{L}{4} \Rightarrow V_B = \frac{4M_p}{L}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_p = 2P_p \frac{L}{4} - \frac{4M_p}{L} \frac{L}{2}$$

$$P_p = \frac{6M_p}{L}$$

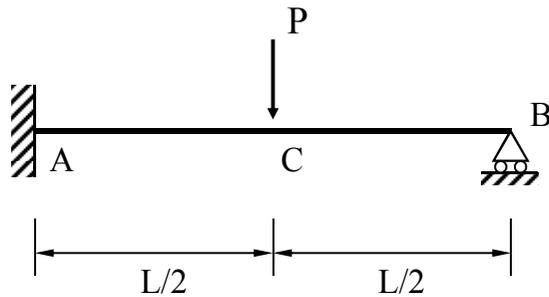
Solución: Mecanismo AD (carga de colapso menor)



6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

6.2. Método basado en el principio de los trabajos virtuales

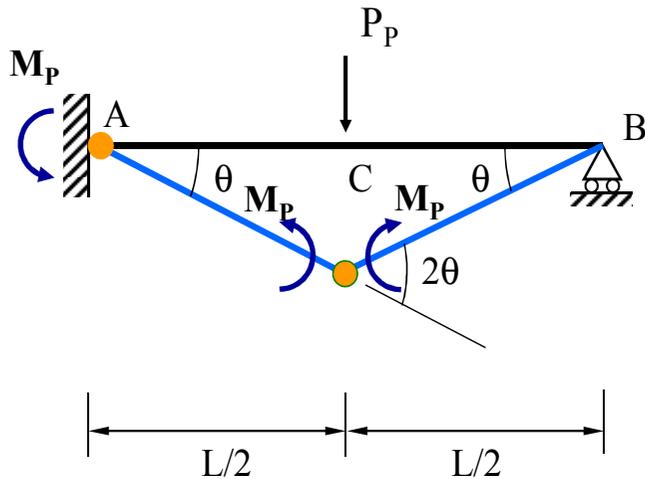
<< Si una estructura está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas, y permanece en equilibrio al ser sometida a un pequeño desplazamiento virtual (ficticio) cinemáticamente compatible, el trabajo virtual realizado por las fuerzas exteriores actuantes es igual al trabajo virtual realizado por las fuerzas interiores >>



$h = 1 \rightarrow 2$ rótulas necesarias

Posibles secciones: A, C

Posibles mecanismos: AC



Se plantea un desplazamiento virtual, y se iguala el trabajo realizado por las fuerzas exteriores (P_p) al trabajo realizado por los esfuerzos internos en las secciones plastificadas (M_p)

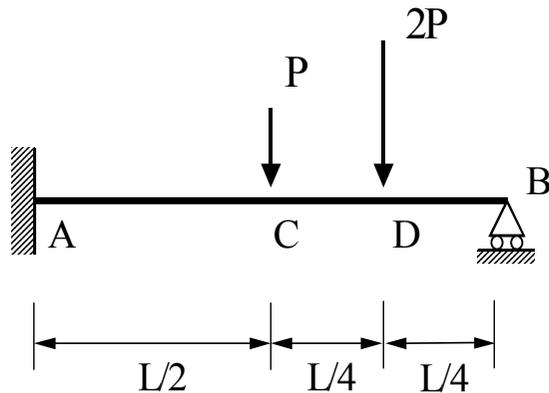
$$P_p \frac{\theta L}{2} = M_p \theta + M_p 2\theta$$

$$P_p = \frac{6M_p}{L}$$



6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

- En el caso en que sean diversos los mecanismos posibles de colapso, habrá que determinar la carga última para todos ellos y elegir el mecanismo que se produce con la mínima carga.

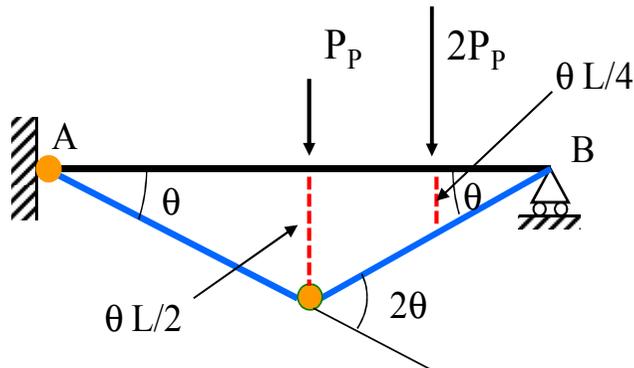


$h = 1 \rightarrow 2$ rótulas necesarias

Posibles secciones: A, C, D

Posibles mecanismos: AC // AD // CD

1) Mecanismo con rótulas en A y C:



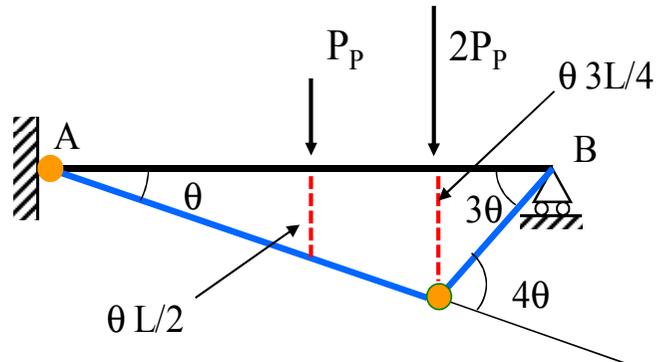
$$P_p \theta \frac{L}{2} + 2P_p \theta \frac{L}{4} = M_p \theta + M_p 2\theta$$

$$P_p = \frac{3M_p}{L}$$



6. Métodos de cálculo plástico en estructuras

2) Mecanismo con rótulas en A y D:

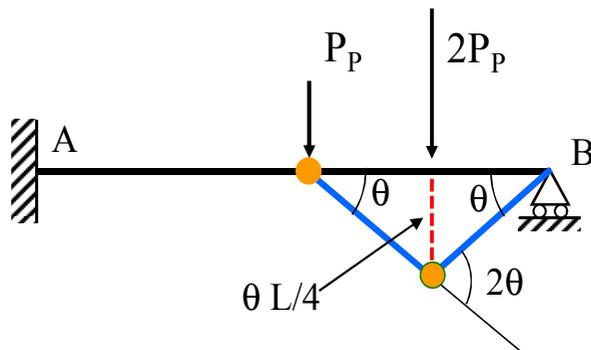


$$P_p \theta \frac{L}{2} + 2P_p \theta \frac{3L}{4} = M_p \theta + M_p 4\theta$$

$$P_p = \frac{5M_p}{2L}$$

Solución

3) Mecanismo con rótulas en C y D:



$$2P_p \theta \frac{L}{4} = M_p \theta + M_p 2\theta$$

$$P_p = \frac{6M_p}{L}$$

Solución: Mecanismo AD (carga de colapso menor)

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 6: *INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO PLÁSTICO*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU

