

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 5: *INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS MATRICIALES DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU





1. Consideraciones generales

El análisis de cualquier estructura, entendiendo como tal cualquier sistema resistente y deformable que permite la transmisión de esfuerzos producidos por un estado de carga, tiene como objeto primario la determinación de los esfuerzos y movimientos que aparecen en cualquier punto de la misma, pues una vez conocidos, aplicando las leyes de la Resistencia de Materiales, también se conocerán los estados de tensión y deformación.

La determinación de una cualquiera de estas dos características de la respuesta estructural –bien esfuerzos o bien movimientos- lleva al conocimiento de la otra, puesto que ambas están ligadas por una ley de comportamiento.

En todos los métodos de cálculo se sigue uno de los dos caminos. Y así, recordemos que en el método de la flexibilidad se calculaban en primer lugar los esfuerzos, en tanto que mediante el método de la rigidez, se calculan en primer lugar los movimientos.

En este capítulo se hará una exposición de los fundamentos básicos del método matricial de la rigidez. Se explicarán conceptos de rigidez de la estructura y de rigidez de los distintos elementos estructurales, que son las magnitudes básicas en las que se fundamenta el método y por lo tanto deben conocerse antes de proceder al desarrollo del mismo.

Como idea general, de los métodos matriciales cabe decir que son de una gran simplicidad y que no han aportado ninguna idea nueva al análisis de estructuras. Son una evolución de las ideas de autores de finales del siglo XIX y primera mitad del XX (Maxwell, Mohr,...). Su éxito radica en la adaptación de unas ideas establecidas al funcionamiento del computador.

1. Consideraciones generales

La aparición de los computadores digitales dio un gran empuje al empleo del método de la rigidez, ya que su formulación matricial y su naturaleza sistemática lo hacen muy adecuado para su tratamiento mediante un algoritmo de cálculo programado en un ordenador: lo que se hace es trasladar a este último la parte rutinaria y laboriosa del cálculo estructural. De hecho, una estructura medianamente complicada no puede resolverse con sencillez si no es empleando el método de la rigidez con formulación matricial, y tampoco el método de la rigidez puede aplicarse con sencillez a casos reales si no se programa en un computador.

Aunque es mucho más general, el método de la rigidez se aplica aquí al análisis de estructuras reticulares discretas formadas por elementos que son piezas prismáticas, que pueden trabajar a flexión, tracción y/o torsión, simultáneamente. Los fundamentos del método que se van a exponer pueden extenderse sin dificultad al estudio de estructuras formadas por elementos de tipología diferente como son las estructuras laminares y, en general, las estructuras continuas tridimensionales. De hecho, este proceso comenzó a realizarse a comienzos de la segunda década del S. XX, materializándose en el conocido método de los elementos finitos, del que puede afirmarse que se ha convertido, desde el último cuarto del siglo pasado en la más poderosa herramienta de cálculo de la matemática aplicada. Concretamente, el M.E.F. surgió como una extensión o desarrollo natural de los métodos matriciales para el cálculo de estructuras reticulares, que se venían utilizando desde unos años atrás.

Por lo tanto los tipos de estructuras cuyo análisis se aborda en este trabajo por el método de la rigidez son: celosías planas o espaciales, pórticos planos o espaciales y emparrillados planos. Las vigas continuas pueden tratarse como un caso particular de los pórticos planos. Se emplean las suposiciones habituales de material elástico-lineal, y pequeñas deformaciones.

2. Discretización, elementos y nudos

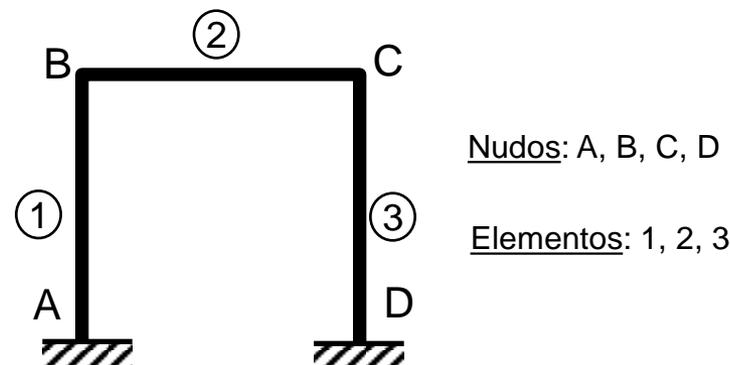
Al utilizar el método matricial de la rigidez para analizar una estructura, ésta se considera como un conjunto de elementos ensamblados, que son capaces de reproducir el comportamiento global de dicha estructura y cumplen las condiciones generales de equilibrio y compatibilidad que más adelante se analizarán detalladamente.

NUDOS → Los puntos en los que los diversos elementos se conectan entre sí o con los apoyos.

La estructura está formada por un conjunto de elementos y nudos que la reproducen físicamente.

El concepto de nudo es artificial porque, en general, su comportamiento no será diferente al de cualquier otro punto de la estructura.

En alguna ocasión se situará un nudo en un punto intermedio de una barra que, de esta forma, pasará a desdoblarse en dos elementos alineados.



Con este planteamiento se pasa del concepto de solución continua de la estructura al de solución discreta.

Solución continua

(movimientos y esfuerzos en todos los puntos)



Solución discreta

(movimientos y esfuerzos en los nudos)

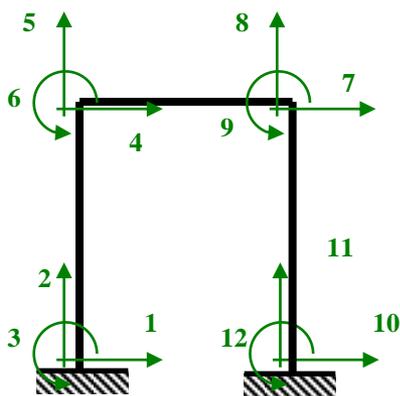
Una vez conocida la solución discreta de la estructura, utilizando las leyes de Resistencia de Materiales (o de la Teoría Elemental de Estructuras), es posible conocer los movimientos y los esfuerzos en cualquier punto intermedio de un elemento, por lo que, de forma indirecta, se dispone de un campo de solución continuo.

3. Grados de libertad

Grado de libertad de un punto → posibilidad que tiene ese punto de desplazarse, o bien las cantidades que es preciso explicitar en un punto para que su posición quede definida respecto de una posición anterior en un movimiento cualquiera, según un cierto sistema de referencia.

Grados de libertad de una estructura → conjunto de desplazamientos (desplazamientos lineales y/o giros), consecuencia de las deformaciones de sus elementos, que definen unívocamente su configuración deformada.

EJEMPLO:



$\{\Delta\} = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots, \Delta_{12}\} \rightarrow$ vector de desplazamientos

traslaciones ↓ giros

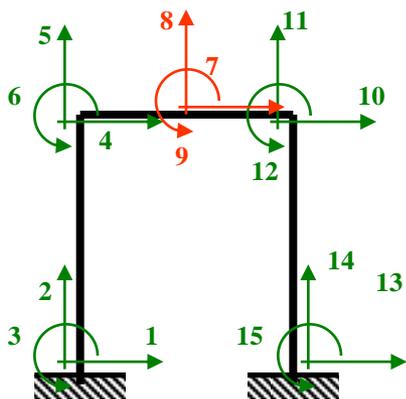
Δ_i = desplazamiento según el grado de libertad i
En este caso el número de grados de libertad es 12

“Cargas en los nudos”

$\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_{12}\}$

F_i = Fuerza o momento según el grado de libertad i

Otra manera



$\{\Delta\} = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots, \Delta_{15}\} \rightarrow$ vector de desplazamientos

traslaciones ↓ giros

En este caso el número de grados de libertad es 15

4. Concepto de rigidez de una estructura

Teóricamente se obtiene la ecuación fundamental del método: $\{F\}=[K]\{\Delta\}$

Donde

$\{F\}$ = Vector de fuerzas exteriores que actúan sobre la estructura

$\{\Delta\}$ = Vector de desplazamientos de los nudos de la estructura

$[K]$ = Matriz de rigidez de la estructura

Esta ecuación matricial representa las n ecuaciones lineales de equilibrio de la estructura en la dirección de sus n grados de libertad, y es la ecuación fundamental del método de la rigidez.

Conociendo los valores de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, se obtienen sus desplazamientos por solución del sistema de ecuaciones anterior.

Por ser las incógnitas del problema, este método se enmarca en el grupo de los denominados *métodos de los desplazamientos*.

Los elementos de la matriz de rigidez son los coeficientes de rigidez de la estructura.

$$\{F\}_{n \times 1} = [K]_{n \times n} \{\Delta\}_{n \times 1}$$

$n \rightarrow$ número de grado de libertad

Se representan las n ecuaciones de equilibrio de la estructura.



4. Concepto de rigidez de una estructura

4.1. Significado físico de la matriz de rigidez

Se impone en la estructura el siguiente **estado de deformación**: al grado de libertad j se le impone una deformación de valor unidad mientras que los restantes grados de libertad se mantienen fijos.

$$\begin{cases} \Delta_i = 1 \quad (i=j) & \Delta_i = 0 \quad (i \neq j) \\ \{\Delta\} = \{0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0, 0, 0\} \\ j = \text{grado de libertad en una dirección } \forall \end{cases}$$

Fuerzas que es preciso aplicar según los distintos grados de libertad para que este estado de deformación sea posible:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_j \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1j} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2j} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & K_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{1j} \\ K_{2j} \\ K_{3j} \\ \dots \\ K_{ij} \\ \dots \end{Bmatrix}$$

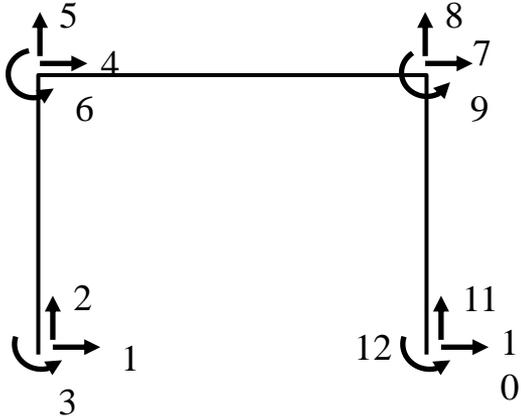
Fuerza necesaria en la dirección 1
Fuerza necesaria en la dirección 2
Fuerza necesaria en la dirección 3
Fuerza necesaria en la dirección i

K_{ij} = Fuerza que hay que aplicar según el grado de libertad i al introducir un desplazamiento unidad según el grado de libertad j , manteniendo fijos todos los demás grados de libertad.



4. Concepto de rigidez de una estructura

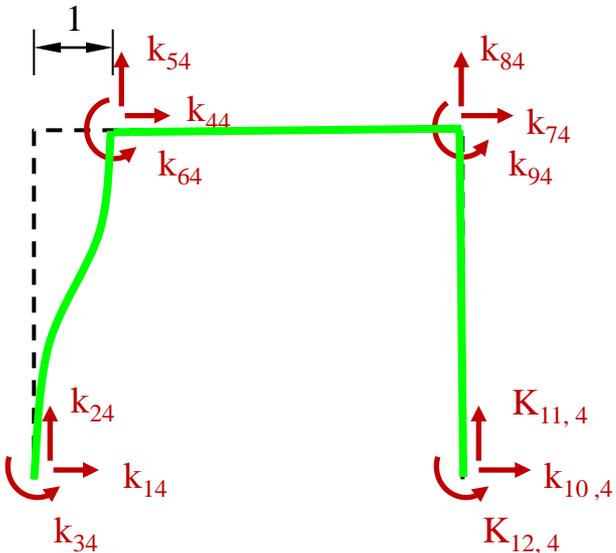
Ejemplo:



Supongamos que en la estructura de la figura se da un desplazamiento unitario en la dirección del grado de libertad 4 y nulo en los demás.

¿Que **fuerzas** hay que aplicar para que la estructura se deforme de tal manera?

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_3 \\ F_3 \\ F_3 \\ F_3 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & \dots & \dots & \dots & K_{1,12} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \dots \\ K_{41} & \dots & \dots & K_{44} & \dots \\ K_{51} & \dots & \dots & K_{54} & \dots \\ K_{61} & \dots & \dots & K_{64} & \dots \\ K_{71} & \dots & \dots & K_{74} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & K_{84} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & K_{94} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & K_{10,4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & K_{11,4} & \dots \\ K_{12,1} & \dots & \dots & K_{12,4} & \dots & K_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{14} \\ K_{24} \\ K_{34} \\ K_{44} \\ K_{54} \\ K_{64} \\ K_{74} \\ K_{84} \\ K_{94} \\ K_{10,4} \\ K_{11,4} \\ K_{12,4} \end{Bmatrix}$$



Las **fuerzas** a aplicar son los coeficientes de la 4ª columna de la matriz de rigidez.



4.2. Cálculo de la matriz de rigidez

La matriz de rigidez de una estructura o de un elemento estructural puede determinarse imponiendo sucesivos valores unitarios a todos y cada uno de los grados de libertad de la estructura y calculando las fuerzas que es necesario aplicar desde el exterior, sobre cada uno de ellos, para producir la deformación deseada.

Cada vez que se impone un desplazamiento unitario según un determinado grado de libertad j , el cálculo de los correspondientes coeficientes es en general un problema hiperestático, en el que el dato conocido es un desplazamiento impuesto, de valor unidad, y en el que deben calcularse las reacciones sobre todos los grados de libertad.

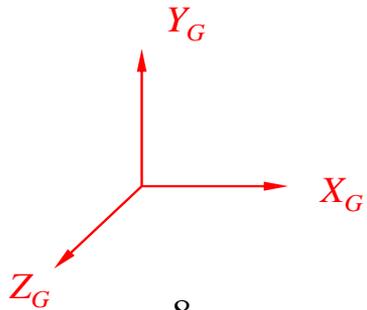
El cálculo la matriz de rigidez mediante este procedimiento y para toda la estructura, resulta muy complicado, pues hay que calcular tantas veces la estructura como grados de libertad tenga, y cada cálculo es un problema hiperestático. Este método por lo tanto no puede aplicarse de forma directa a toda la estructura.

La solución para formar la matriz de forma simple consiste en calcularla independientemente para cada elemento, con objeto de obtener la expresión de la **matriz de rigidez del elemento aislado**. A continuación se efectúa un **proceso de unión o ensamblaje de las matrices de los distintos elementos**, a fin de obtener la matriz de rigidez de toda la estructura.

5. Transformación de coordenadas

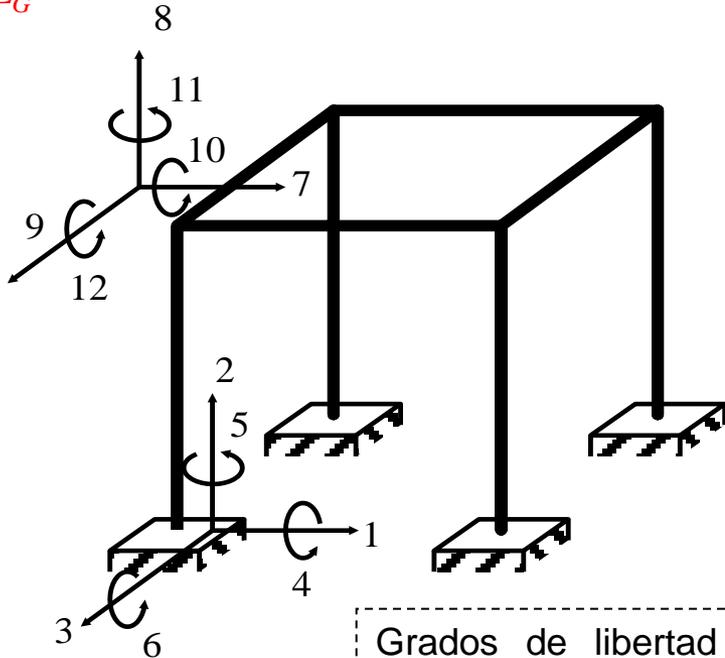
5.1. Coordenadas locales y generales

Sistema de coordenadas general (X_G, Y_G, Z_G)

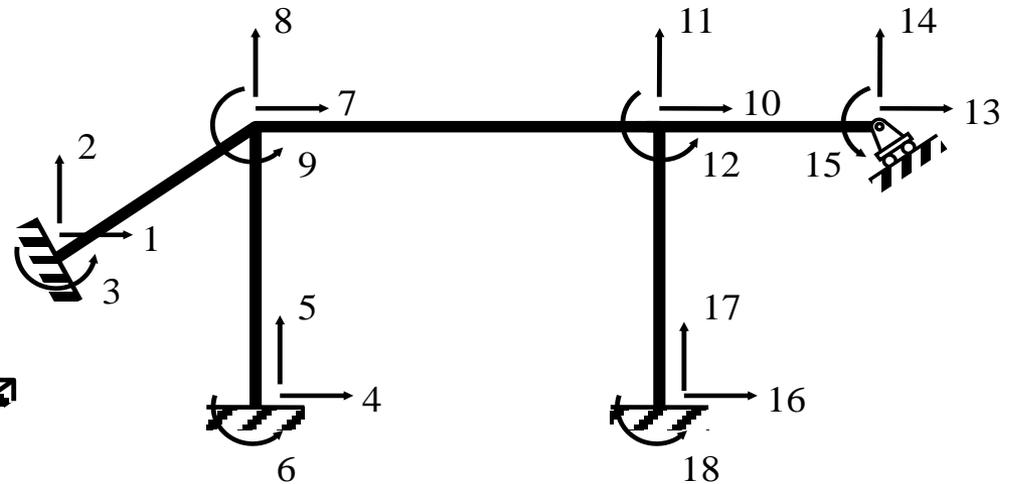


Se expresarán diferentes magnitudes de la estructura:

- Posición de los nudos
- Dirección de las cargas
- Forma de los elementos
- Desplazamientos
- ...



Grados de libertad de los nudos de un pórtico espacial



Grados de libertad de los nudos de una estructura plana

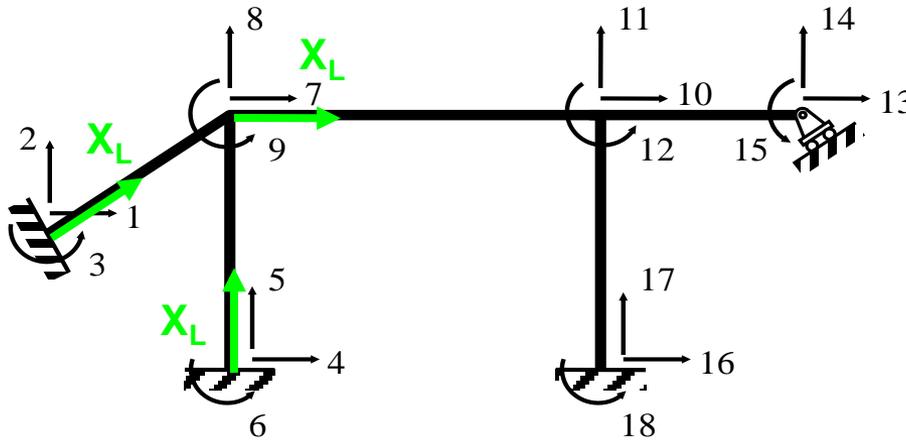
5. Transformación de coordenadas

Sistema de coordenadas local (X_L, Y_L, Z_L)

Corresponde a cada elemento y el eje X_L coincide con el eje de la pieza.

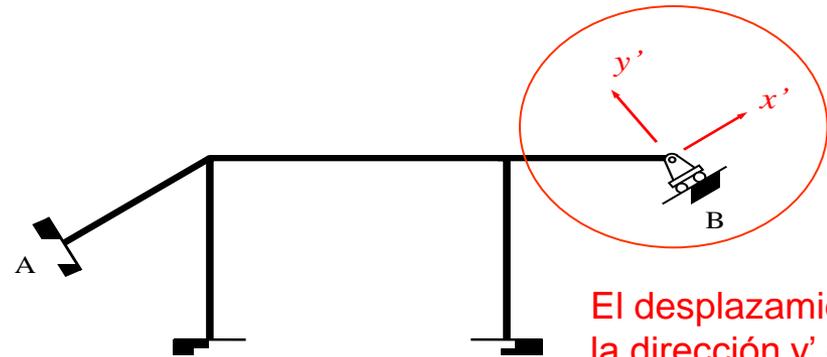
Mediante este sistema se logra independencia respecto de la orientación del elemento.

Es posible calcular la matriz de rigidez de cada tipo de elemento sin tener en cuenta su posición respecto de la estructura.



Sistema de coordenadas nodal

Necesario para expresar condiciones de contorno.



El desplazamiento en la dirección y' es nulo

5.2. Transformación de coordenadas

La aplicación del método de la rigidez requiere plantear el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de desplazamientos en los nudos de la estructura. Puesto que las matrices de rigidez de los elementos están referidas al sistema local, es preciso expresarlas en un sistema común, que es el sistema global de coordenadas. Para ello será preciso realizar la transformación de matrices de un sistema de coordenadas a otro.

Cambio de coordenadas de un vector en el plano

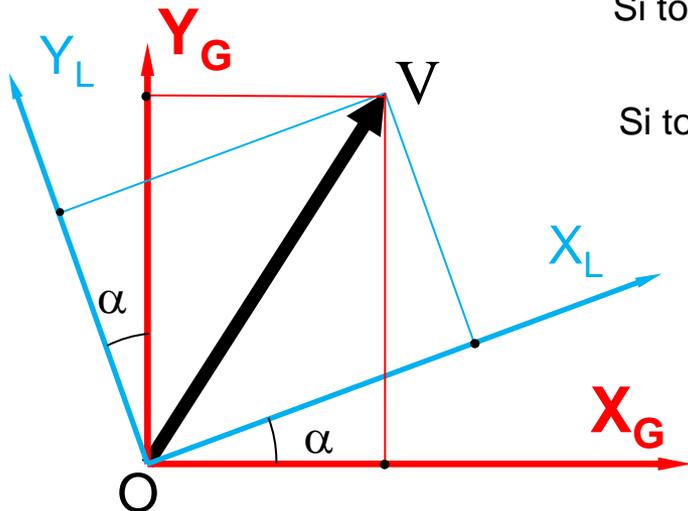
Un vector cualquiera $\{V\}$ tendrá componentes distintas según a qué sistema se refiera, componentes que se denominarán como:

Sistema global $\{V_G\}^T = \{x_G \ y_G\}$ Sistema local $\{V_L\}^T = \{x_L \ y_L\}$

Queremos hallar la matriz de transformación de coordenadas de un sistema a otro:
$$\begin{Bmatrix} X_L \\ Y_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_G \\ Y_G \end{Bmatrix}$$

Si tomamos como vector $\{V\}$ el eje X_G
$$\begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ c \end{Bmatrix} \quad \text{1º columna}$$

Si tomamos como vector $\{V\}$ el eje Y_G
$$\begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} \quad \text{2º columna}$$



Entonces:

$$\begin{Bmatrix} X_L \\ Y_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_G \\ Y_G \end{Bmatrix}$$

Matriz $[T_0]$, ORTONORMAL ($[T_0]^{-1} = [T_0]^T$)



5. Transformación de coordenadas

Si se tiene en cuenta el giro (θ_z) en el plano:

$$\begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ \theta_L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ \theta_G \end{pmatrix}$$

Entonces para transformar cualquier vector:

De globales a locales:

$$\{V_L\} = [T_0] \cdot \{V_G\}$$

De locales a globales:

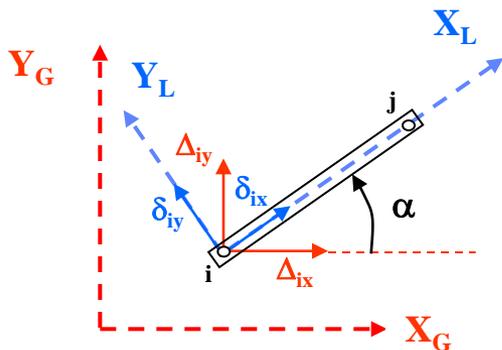
$$\{V_G\} = [T_0]^T \cdot \{V_L\}$$

Cambio de coordenadas de una matriz

El objetivo es hallar una expresión que relacione la matriz de rigidez en coordenadas locales con la misma matriz en coordenadas generales.

Transformación de los vectores de fuerza y desplazamiento de cada nudo de un elemento

Desplazamientos

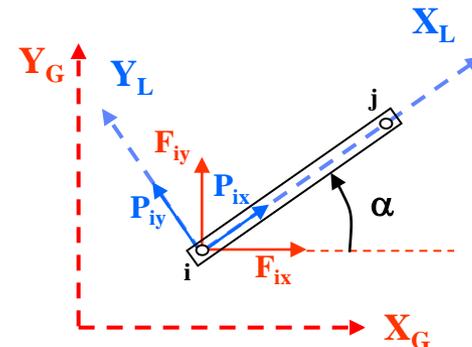


LOCAL GLOBAL

$$\{\delta_i\} = [T_0] \cdot \{\Delta_i\}$$

$$\{\delta_j\} = [T_0] \cdot \{\Delta_j\}$$

Fuerzas



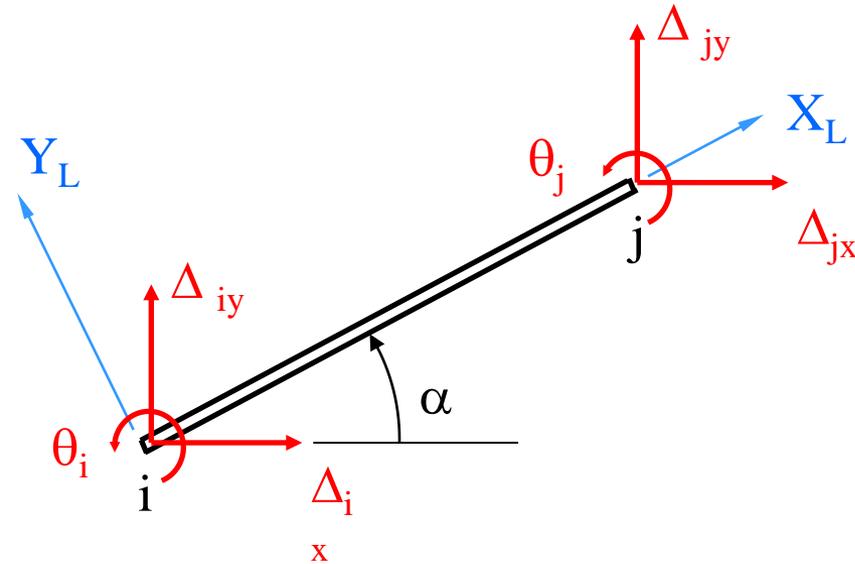
LOCAL GLOBAL

$$\{P_i\} = [T_0] \cdot \{F_i\}$$

$$\{P_j\} = [T_0] \cdot \{F_j\}$$

5. Transformación de coordenadas

Transformación de los vectores de fuerza y desplazamiento del elemento



Desplazamientos

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_0] & [0] \\ [0] & [T_0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta_i\} \\ \{\Delta_j\} \end{Bmatrix} = [T_2] \cdot \{\Delta\}$$

Fuerzas

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_i\} \\ \{P_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_0] & [0] \\ [0] & [T_0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \end{Bmatrix} = [T_2] \cdot \{F\}$$

Se introducen estas expresiones en las ecuaciones de equilibrio del elemento: $\{P\} = [K_L^e] \{\delta\}$

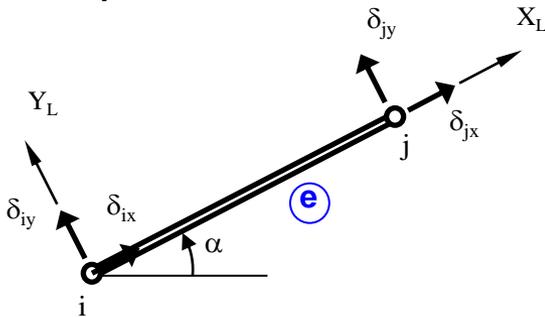
$$[T_2] \cdot \{F\} = [K_L^e] [T_2] \cdot \{\Delta\} \Rightarrow \{F\} = [T_2]^T \cdot [K_L^e] [T_2] \cdot \{\Delta\} \Rightarrow [K_G^e]_{6 \times 6} = \left([T_2]^T \cdot [K_L^e] [T_2] \right)_{6 \times 6}$$

$$[K_{Gij}^e]_{3 \times 3} = \left([T_0]^T \cdot [K_{Lij}^e] [T_0] \right)_{3 \times 3} \quad / \quad ij = 11, 12, 21, 22$$

Tal y como se indicó al introducir el método de la rigidez, el construir la matriz de rigidez para la totalidad de la estructura de forma directa no es sencillo. Por ello se realiza el análisis elemento a elemento, construyendo la matriz de rigidez de cada uno de ellos en su sistema de ejes local, para luego proyectarla sobre el sistema de ejes global.

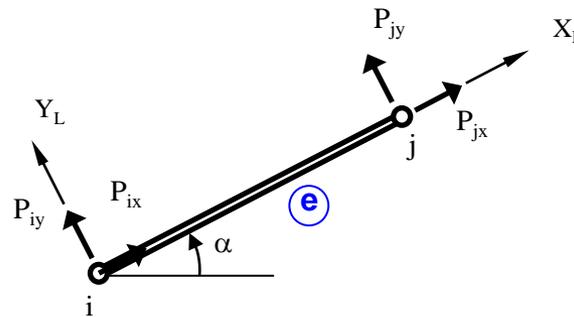
6.1. Barra articulada plana

Desplazamientos



No hay giro como grado de libertad

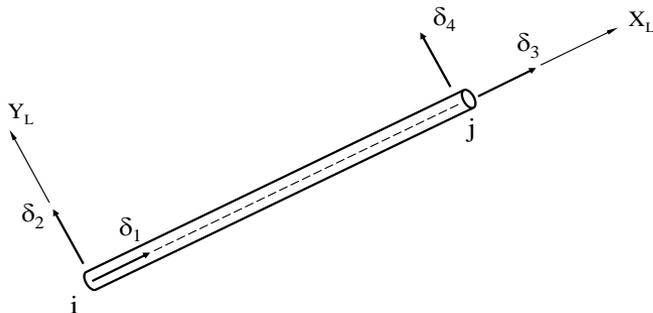
Fuerzas



No hay momento

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^e \\ \delta_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{ix}^e \\ \delta_{iy}^e \\ \delta_{jx}^e \\ \delta_{jy}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$

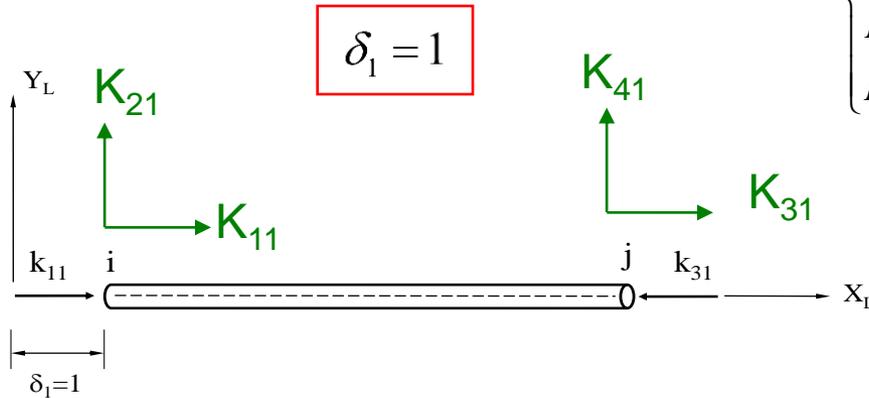
$$\{P^e\} = \begin{Bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \\ P_{jx}^e \\ P_{jy}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$



$$[K_L^e] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} & \color{red}{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \color{red}{1} \\ \color{red}{2} \\ \color{red}{3} \\ \color{red}{4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \color{blue}{i} \\ \color{blue}{j} \end{matrix}$$

6. Matrices de rigidez de elementos estructurales

Cálculo de los coeficientes de la matriz

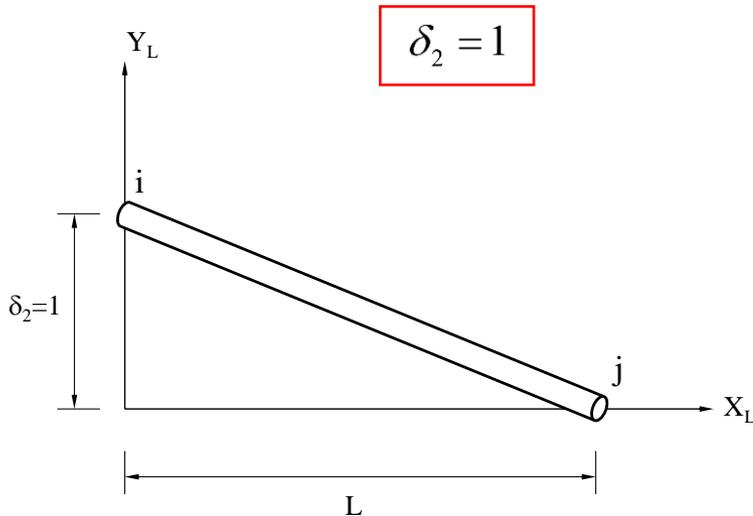


$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \end{Bmatrix}$$

$$1 = \frac{K_{11} \cdot L}{EA} \Rightarrow K_{11} = \frac{EA}{L}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow K_{31} = -K_{11} = -\frac{EA}{L}$$

$$K_{21} = K_{41} = 0$$



$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ K_{32} \\ K_{42} \end{Bmatrix}$$

$$K_{i2} = K_{2i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

En pequeñas deformaciones el nudo i se puede mover respecto al nudo j y no se generan esfuerzos.

$$\delta_3 = 1$$

$$\underline{K_{33} = \frac{EA}{L}}; \quad \underline{K_{13} = -K_{33} = -\frac{EA}{L}}; \quad \underline{K_{23} = K_{43} = 0}$$

$$\delta_4 = 1$$

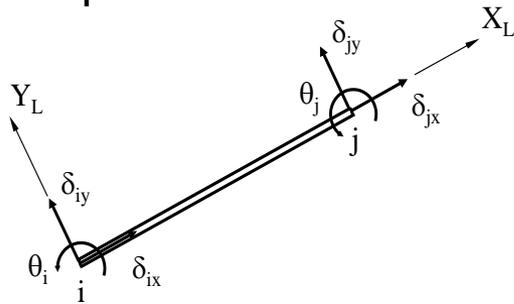
$$\underline{K_{i4} = K_{4i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)}$$

Ecuación de equilibrio del elemento

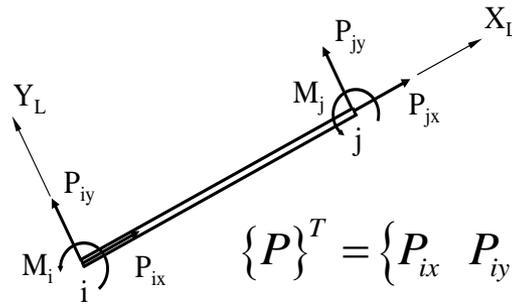
$$\begin{Bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \\ \dots \\ P_{jx}^e \\ P_{jy}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & \vdots & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \vdots & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{ix}^e \\ \delta_{iy}^e \\ \dots \\ \delta_{jx}^e \\ \delta_{jy}^e \end{Bmatrix} \quad \{P^e\} = [K_L^e] \cdot \{\delta^e\}$$

6.2. Viga flexión en el plano

Desplazamientos



Fuerzas

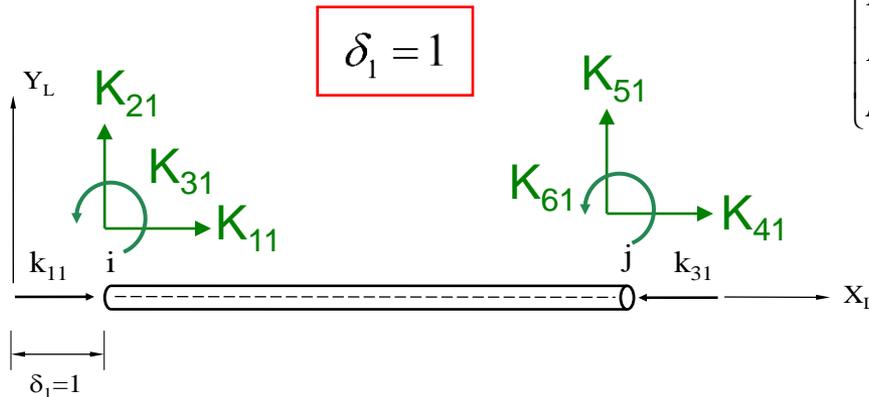


$$[K_L^e] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{61} & K_{62} & \dots & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$\{P\}^T = \{P_{ix} \ P_{iy} \ M_i \ P_{jx} \ P_{jy} \ M_j\} = \{P_1 \ P_2 \ M_3 \ P_4 \ P_5 \ M_6\}$$

$$\{\delta\}^T = \{\delta_{ix} \ \delta_{iy} \ \theta_i \ \delta_{jx} \ \delta_{jy} \ \theta_j\} = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \theta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \theta_6\}$$

Cálculo de los coeficientes de la matriz



$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \\ K_{51} \\ K_{61} \end{Bmatrix}$$

$$1 = \frac{K_{11} \cdot L}{EA} \Rightarrow K_{11} = \frac{EA}{L}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow K_{41} = -K_{11} = -\frac{EA}{L}$$

$$K_{21} = K_{31} = K_{51} = K_{61} = 0$$

6. Matrices de rigidez de elementos estructurales

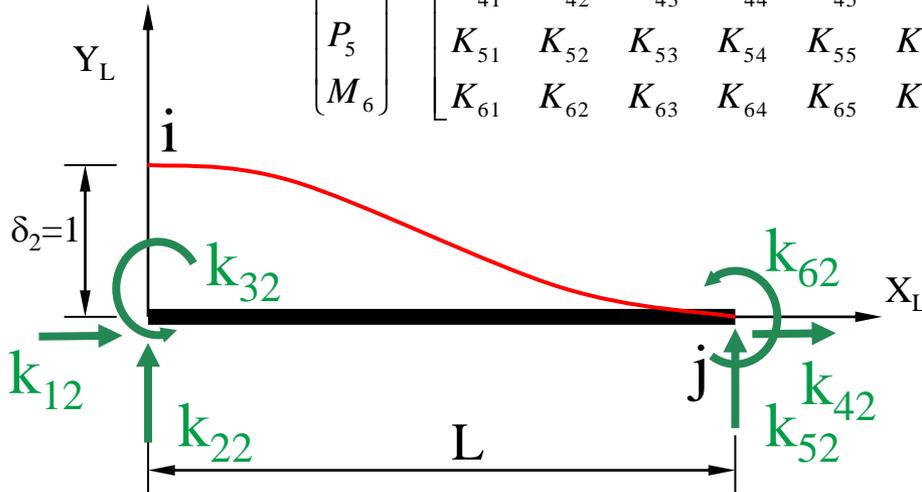
$$\delta_2 = 1$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ K_{32} \\ K_{42} \\ K_{52} \\ K_{62} \end{Bmatrix}$$

Los esfuerzos axiales son nulos para ese desplazamiento.

Por lo tanto:

$$\underline{K_{12} = K_{42} = 0}$$



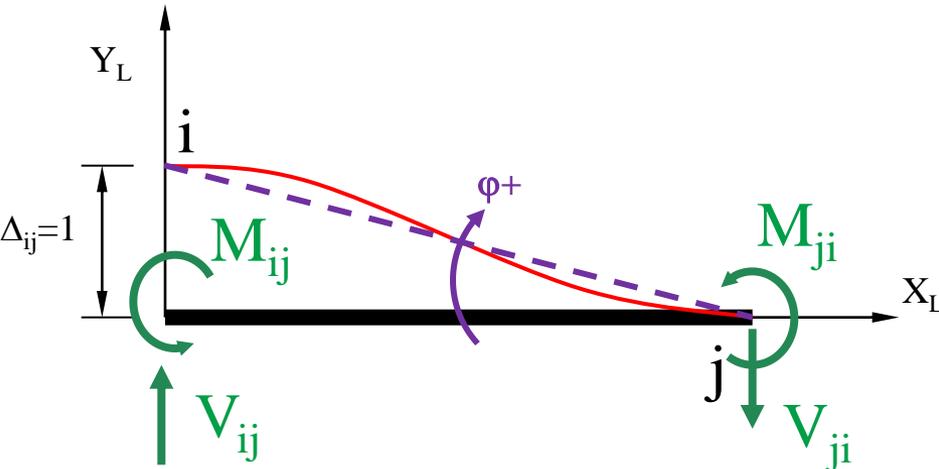
Para calcular los demás esfuerzos utilizamos el método de la deformación angular:

$$M_{ij} = 0 + \frac{4EI}{L} \left[0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \frac{1}{L} \right] = \frac{6EI}{L^2} = K_{32}$$

$$M_{ji} = 0 + \frac{4EI}{L} \left[0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \frac{1}{L} \right] = \frac{6EI}{L^2} = K_{62}$$

$$V_{ij} = V_{ji} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$\underline{K_{22} = V_{ij} = \frac{12EI}{L^3}} \quad \underline{K_{52} = -V_{ji} = -\frac{12EI}{L^3}}$$



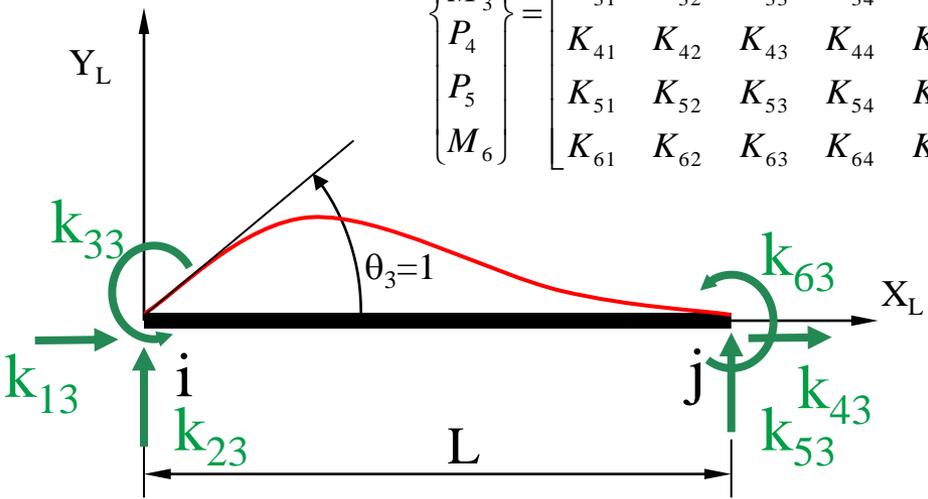
6. Matrices de rigidez de elementos estructurales

$\theta_3=1$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \\ K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{Bmatrix}$$

Los esfuerzos axiales son nulos para ese desplazamiento.

Por lo tanto:
 $K_{13}=K_{43}=0$



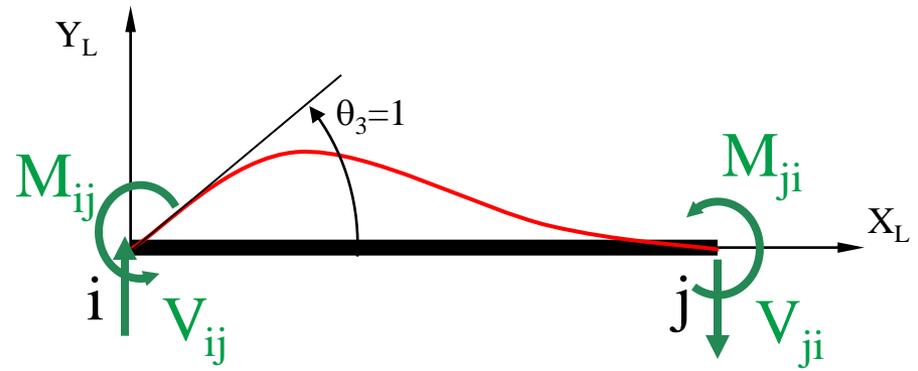
Para calcular los demás esfuerzos utilizamos el método de la deformación angular:

$$M_{ij} = 0 + \frac{4EI}{L} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \frac{0}{L} \right] = \frac{4EI}{L} = K_{33}$$

$$M_{ji} = 0 + \frac{4EI}{L} \left[0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \frac{0}{L} \right] = \frac{2EI}{L} = K_{63}$$

$$V_{ij} = V_{ji} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$K_{23} = V_{ij} = \frac{6EI}{L^2} \quad K_{53} = -V_{ji} = -\frac{6EI}{L^2}$$



Análogamente suponiendo $\delta_4=1, \delta_5=1$ y $\theta_6=1$ se obtienen la 4º, 5º y 6º columnas de la matriz.

Ecuación de equilibrio del elemento

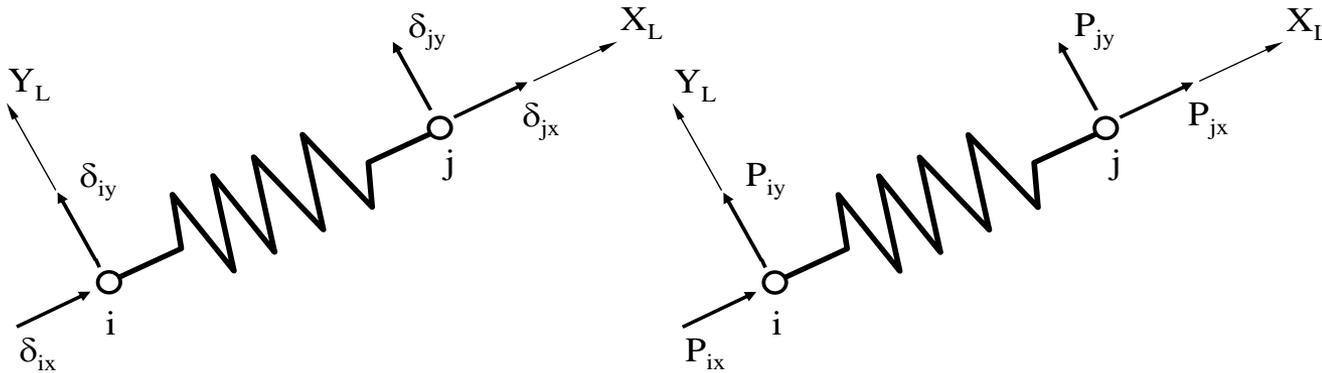
$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_i \\ \dots \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \vdots & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \vdots & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \vdots & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \vdots & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \vdots & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \vdots & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \theta_i \\ \dots \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \{P^e\} = [K_L^e] \cdot \{\delta^e\}$$

Esta ecuación de equilibrio se puede poner separada para las magnitudes de cada nudo :

$$\begin{Bmatrix} \{P_i\} \\ \{P_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{Lii}^e] & [K_{Lij}^e] \\ [K_{Lji}^e] & [K_{Ljj}^e] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \end{Bmatrix}$$

6.3. Muelles de esfuerzo axial

Los muelles de esfuerzo axial se comportan exactamente igual que los elementos de celosía biarticulados: sólo pueden absorber fuerza axial y sólo la deformación axial es significativa. El comportamiento del muelle viene caracterizado por su rigidez K , que corresponde al factor EA/L de las barras biarticuladas.

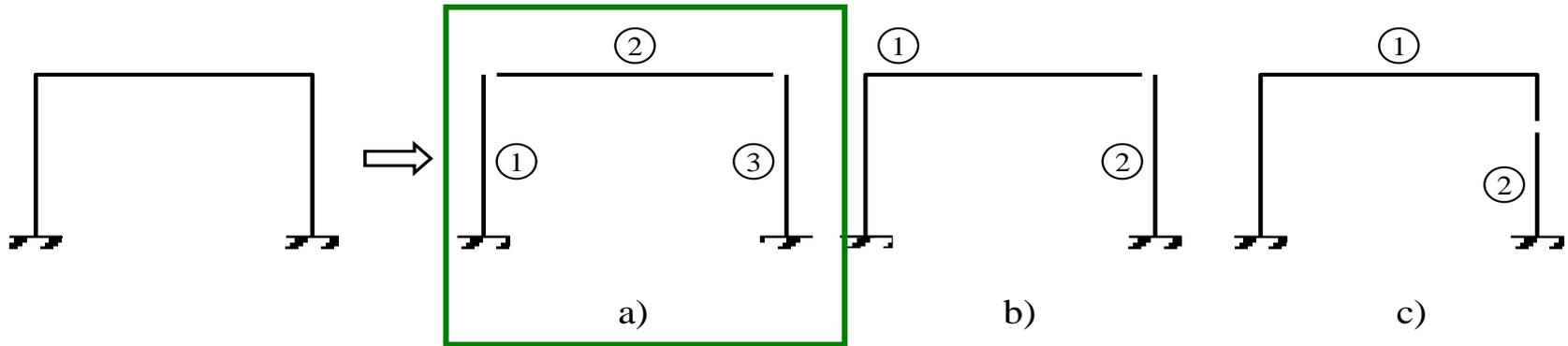


$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = [K_L^e] \cdot \{\delta\}$$

7. Necesidad de la matriz de rigidez global

Mediante un proceso de discretización, la estructura ha quedado compuesta por una serie de elementos cuya idea es absolutamente artificial, pues una misma estructura podríamos visualizarla como formada por diferentes conjuntos de elementos.



Ventaja de la discretización a): las matrices de rigidez de los tres elementos son iguales

De cualquier forma, la estructura discretizada en la forma (a) queda definida cuando se especifican:

- Las características de los materiales (módulos de elasticidad, Poisson, etc.)
- Las secciones de las barras (áreas, momentos de inercia)
- Las coordenadas de los nudos
- Las condiciones de apoyo

} **[K_L]
conocido**

7. Necesidad de la matriz de rigidez global

A nivel elemental tenemos la siguiente ecuación:

$$\{P\}^e = [K]_L^e \{ \delta \}^e$$

fuerzas del elemento
(DESCONOCIDO)

desplazamientos del elemento
(DESCONOCIDO)

matriz de rigidez del elemento en
coordenadas locales (CONOCIDO)

$\{P\}^e = \{P\}^e_{\text{EXTERNO}} + \{P\}^e_{\text{INTERNO}}$

Fuerzas transmitidas por los demás elementos al nudo
(DESCONOCIDO)

Fuerzas externas aplicadas directamente en el nudo
(CONOCIDO)

NO ES POSIBLE RESOLVER EL SISTEMA ELEMENTO A ELEMENTO

Las fuerzas internas se anulan entre sí al sumar las fuerzas de todos los elementos de la estructura.

Considerando la estructura en su conjunto:

$$\{P\}^e = \{P\}^e_{\text{EXTERNO}}$$

Por lo tanto:

$$\{P\}^e_{\text{EXTERNO}} = [K]_{\text{Estruc}} \{ \delta \}_{\text{Estruc}}$$

Fuerzas externas aplicadas directamente en el nudo y reacciones en los apoyos
CONOCIDO

Matriz de rigidez global de la estructura
(CONOCIDO)

Desplazamientos de los nudos (DESCONOCIDO)

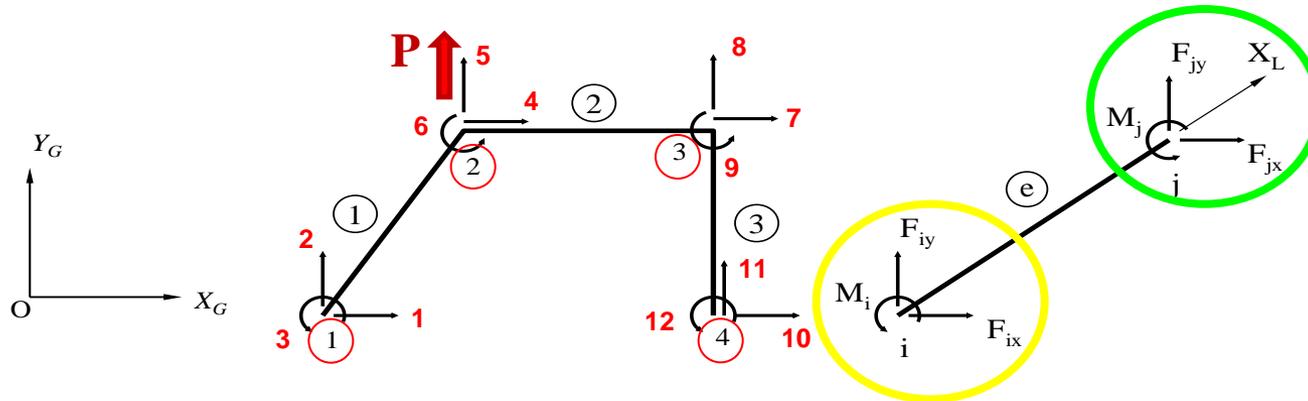
- Se pasa la matriz de cada elemento a coordenadas globales
- Se suman (ensamblan) las matrices de todos los elementos de la estructura

ES POSIBLE RESOLVER EL SISTEMA GLOBALMENTE

8. Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura

1. Punto de partida

$$\{F^e\} = [K_G^e] \cdot \{\Delta^e\} \quad e = 1, 2, \dots$$



$$\begin{Bmatrix} \{F_i^e\} \\ \{F_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ii}^e] & [K_{ij}^e] \\ [K_{ji}^e] & [K_{jj}^e] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta_i^e\} \\ \{\Delta_j^e\} \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$\{F_i^e\} = \begin{Bmatrix} F_{ix}^e \\ F_{iy}^e \\ M_i^e \end{Bmatrix}; \quad \{F_j^e\} = \begin{Bmatrix} F_{jx}^e \\ F_{jy}^e \\ M_j^e \end{Bmatrix}; \quad \{\Delta_i^e\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{ix}^e \\ \Delta_{iy}^e \\ \theta_i^e \end{Bmatrix}; \quad \{\Delta_j^e\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{jx}^e \\ \Delta_{jy}^e \\ \theta_j^e \end{Bmatrix}$$

Vector de desplazamientos del nudo i de la estructura

$$\{\Delta_i\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{ix} \\ \Delta_{iy} \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

Vector de fuerzas del nudo i de la estructura

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_i \end{Bmatrix}$$

2. Condiciones de compatibilidad de deformaciones

i = primer nudo de la barra

j =segundo nudo de la barra

Nudo 1 $\{\Delta_1\} = \{\Delta_i^{(1)}\} \longrightarrow$ Barra o elemento

Nudo 2 $\{\Delta_2\} = \{\Delta_j^1\} = \{\Delta_i^2\} \quad (\Delta_2^1 = \Delta_2^2 = \Delta_2)$

Nudo 3 $\{\Delta_3\} = \{\Delta_j^2\} = \{\Delta_i^3\} \quad (\Delta_3^2 = \Delta_3^3 = \Delta_3)$

Nudo 4 $\{\Delta_4\} = \{\Delta_j^3\}$

3. Ecuaciones de equilibrio de nudos

Nudo 1 $\{F_1\} = \{F_i^1\} = [K_{ii}^1] \cdot \{\Delta_i^1\} + [K_{ij}^1] \cdot \{\Delta_j^1\}$

A continuación se explica con mayor detalle la ecuación de equilibrio del nudo 2

Nudo 2 $\{F_2\} = \{F_j^1\} + \{F_i^2\} = [K_{ji}^1] \cdot \{\Delta_i^1\} + [K_{jj}^1] \cdot \{\Delta_j^1\} + [K_{ii}^2] \cdot \{\Delta_i^2\} + [K_{ij}^2] \cdot \{\Delta_j^2\}$



Nudo 3 $\{F_3\} = \{F_j^2\} + \{F_i^3\} = [K_{ji}^2] \cdot \{\Delta_i^2\} + [K_{jj}^2] \cdot \{\Delta_j^2\} + [K_{ii}^3] \cdot \{\Delta_i^3\} + [K_{ij}^3] \cdot \{\Delta_j^3\}$

Nudo 4 $\{F_4\} = \{F_j^3\} = [K_{ji}^3] \cdot \{\Delta_i^3\} + [K_{jj}^3] \cdot \{\Delta_j^3\}$

8. Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura

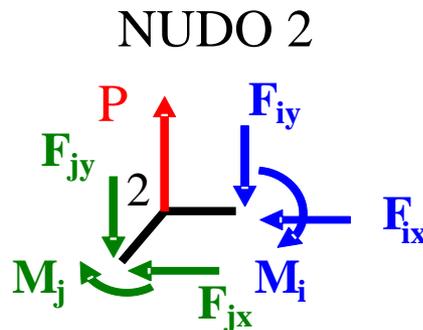
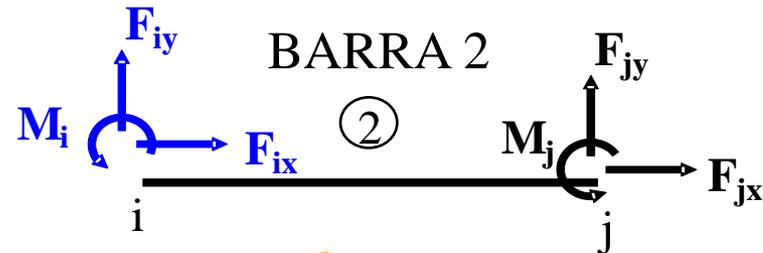
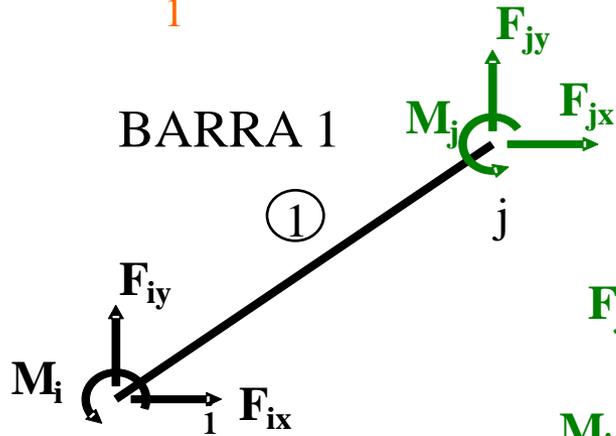
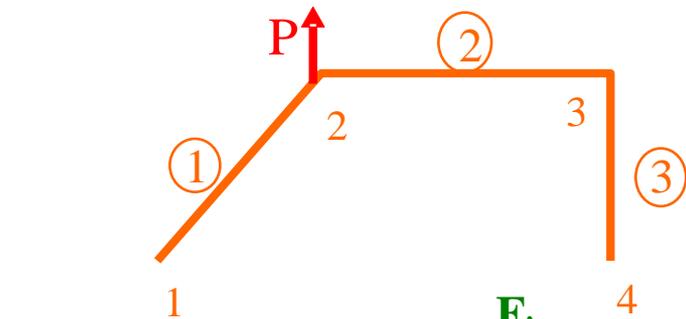
Fuerzas del nudo j de la barra 1

Fuerzas del nudo i de la barra 2

Fuerzas externas aplicadas en el nudo 2

$$\begin{Bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_i^e \\ \Delta_j^e \end{Bmatrix}$$

Nudo 2 \rightarrow $\{F_2\} = \{F_j^1\} + \{F_i^2\} = \underbrace{[K_{ji}^1] \cdot \{\Delta_i^1\} + [K_{jj}^1] \cdot \{\Delta_j^1\}}_{F_j^1} + \underbrace{[K_{ii}^2] \cdot \{\Delta_i^2\} + [K_{ij}^2] \cdot \{\Delta_j^2\}}_{F_i^2}$



EQUILIBRIO:

$$\begin{aligned} 0 - F_{ix} - F_{jx} &= 0 & \rightarrow & 0 = F_{ix} + F_{jx} \\ P - F_{iy} - F_{jy} &= 0 & \rightarrow & P = F_{iy} + F_{jy} \\ 0 - M_i - M_j &= 0 & \rightarrow & 0 = M_i + M_j \end{aligned}$$

$$\{F_2\} = \{F_i^2\} + \{F_j^1\}$$

4. Introduciendo las condiciones de compatibilidad en la ecuaciones de equilibrio

$$\{F_1\} = [K_{ii}^1] \cdot \{\Delta_1\} + [K_{ij}^1] \cdot \{\Delta_2\}$$

$$\{F_2\} = [K_{ji}^1] \cdot \{\Delta_1\} + [K_{jj}^1] \cdot \{\Delta_2\} + [K_{ii}^2] \cdot \{\Delta_2\} + [K_{ij}^2] \cdot \{\Delta_3\}$$

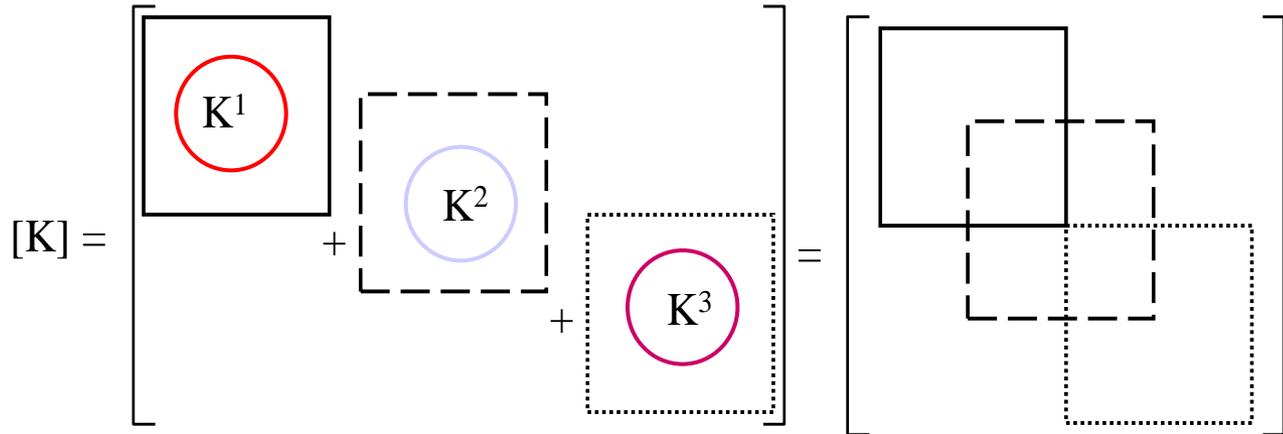
$$\{F_3\} = [K_{ji}^2] \cdot \{\Delta_2\} + [K_{jj}^2] \cdot \{\Delta_3\} + [K_{ii}^3] \cdot \{\Delta_3\} + [K_{ij}^3] \cdot \{\Delta_4\}$$

$$\{F_4\} = [K_{ji}^3] \cdot \{\Delta_3\} + [K_{jj}^3] \cdot \{\Delta_4\}$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \dots \\ \{F_2\} \\ \dots \\ \{F_3\} \\ \dots \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ii}^1] & \dots & [K_{ij}^1] & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{ji}^1] & \dots & [K_{jj}^1] + [K_{ii}^2] & \dots & [K_{ij}^2] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & [K_{ji}^2] & \dots & [K_{jj}^2] + [K_{ii}^3] & \dots & [K_{ij}^3] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & [K_{ji}^3] & \dots & [K_{jj}^3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \dots \\ \{\Delta_2\} \\ \dots \\ \{\Delta_3\} \\ \dots \\ \{\Delta_4\} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = [K] \cdot \{\Delta\}$$

$$[K] = \sum_e [K^e]$$



8.1. Características de la matriz de rigidez

Cuadrada: $[K]_{n \times n}$ n =grados de libertad

Simétrica: $[K] = [K]^T$

Dispersa: Tiene muchos términos nulos.

Esto se debe a que cada elemento solamente aporta rigidez a los grados de libertad de aquellos nudos a los que se une; por lo tanto, si un nudo p no está relacionado directamente con otro nudo q , en los términos de acople entre sus grados libertad no se añade ninguna rigidez.

Estructura de banda: Términos no nulos alrededor de la diagonal.

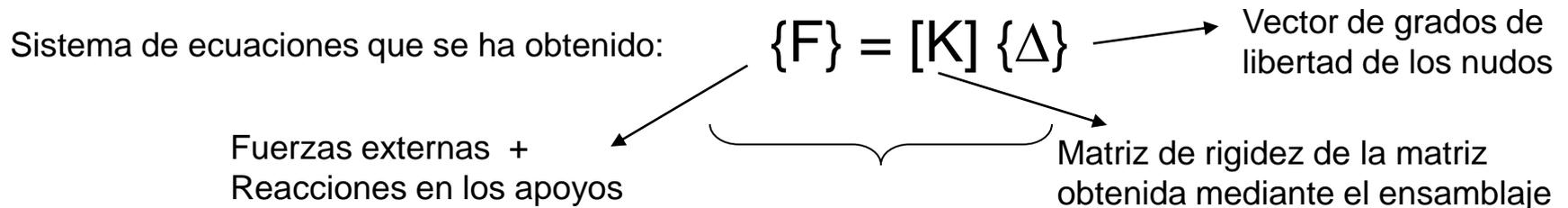
Si la numeración de los nudos es adecuada los términos no nulos de la matriz se agrupan alrededor de la diagonal.

Existen algoritmos que son capaces de renumerar la numeración inicial y obtener otra que genere un ancho de banda menor. Si no se dispone de un algoritmo de renumeración, es conveniente numerar los nudos de tal forma que cualquier barra conecte a dos nudos cuya numeración sea lo más próxima posible.

Definida positiva: La energía de deformación elástica y el trabajo realizado por las fuerzas externas es positivo.

$$\{\Delta\}^T \cdot [K] \cdot \{\Delta\} > 0 \quad \forall \{\Delta\} \neq 0 \rightarrow U = 1/2 \cdot \{\Delta\}^T \cdot [K] \cdot \{\Delta\} = 1/2 \{\Delta\}^T \{F\}$$

9. Condiciones de ligadura



Mediante la resolución del sistema hallamos $\{\Delta\}$ y luego las deformaciones y tensiones.

- $[K]$ es singular, $|K|=0$.

No es posible obtener su inversa y por tanto no es posible resolver el sistema tal y como se plantea.

Álgebra demuestra que para que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tenga solución única, es necesario y suficiente que las n ecuaciones sean linealmente independientes.

- En este caso, las fuerzas F_i deben satisfacer las condiciones de equilibrio estático. En 2D 3 ecuaciones. Por lo que las ecuaciones planteadas no son linealmente independientes.
- El significado físico de este hecho es muy claro: se ha establecido el sistema de ecuaciones sin tener en cuenta para nada las **condiciones de ligadura** de la estructura, condiciones que impiden los posibles movimientos de sólido rígido del sistema completo.
- La resolución del sistema de ecuaciones exige la previa introducción de las condiciones de ligadura o condiciones de contorno, cuyo número mínimo ha de ser tal que se elimine toda posibilidad de movimiento de la estructura como un sólido rígido. (2D=3)

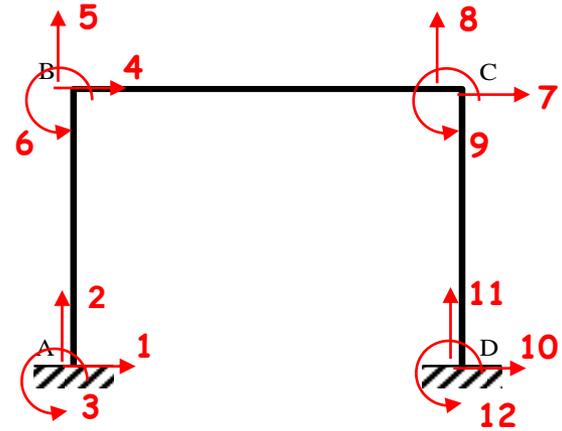
9.1. Ligaduras de desplazamiento nulo

1. Definiciones

$$\{\Delta\} = \begin{cases} \{\Delta_L\} \rightarrow \text{Grados de libertad libres y desconocidos} \\ \{\Delta_F\} \rightarrow \text{Grados de libertad fijos y conocidos } \{\Delta_F\} = \{0\} \end{cases}$$

$$\{F\} = \begin{cases} \{F_L\} \rightarrow \text{Fuerzas aplicadas en los grados de libertad libres y conocidas} \\ \{F_F\} \rightarrow \text{Fuerzas en los grados de libertad fijos. REACCIONES.} \end{cases}$$

En general no nulas y desconocidas.



2. Ecuación de equilibrio (con la reordenación de la matriz de rigidez)

$$\begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LF}] \\ [K_{FL}] & [K_{FF}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta_L\} \\ \{\Delta_F = 0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_F\} \end{Bmatrix}$$

conocido desconocido

↑ ↑

3. Obtención de los desplazamientos libres

$$[K_{LL}] \cdot \{\Delta_L\} = \{F_L\} \quad \exists [K_{LL}]^{-1}$$

4. Obtención de las reacciones en los apoyos

$$\{F_F\} = [K_{FL}] \cdot \{\Delta_L\} = [K_{FL}] \cdot [K_{LL}]^{-1} \cdot \{F_L\}$$

9. Condiciones de ligadura

Ejemplo. Una estructura de 6 grados de libertad en la que $\Delta_2=\Delta_5=0$ son conocidos y las fuerzas correspondientes F_2 y F_5 desconocidas.

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 = 0 \\ \Delta_6 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Reordenamiento de la matriz de rigidez

$$\begin{array}{c}
 \left\{ F_L \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_6 \\ \dots \\ F_2 \\ F_5 \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{6} \\ \dots \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} & K_{14} & K_{16} & \vdots & K_{12} & K_{15} \\ K_{31} & K_{33} & K_{34} & K_{36} & \vdots & K_{32} & K_{35} \\ K_{41} & K_{43} & K_{44} & K_{46} & \vdots & K_{42} & K_{45} \\ K_{61} & K_{63} & K_{64} & K_{66} & \vdots & K_{62} & K_{65} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ K_{21} & K_{23} & K_{24} & K_{26} & \vdots & K_{22} & K_{25} \\ K_{51} & K_{53} & K_{54} & K_{56} & \vdots & K_{52} & K_{55} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_6 \\ \dots \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_5 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \Delta_L \right\} \\
 \left\{ F_F \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_2 \\ F_5 \end{array} \right\} \left\{ \Delta_F = 0 \right\}
 \end{array}$$

$[K_{LL}]$ $[K_{LF}]$
 $[K_{FL}]$ $[K_{FF}]$

9.2. Ligaduras de desplazamiento conocido

1. Definiciones

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta_L\} \\ \{\Delta_F\} \\ \{\Delta_C\} \end{Bmatrix}$$

2. Ecuación de equilibrio (con la reordenación de la matriz de rigidez)

$$\begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LF}] & [K_{LC}] \\ [K_{FL}] & [K_{FF}] & [K_{FC}] \\ [K_{CL}] & [K_{CF}] & [K_{CC}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta_L\} \\ \{\Delta_F\} \\ \{\Delta_C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_F\} \\ \{F_C\} \end{Bmatrix}$$

3. Eliminación de las ecuaciones correspondientes a los grados de libertad fijos

$$\begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LC}] \\ [K_{CL}] & [K_{CC}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta_L\} \\ \{\Delta_C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_C\} \end{Bmatrix}$$

4. Obtención de los desplazamientos libres

$$[K_{LL}] \cdot \{\Delta_L\} = \{F_L\} - [K_{LC}] \cdot \{\Delta_C\}$$

5. Obtención de las reacciones en los apoyos

$$\{F_C\} = [K_{CL}] \cdot \{\Delta_L\} + [K_{CC}] \cdot \{\Delta_C\}$$

$$\{F_F\} = [K_{FL}] \cdot \{\Delta_L\} + [K_{FC}] \cdot \{\Delta_C\}$$

9. Condiciones de ligadura

Forma práctica de introducir las condiciones de ligadura

Ejemplo. Un sistema de 3 grados de libertad en el que: $\Delta_3 = \Delta_{C3}$

Ecuaciones de equilibrio:
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} ; \quad \sum_j K_{ij} \cdot \Delta_j = F_i \quad (i=1,2,3)$$

3. ecuación:
$$F_3 = K_{31} \cdot \Delta_1 + K_{32} \cdot \Delta_2 + K_{33} \cdot \Delta_3 \quad \left(F_3 = \sum_{j=1,2} K_{3j} \cdot \Delta_j + K_{33} \cdot \Delta_3 \right)$$

Procedimiento: a) Multiplicar por un número muy grande $M=10^{10}$ (rigidez ficticia) el término de la diagonal correspondiente al 3º grado de libertad (k_{33})

b) Sustituir F_3 por $K_{33} \cdot \Delta_{3C} \cdot M$

c) Se resuelve el sistema de ecuaciones resultando que $\Delta_3 \sim \Delta_{c3}$

Resulta:
$$\sum_{j=1,2} K_{3j} \cdot \Delta_j + K_{33} \cdot M \cdot \Delta_3 = K_{33} \cdot M \cdot \Delta_{C3} \quad \Delta_3 = \Delta_{C3} - \frac{\sum_{j=1,2} K_{3j} \cdot \Delta_j}{M \cdot K_{33}} \approx \Delta_{C3}$$

9.3. Apoyos elásticos

Otra forma de apoyo de una estructura consiste en que un determinado punto no tiene sus desplazamientos impuestos, como en los casos anteriores, ni tampoco es totalmente libre de moverse, sino que está unido a la sustentación a través de uno o más muelles, de constantes conocidas.

En realidad estos apoyos no deben considerarse condiciones de ligadura de la estructura en sentido estricto, pues los muelles del apoyo son unos elementos estructurales más, y como tales deben analizarse.

Por lo tanto, los pasos para tratar un apoyo elástico son:

- Identificar los grados de libertad del nudo donde está el apoyo elástico
- Calcular la matriz de rigidez del muelle de apoyo
- Ensamblar dicha matriz en la matriz de la estructura

Este tipo de apoyos no debe confundirse con las condiciones de contorno de desplazamiento impuesto. En estas últimas, los desplazamientos del nudo son de magnitud conocida, y no están controlados por las cargas actuantes sobre la estructura, mientras que en los apoyos elásticos la deformación del apoyo está controlada por las fuerzas actuantes y por la rigidez de la estructura, entre la que se incluye la del propio apoyo elástico como una rigidez más.

10. Vector de cargas

10.1. Fuerzas exteriores sobre los nudos

Las fuerzas exteriores aplicadas sobre los nudos pasan directamente al vector de fuerzas nodales $\{F\}$. Cada fuerza aplicada en un nudo se añade directamente al término F_i correspondiente al grado de libertad Δ_i sobre el que actúa.

10.2. Fuerzas exteriores sobre los elementos

Estas fuerzas que no están aplicadas en los nudos se sustituirán por unas “**fuerzas nodales equivalentes**”.

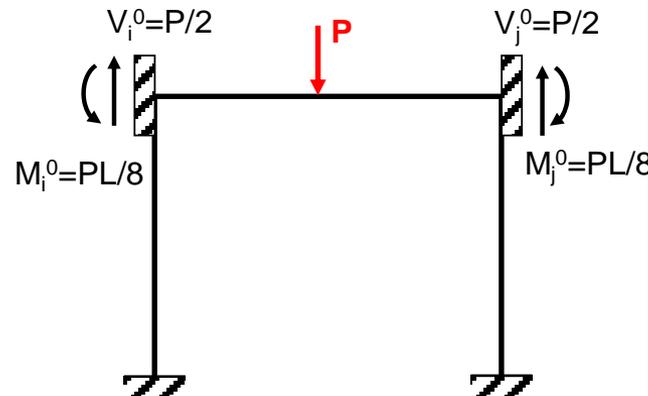
Fase 0

Se empotran los nudos de la estructura.

Sólo trabaja la viga horizontal.

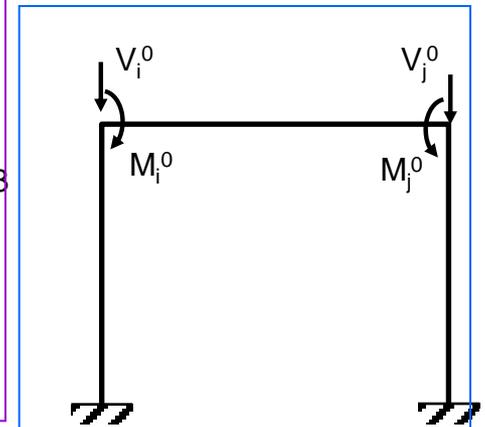
$$\{\Delta\} = 0$$

Se calculan las fuerzas de empotramiento perfecto $\{F_0\}$.

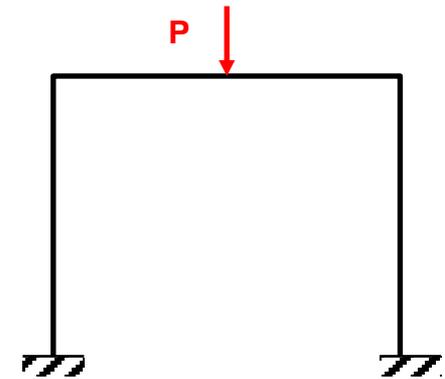


En la fase 1, a las fuerzas exteriores aplicadas directamente en los nudos se le restan las fuerzas de empotramiento perfecto de la fase 0.

Fase 1

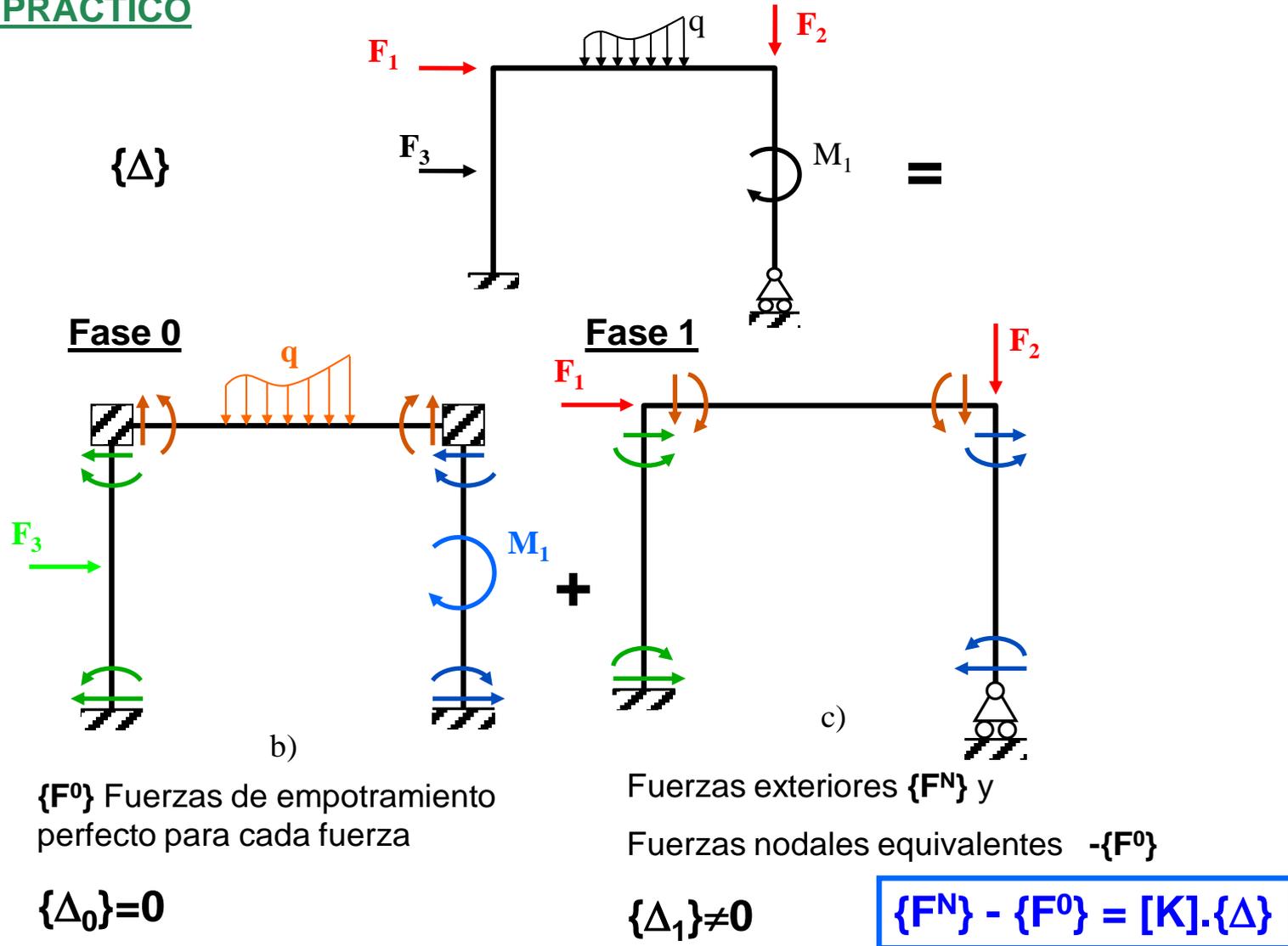


$$\{\Delta\} \neq 0$$



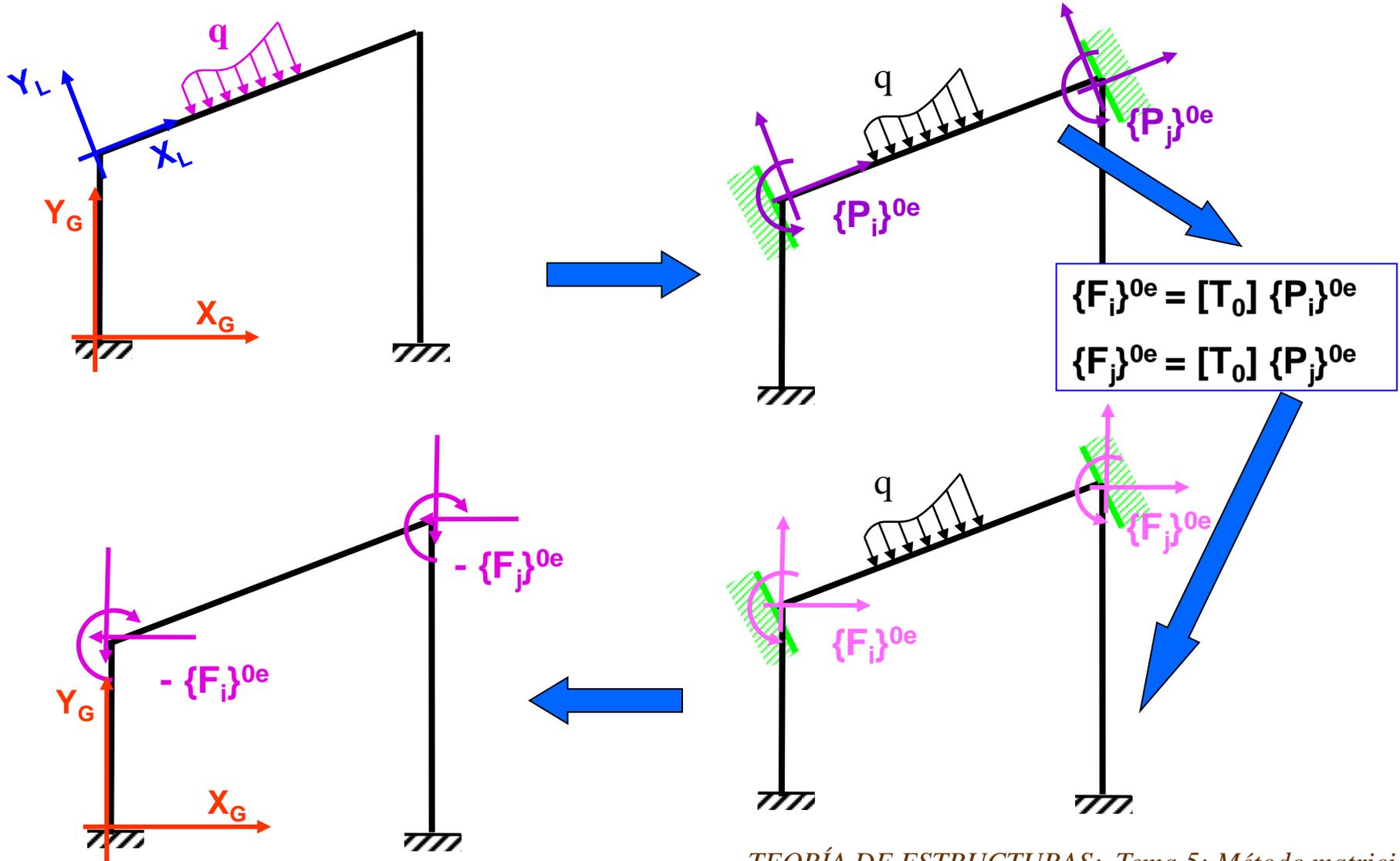
10. Vector de cargas

CASO PRÁCTICO



10. Vector de cargas

CASO MAS GENERAL



10.3. Cargas térmicas

Es preciso calcular la fuerzas nodales equivalentes debidas a la variación de temperatura.

Fuerzas de la fase 0

$$\{P_T^{0e}\} = [K_L^e] \cdot (-\{\delta_T^e\}) = - [K_L^e] \cdot \{\delta_T^e\}$$

Matriz de rigidez del elemento en el sistema local

Deformaciones en el elemento en el caso de dilatación libre

Este vector se ensambla con el signo cambiado con las demás fuerzas nodales equivalentes $\{F_N\}$. Su tratamiento es como el de las fuerzas de la fase 0.

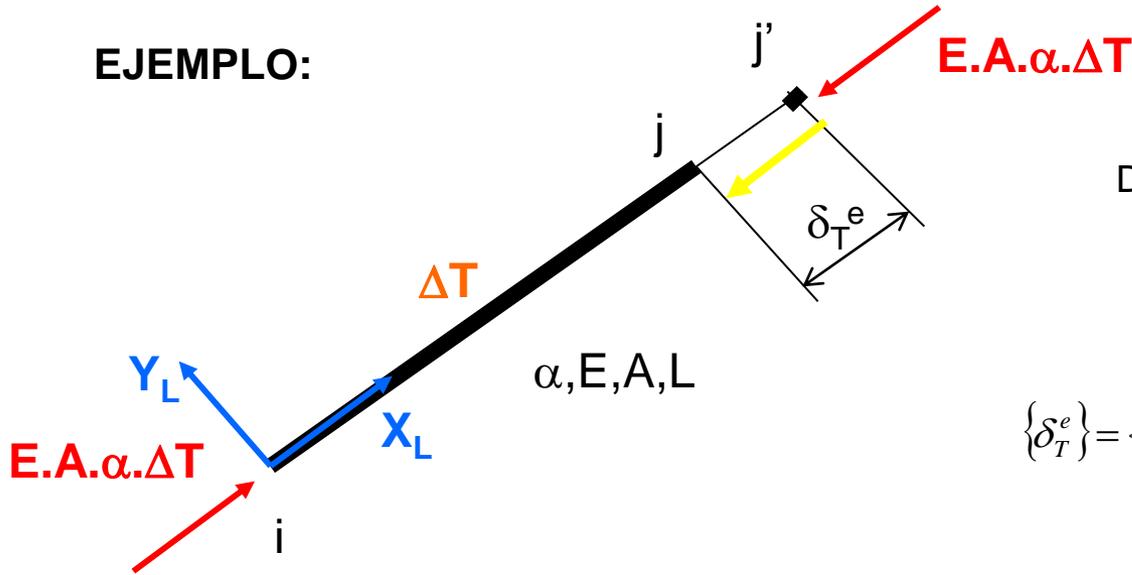
$$\{F^N\} - \{F^0\} = [K] \cdot \{\Delta\}$$

Debido a fuerzas aplicadas en medio de la barra
o por variación de temperatura de la barra



10. Vector de cargas

EJEMPLO:



Dilatación libre: $\delta_T^e = \alpha.\Delta T.L$

$$\{\delta_T^e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha.\Delta T.L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

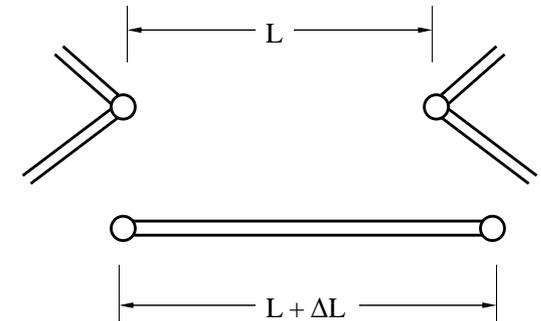
Cualquier otra distribución del alargamiento sería válida

$$\{\mathbf{P}_T^{0e}\} = -[\mathbf{K}_L^e] \cdot \{\delta_T^e\} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha.\Delta T.L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -\frac{EA}{L} \alpha.\Delta T.L \\ 0 \\ 0 \\ \frac{EA}{L} \alpha.\Delta T.L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E.A.\alpha.\Delta T.L \\ 0 \\ 0 \\ -E.A.\alpha.\Delta T.L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

10.4. Errores en la forma de los elementos

Supongamos un elemento estructural cuya forma o tamaño natural no coincide con la forma o tamaño del espacio en el que se va a montar en la estructura. Si este elemento se monta en su lugar previsto, forzándolo a adaptarse al espacio de montaje, se producen esfuerzos y deformaciones en la estructura, ya que el elemento trata de volver a su situación natural, arrastrando a la estructura.

Al estar los errores de forma localizados en los elementos de la estructura, su efecto se trata igual que todas las demás acciones actuantes sobre ellos: *se deben determinar las fuerzas de la fase de empotramiento perfecto producidas por los errores de forma.*



Fuerzas de la fase 0

$$\{P_E^{0e}\} = -[K_L^e] \cdot \{\delta_E^e\} \quad / \quad \{\delta_E^e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En resumen:

$$\{F^N\} - \{F^0\} = [K] \cdot \{\Delta\}$$

Debido a:

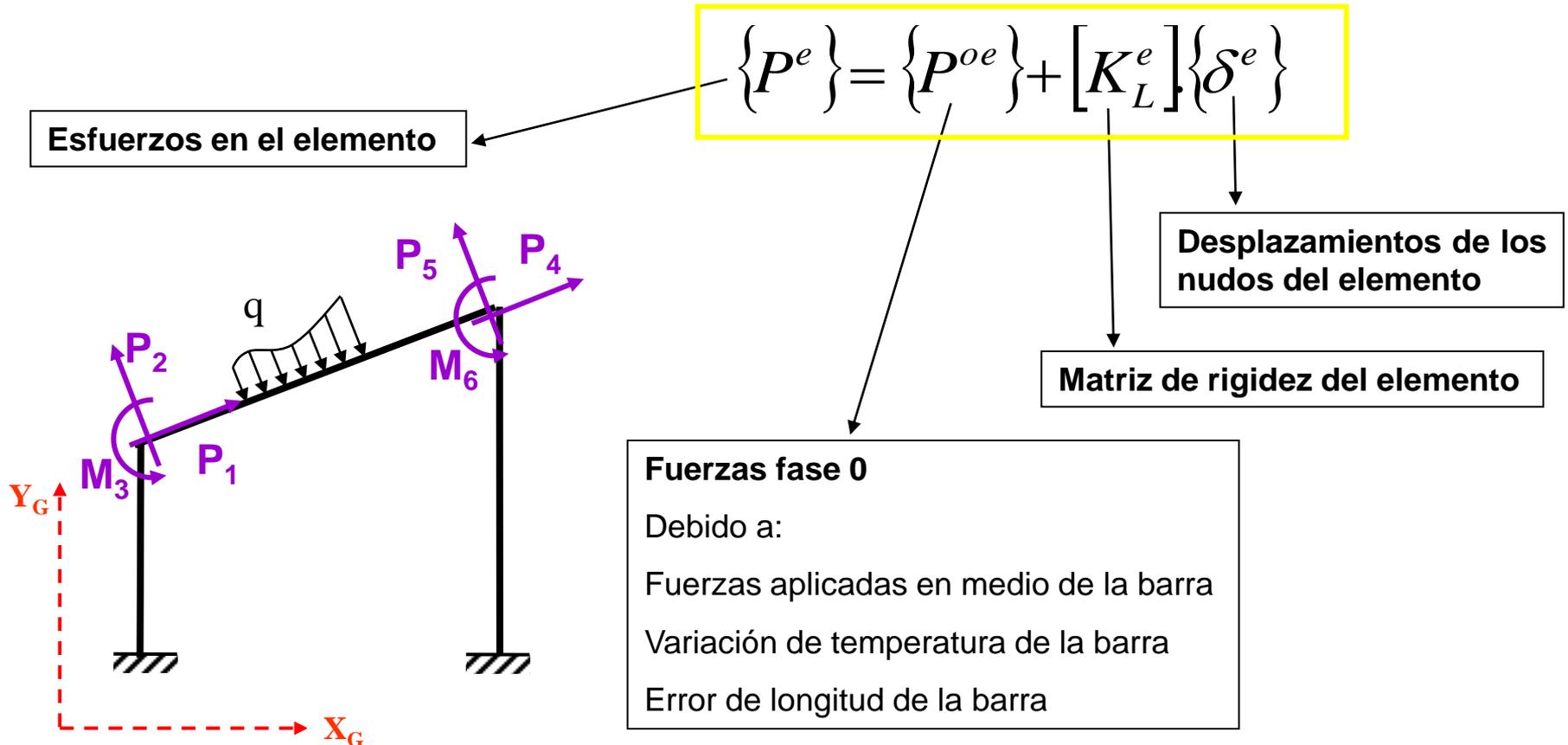
Fuerzas aplicadas en medio de la barra

Variación de temperatura de la barra

Error de longitud de la barra

11. Esfuerzos en los elementos

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones en coordenadas globales se obtienen los desplazamientos de cada nudo y las reacciones en los apoyos. Entonces es posible obtener los esfuerzos en cada elemento en el sistema de coordenadas locales, ya que se conocen los desplazamientos de sus nudos, su matriz de rigidez y, en caso de existir, sus fuerzas de la fase 0.



TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 5: *INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS MATRICIALES DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU

