TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 4: *CÁLCULO DE ESTRUCTURAS POR EL MÉTODO DE LA DEFORMACIÓN ANGULAR*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

1. Introducción

- En el análisis de una estructura se han de tener en cuenta las siguientes condiciones:
  - Equilibrio
  - Compatibilidad de deformaciones
  - Leyes de comportamiento

- En la resolución de una estructura hiperestática se han de tener en cuenta las tres condiciones simultáneamente.

- En función del orden de utilización de tales condiciones y de las incógnitas elegidas, se tienen los métodos de Flexibilidad o Rigidez.

- **Pasos a seguir** en el método de la deformación angular:

  - Establecer las incógnitas del problema: los desplazamientos (traslaciones y giros) de los nudos de la estructura.
  - Aplicar las condiciones de compatibilidad:

    p.e.: Los giros de los extremos que se unen en un nudo rígido son iguales .
  - Ley de comportamiento: Relación entre los esfuerzos y los desplazamientos en los extremos de las barras.
  - Ecuaciones de equilibrio: Introduciendo las relaciones anteriores se obtiene un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los desplazamientos.

2. Definiciones y notación

2.1. Nudos y grados de libertad

<u>NUDO RIGIDO</u>

El ángulo entre las barras que forman el nudo permanece constante tras la deformación.

El nudo gira debido a la deformación de la estructura.

<u>NUDO ARTICULADO</u>

El ángulo entre las barras que forman el nudo no permanece constante tras la deformación.

El giro entre las barras está permitido.

El nudo no gira debido a la deformación de la estructura.

<u>GRADOS DE LIBERTAD</u>

Cuando una estructura esta sometida a unas cargas exteriores se deforma y sus nudos sufren unos desplazamientos debidos a esa deformación.

Estos desplazamientos son los grados de libertad y su identificación es muy importante ya que son las incógnitas del problema.

2. Definiciones y notación

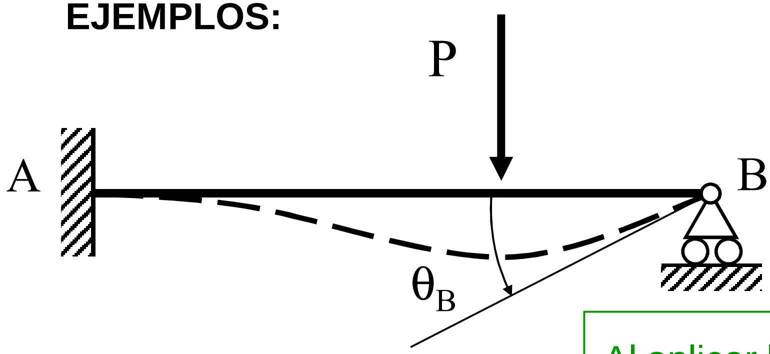
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD EN ESTRUCTURAS DE NUDOS RIGIDOS:

Estructuras 3D: (3 traslaciones+3 rotaciones) / por cada nudo

Estructuras 2D: (2 traslaciones+1 rotación) / por cada nudo

Estos desplazamientos pueden estar limitados por las condiciones de enlace o las hipótesis realizadas en cuanto al comportamiento de la estructura (considerar únicamente el efecto de la flexión hace que no existan desplazamientos en la dirección de la barra).

EJEMPLOS:



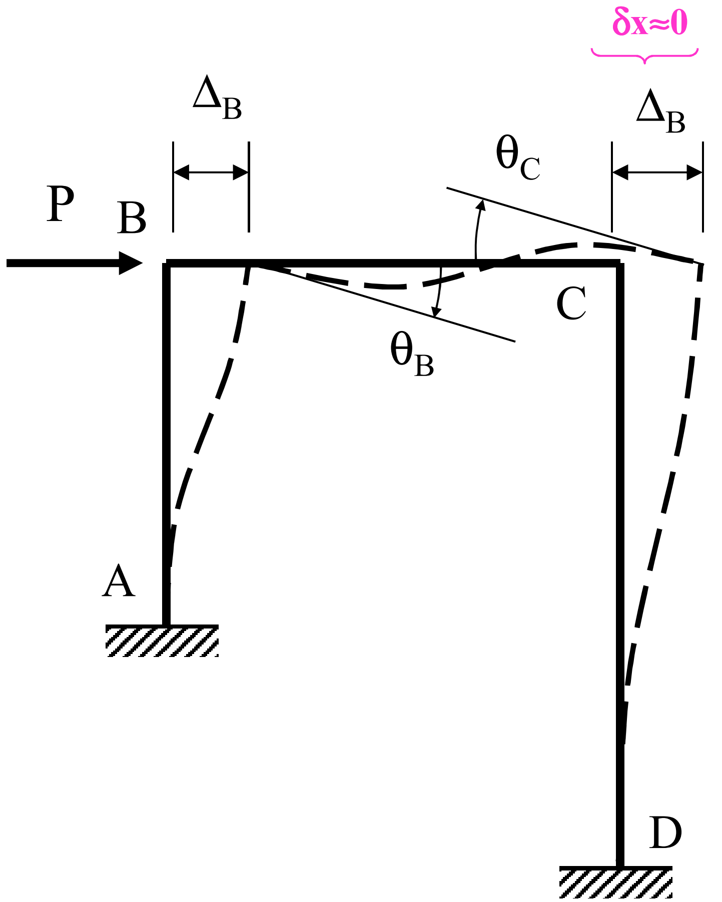
Estructura con 1 gdl , θ_B

Al aplicar la carga P el único grado de libertad que aparece es θ_B .

Como A es un empotramiento no puede desplazarse en vertical ni girar.

B es un apoyo simple por lo que no puede desplazarse en vertical.

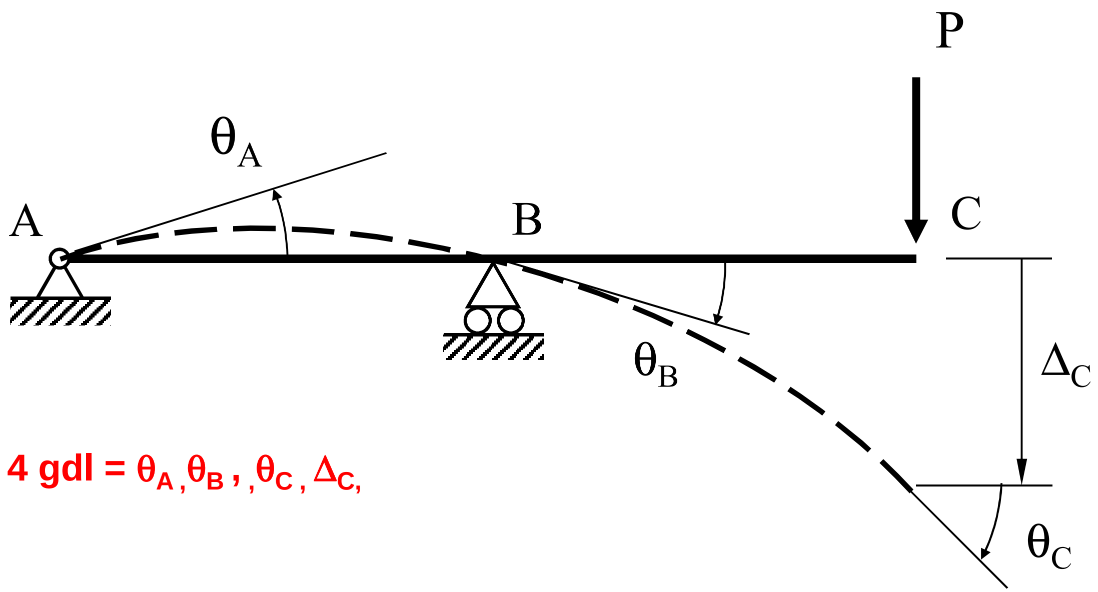
2. Definiciones y notación



Si se desprecia el efecto del esfuerzo axial en la deformación de las barras, los nudos B y C, debido a la carga P, experimentarán un desplazamiento horizontal del mismo valor $\Delta_B = \Delta_C$

Simultáneamente los nudos B y C experimentarán giros θ_B , θ_C

Por lo tanto: 3 gdl = Δ_B, θ_B , θ_C



Por lo tanto: 4 gdl = θ_A , θ_B , , θ_C , Δ_C,

2. Definiciones y notación

- El primer paso será especificar cuales son los grados de libertad no impedidos de la estructura

- Estos serán las incógnitas del problema.

- Número de incógnitas = “grado de indeterminación cinemática”

- “Cinematicamente determinado” = si el grado de indeterminación cinemático es 0

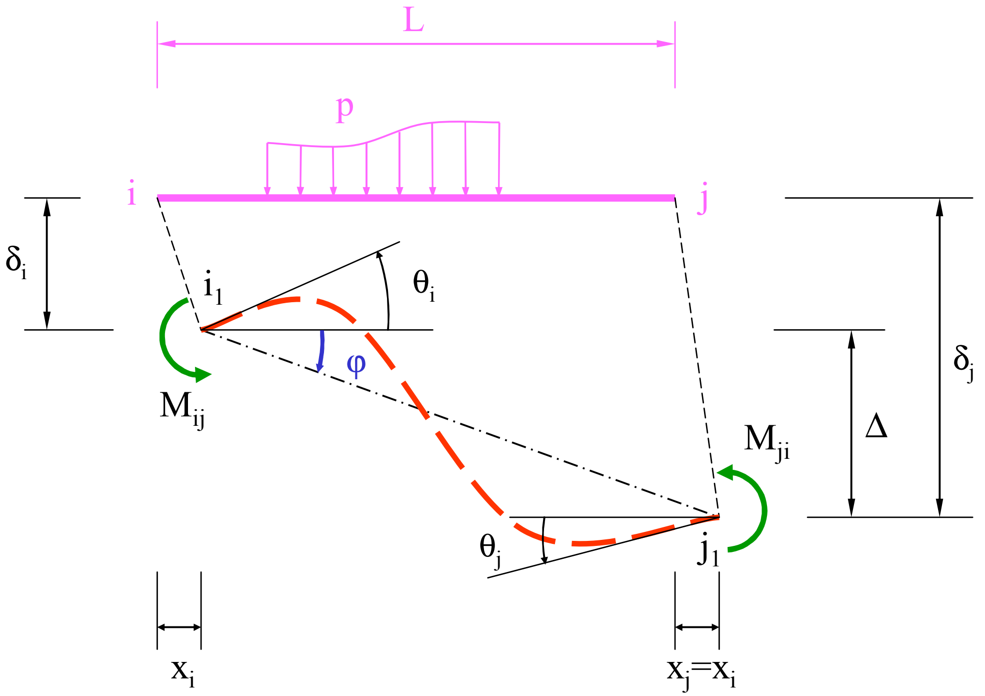
- Para la aplicación de este método únicamente se considerarán las deformaciones debidas a flexión, la influencia en la deformación de los esfuerzo axial y cortante se despreciará.

- Se puede aplicar el principio de Superposición.

- **Ecuación fundamental** del método:

$$\left\{\text{Momento en uno de los extremos de la barra}\right\} = \left\{\text{Momento generado por las fuerzas exteriores en el extremo cuando los desplazamientos de ambos extremos están impedidos.}\right\} + \left\{\text{Momento generado por los desplazamientos reales en el extremo .}\right\}$$

2.2. Convenio de signos



a) Momentos en los extremos.

Positivos en contra de las agujas del reloj.

b) **θ = Giro de la tangente a la elástica** en un extremo respecto a la posición inicial de la barra.

Positivo en contra de las agujas del reloj.

c) **$\Delta=\delta_j-\delta_i$ = Traslación relativa de los extremos ¨'ij' en dirección perpendicular a la dirección inicial de la barra**

d) La traslación relativa de los extremos ¨'ij' en la dirección axial de la barra es nula.

Es decir, $x_j-x_i = 0$, $x_j=x_i$.

Se supone que la longitud de la barra no varía y que las deformaciones debidas a la flexión son pequeñas.

e) $\varphi \rightarrow$ **Giro de la cuerda** (segmento i_1j_1)

Positivo a favor de las agujas del reloj.

$\varphi=\Delta/L$

2. Definiciones y notación

2.3. Definiciones adicionales

f) Para expresar los momentos en los extremos se utilizarán dos subíndices

$\mathbf{M_{ij}}$ = momento en el extremo i de la barra ij

$\mathbf{M_{ji}}$ = momento en el extremo j de la barra ij

g) Para expresar los giros en los extremos se utilizarán dos subíndices

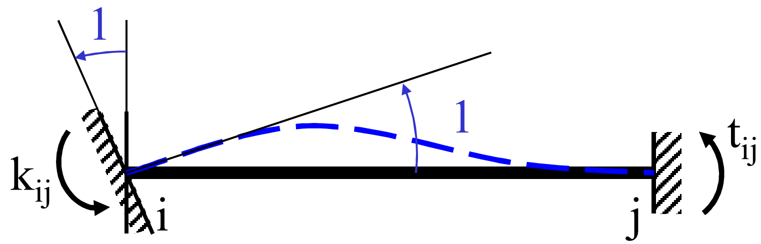
θ_i = giro del nudo i

θ_j = giro del nudo j

h) $\varphi_{ij} = \Delta/L$, el giro de la cuerda con dos subíndices

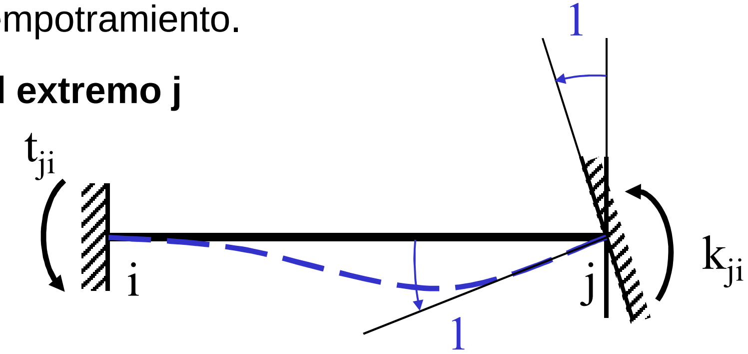
i) **K_{ij} = rigidez a la rotación del extremo i**

Momento originado en i correspondiente a un valor unidad de la rotación en i cuando el desplazamiento en j está impedido, es decir, en j hay un empotramiento.



j) **K_{ji}= rigidez a la rotación del extremo j**

Desplazamiento en i está impedido (en i hay un empotramiento)



Momento originado en j correspondiente a un valor unidad de la rotación en j

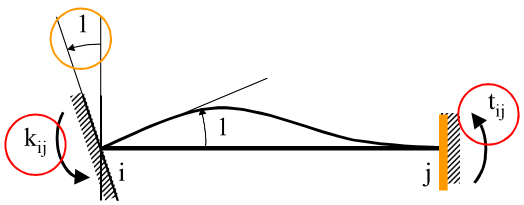
2. Definiciones y notación

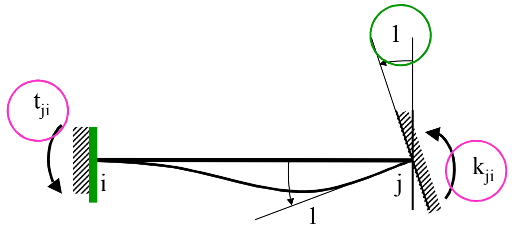
k) **t_{ij} Momento de transmisión**

Momento producido en el extremo empotrado j por una rotación unidad del extremo i.

t_{ji} momento producido en el extremo fijo i originado por una rotación unidad del extremo j.

Mediante el teorema de reciprocidad se demuestra que: **$t_{ij} = t_{ji} = t$**





$$K_{ij} \bullet 0 + t_{ij} \bullet 1 = t_{ji} \bullet 1 + K_{ji} \bullet 0$$

l) **β_{ij} = Coeficiente de transmisión de i a j**

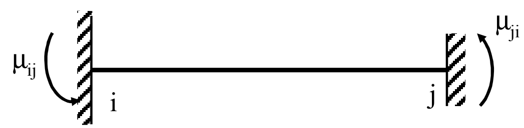
$$\beta_{ij} = \frac{t_{ij}}{K_{ij}} = \frac{t}{K_{ij}} \quad \Rightarrow \quad t = \beta_{ij} \cdot K_{ij}$$

m) **β_{ji} = Coeficiente de transmisión de j a i**

$$\beta_{ji} = \frac{t_{ji}}{K_{ji}} = \frac{t}{K_{ji}}$$

n) **Momentos de empotramiento perfecto (μ_{ij} μ_{ji})**

Momentos producidos en los nudos como consecuencia de la acción de las cargas exteriores cuando los desplazamientos en dichos nudos (giros y traslaciones) están totalmente impedidos.



Signo +

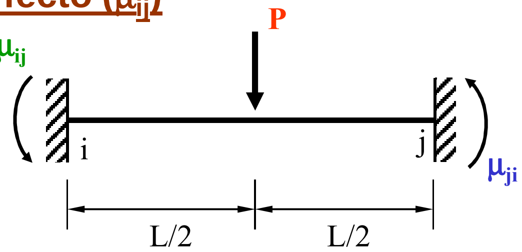
En contra de las agujas del reloj

2. Definiciones y notación

2.4. Evaluación de coeficientes

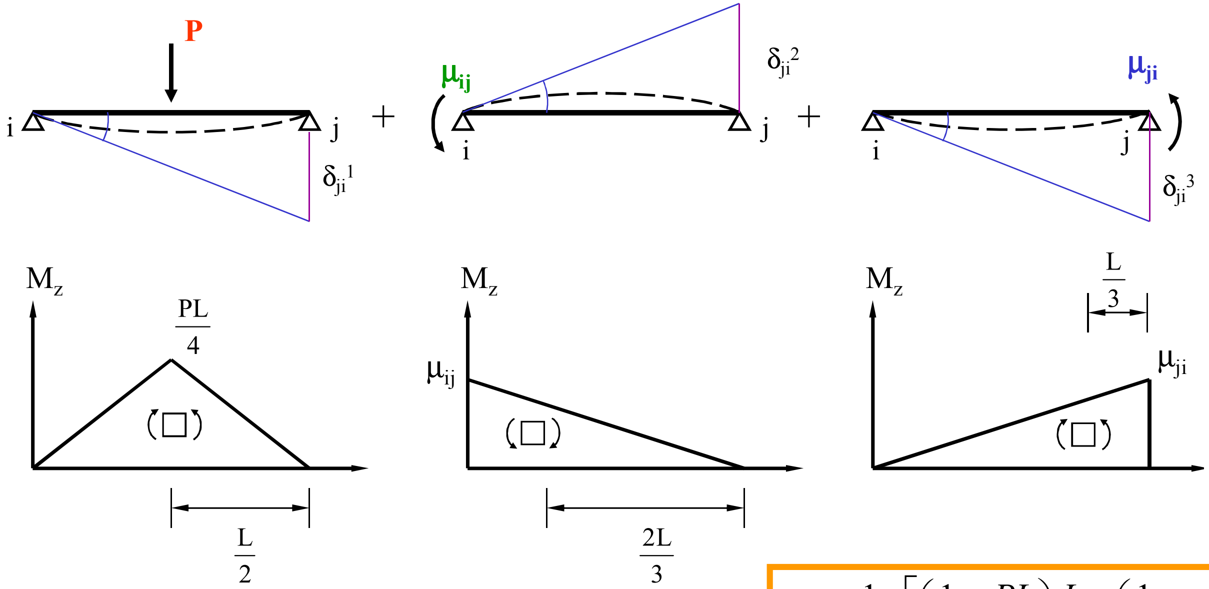
Momentos de empotramiento perfecto (μ_{ij})

Extremo i



Superposición y
+ $\theta_i=0$
+ $\theta_j=0$

Se supone EI= CTE



$$\theta_i = \boxed{\theta_i^{(P)}} - \boxed{\theta_i^{(\mu_{ij})}} + \boxed{\theta_i^{(\mu_{ji})}} = \frac{\delta_{ji}^1 - \delta_{ji}^2 + \delta_{ji}^3}{L}$$

$$\theta_i = \frac{1}{EIL}\left[\left(\frac{1}{2}L\frac{PL}{4}\right)\frac{L}{2} - \left(\frac{1}{2}L\mu_{ij}\right)\frac{2L}{3} + \left(\frac{1}{2}L\mu_{ji}\right)\frac{L}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^2}{16} - \frac{\mu_{ij}L}{3} + \frac{\mu_{ji}L}{6}\right] = 0 \qquad (a)$$

2. Definiciones y notación

$$\theta_i = \frac{1}{EIL}\left[\left(\frac{1}{2}L\frac{PL}{4}\right)\frac{L}{2}-\left(\frac{1}{2}L\mu_{ij}\right)\frac{2L}{3}+\left(\frac{1}{2}L\mu_{ji}\right)\frac{L}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{EI}\left[\frac{PL^2}{16}-\frac{\mu_{ij}L}{3}+\frac{\mu_{ji}L}{6}\right]=0 \qquad (a)$$

Haciendo lo mismo para el nudo j :

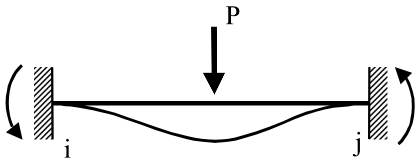
$$\theta_j = \frac{1}{EIL}\left[\left(\frac{1}{2}L\frac{PL}{4}\right)\frac{L}{2}-\left(\frac{1}{2}L\mu_{ij}\right)\frac{L}{3}+\left(\frac{1}{2}L\mu_{ji}\right)\frac{2L}{3}\right]=$$

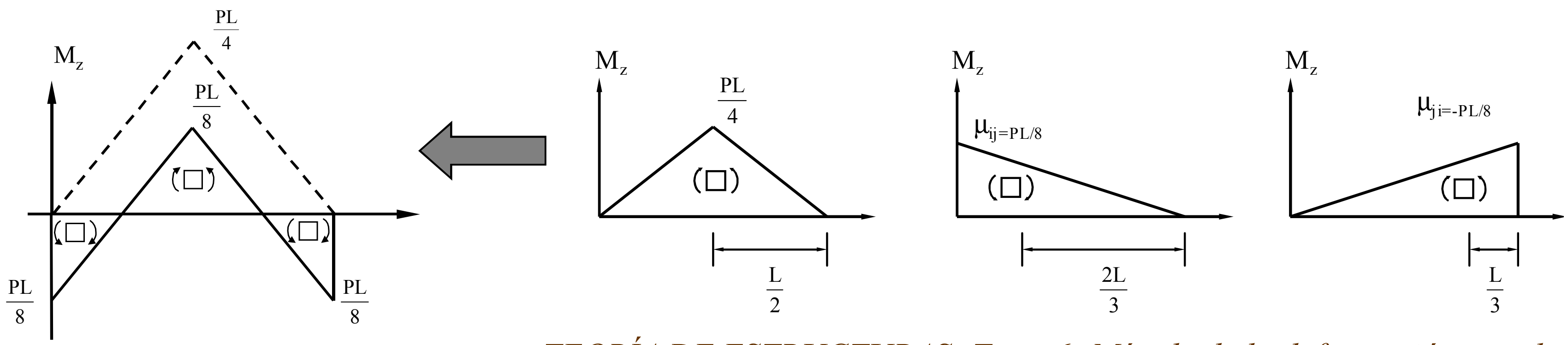
$$=\frac{1}{EI}\left[\frac{PL^2}{16}-\frac{\mu_{ij}L}{6}+\frac{\mu_{ji}L}{3}\right]=0 \qquad (b)$$

$$\boxed{\mu_{ij} = -\mu_{ji} = \frac{PL}{8}}$$

Estos coeficientes suelen ser un dato que se recoge en tablas.

DIAGRAMA DE MOMENTOS = Aplicando superposición con los valores obtenidos





2. Definiciones y notación

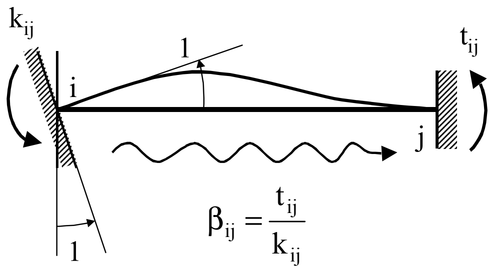
Rigideces a rotación (K_{ij}) y momentos de transmisión (t_{ij})

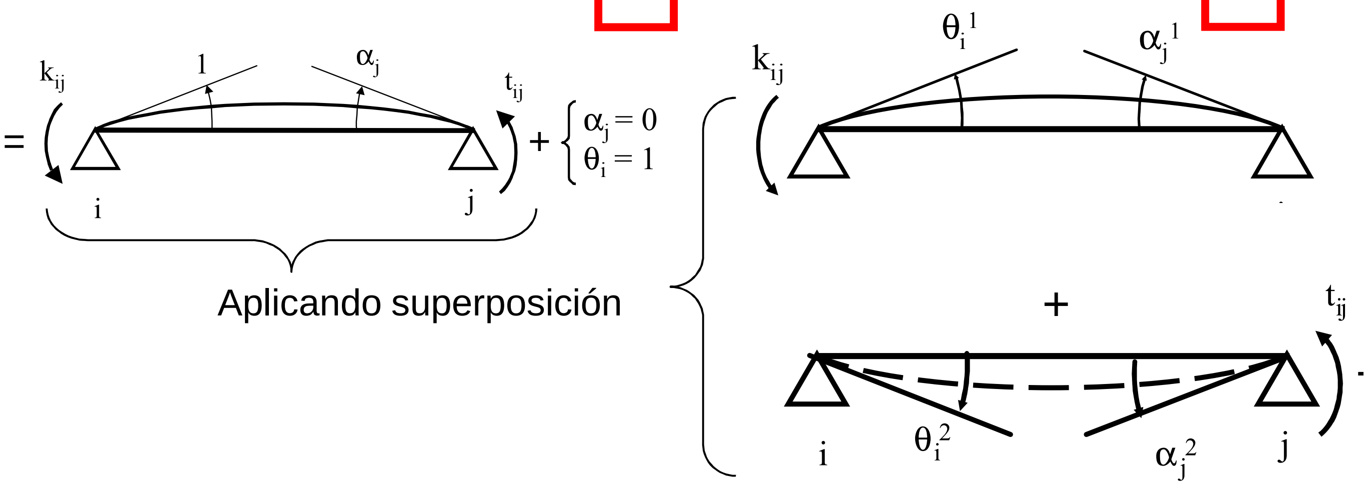
Teniendo en cuenta las siguientes suposiciones de deformación y utilizando los conocimientos de Resistencia de Materiales:

	Giro	Momento	Giro	Momento
Nudo i	$\theta_i=1$	K_{ij}	$\theta_i=0$	t_{ji}
Nudo j	$\theta_j=0$	t_{ij}	$\theta_j=1$	K_{ji}

1 | 1 | 2

1





$$\alpha_j = \frac{K_{ij}L}{6EI} - \frac{t_{ij}L}{3EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{ij} = \frac{K_{ij}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\theta_i = 1 = \frac{K_{ij}L}{3EI} - \frac{t_{ij}L}{6EI} = \frac{K_{ij}L}{3EI} - \frac{K_{ij}L}{12EI} = \frac{K_{ij}L}{4EI} \quad \Rightarrow$$

$$t_{ij} = \frac{2EI}{L} \longrightarrow \beta_{ij} = \frac{t_{ij}}{K_{ij}} = \frac{1}{2}$$

$$K_{ij} = \frac{4EI}{L}$$

De manera similar se resuelve el caso

2

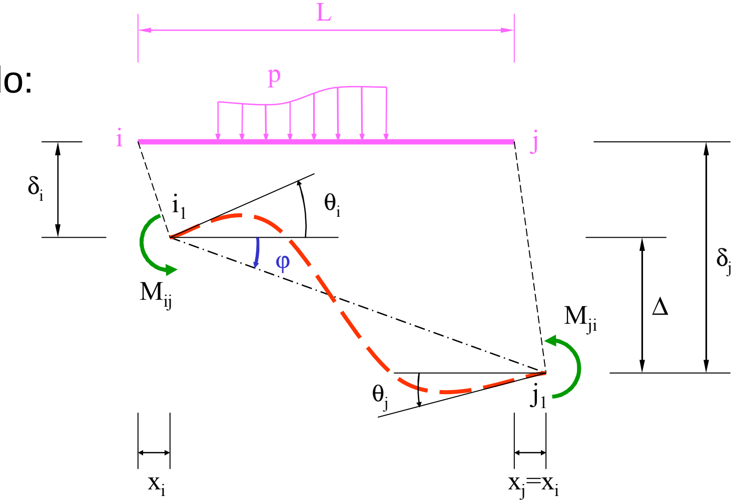
$$K_{ij} = K_{ji} = K = \frac{4EI}{L}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} = \beta = \frac{t}{K} = \frac{1}{2}$$

3. Método de la deformación angular

Se va a obtener la **ecuación fundamental del método**.

Recordando:



i_1j_1 elástica de una barra.

Una parte del desplazamiento es el movimiento de sólido rígido de la cuerda desde la posición ij a la posición i_1j_1

Aplicando el principio de superposición el momento del extremo i M_{ij} se puede expresar de la siguiente manera:

$M_{ij} = \mu_{ij}$ + momento debido al giro $(\theta_i+\varphi)$ (suponiendo j fijo) + momento debido al giro $(\theta_j+\varphi)$ (suponiendo i fijo)

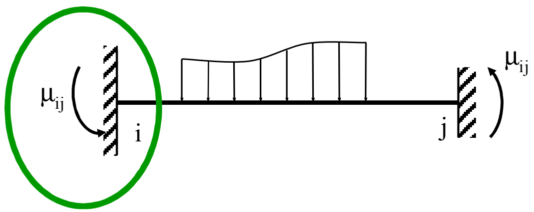
μ_{ij}: Momento que generan las cargas exteriores cuando los extremos ij están empotrados

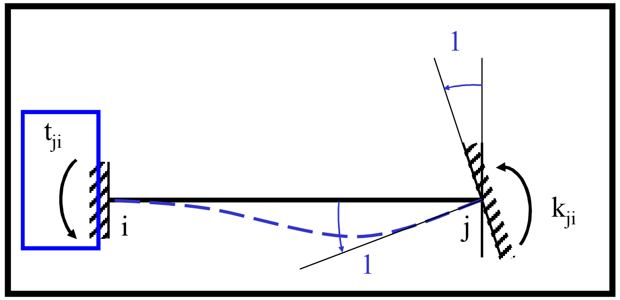
Es decir :

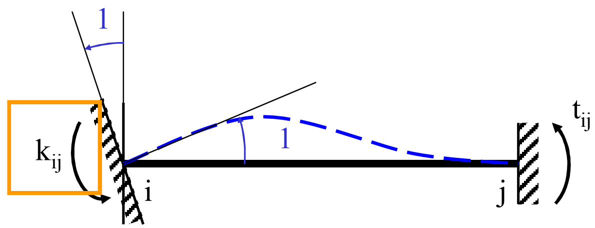
$$M_{ij} = \mu_{ij} + K_{ij} \cdot (\theta_i + \varphi) + t_{ji} \cdot (\theta_j + \varphi)$$

3. Método de la deformación angular

$$M_{ij} = \mu_{ij} + \boxed{K_{ij}} \cdot \left(\theta_i + \varphi\right) + \boxed{t_{ji}} \cdot \left(\theta_j + \varphi\right)$$







Cuando el giro es 1 $\rightarrow$ K_{ij}

Cuando el giro es x $\rightarrow$ $x.K_{ij}$

3. Método de la deformación angular

Operando con la expresión anterior:

$$M_{ij} = \mu_{ij} + K_{ij} \cdot (\theta_i + \varphi) + t_{ji} \cdot (\theta_j + \varphi)$$

$\varphi = \Delta / L$

$t_{ij} = t_{ji} = \beta_{ij}\, K_{ij}$

$$\begin{cases} M_{ij} = \mu_{ij} + K_{ij} \cdot \theta_i + t_{ji} \cdot \theta_j + \varphi \cdot (K_{ij} + t_{ji}) = \\ \qquad = \mu_{ij} + K_{ij} \cdot \theta_i + \beta_{ij} \cdot K_{ij} \cdot \theta_j + \dfrac{\Delta}{L} \cdot K_{ij} \cdot (1 + \beta_{ij}) \quad \Rightarrow \\ M_{ij} = \mu_{ij} + K_{ij} \cdot \left[\theta_i + \beta_{ij} \cdot \theta_j + (1 + \beta_{ij}) \cdot \dfrac{\Delta}{L} \right] \end{cases}$$

Para el nudo j:

$$\begin{cases} M_{ji} = \mu_{ji} + K_{ji} \cdot \theta_j + t_{ij} \cdot \theta_i + \varphi \cdot (K_{ji} + t_{ij}) = \\ \qquad = \mu_{ji} + K_{ji} \cdot \theta_j + \beta_{ji} \cdot K_{ji} \cdot \theta_i + \dfrac{\Delta}{L} \cdot K_{ji} \cdot (1 + \beta_{ji}) \quad \Rightarrow \\ M_{ji} = \mu_{ji} + K_{ji} \cdot \left[\theta_j + \beta_{ji} \cdot \theta_i + (1 + \beta_{ji}) \cdot \dfrac{\Delta}{L} \right] \end{cases}$$

Para piezas de EI constante

$$K_{ij} = K_{ji} = K = \frac{4EI}{L}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} = \beta = \frac{t}{K} = \frac{1}{2}$$

Finalmente:

ij giros y momentos +

φ +

$$M_{ij} = \mu_{ij} + \frac{4EI}{L} \left[\theta_i + \frac{1}{2}\theta_j + \frac{3}{2}\frac{\Delta}{L} \right]$$

$$M_{ji} = \mu_{ji} + \frac{4EI}{L} \left[\theta_j + \frac{1}{2}\theta_i + \frac{3}{2}\frac{\Delta}{L} \right]$$

4. Desplazabilidad de las estructuras

En este método las incógnitas son los grados de libertad de la estructura.

Los grados de libertad pueden ser:

- θ giros en los nudos libres
- Δ en cada barra

Desplazamiento relativo entre los nudos en dirección perpendicular a la dirección inicial de la barra.

Resulta sencillo identificar los nudos que pueden girar.

No es tan sencillo identificar las barras con $\Delta \neq \mathbf{0}$.

Las barras con desplazamientos independientes en sus nudos tendrán $\Delta \neq \mathbf{0}$.

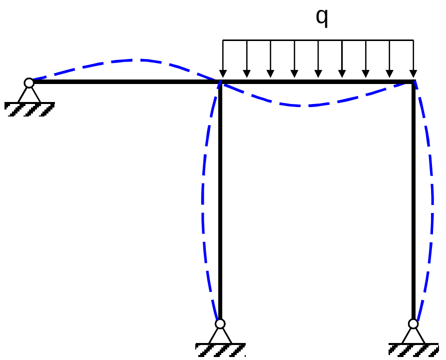
<u>Estructura traslacional:</u>

Estructuras con $\Delta \neq \mathbf{0}$

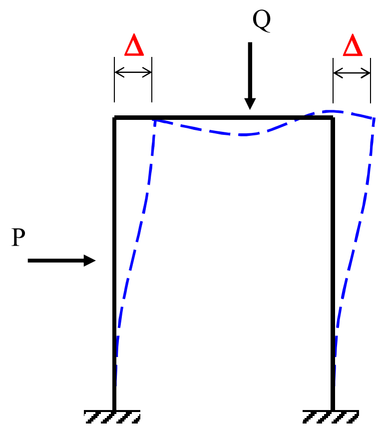
<u>Estructura intraslacional:</u>

Estructuras sin $\Delta \neq \mathbf{0}$

Intraslacional



Traslacional



4. Desplazabilidad de las estructuras

Para una estructura se define

m = " grado de desplazabilidad " (o "grado de traslacionalidad")

Número de traslaciones independientes de los nudos.

Es decir, número de desplazamientos Δ independientes.

Número de nudos

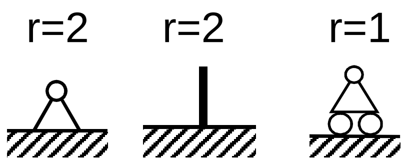
Número de barras

Número de desplazamientos impedidos por los apoyos

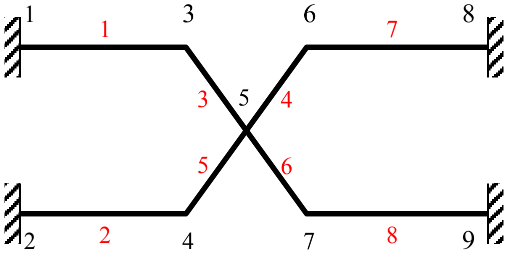
$$\boxed{m = 2n - b - r}$$

Por cada nudo hay dos desplazamientos

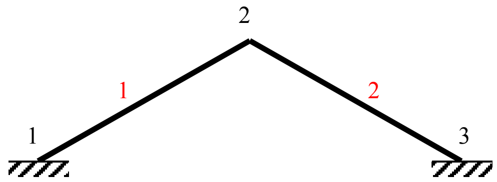
Cada barra que conecta dos nudos impide el desplazamiento relativo de dichos nudos en la dirección axial ($\varepsilon_x \rightarrow 0$)



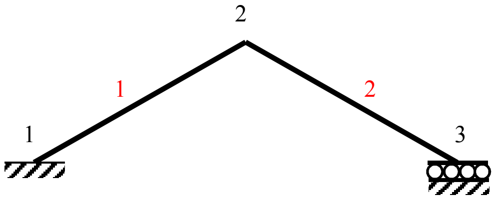
4. Desplazabilidad de las estructuras

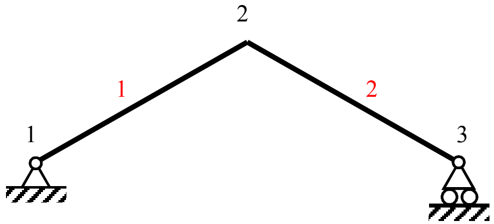


m = 2n-b-r = 2.9-8-8 = 18-16 = 2



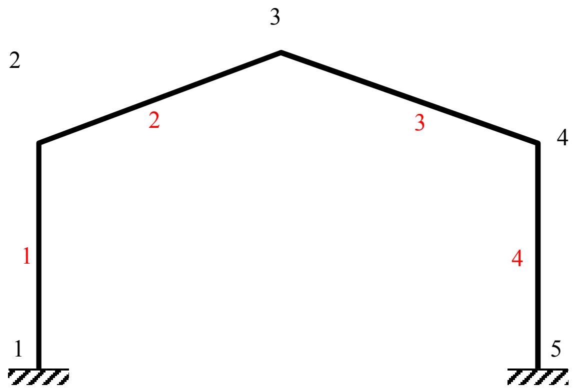
m = 2n-b-r = 2.3-2-4 = 0





m = 2n-b-r = 2.3-2-3 = 1

m = 2n-b-r = 2.5-4-4 = 2



5. Aplicación del método

Número de incógnitas:

$\boxed{n \quad + \quad m}$ ← Desplazamientos independientes Δ

Un giro por cada nudo θ_i

Número de ecuaciones: $\boxed{2b \; + \; n \; + \; m}$

M_{ij} , M_{ji} por cada barra

Pasos:

1) Hallar "m", número de desplazamientos independientes Δ

2) Elegir los desplazamientos Δ independientes y poner los desplazamientos Δ de las demás barras en función de estos $\Delta_{ij}=f(\Delta_{indep})$

3) Escribir las **2b** ecuaciones

$$M_{ij} = \mu_{ij} + \frac{4EI}{L}\left[\theta_i + \frac{1}{2}\theta_j + \frac{3}{2}\frac{\Delta_{ij}}{L}\right]$$

$$M_{ji} = \mu_{ji} + \frac{4EI}{L}\left[\theta_j + \frac{1}{2}\theta_i + \frac{3}{2}\frac{\Delta_{ij}}{L}\right]$$

Estarán en función de los desplazamientos Δ independientes

4) Escribir las **n** ecuaciones

Equilibrio en los nudos $\sum \mathrm{M}_{\mathrm{int}} + \sum \mathrm{M}_{\mathrm{ext}} = 0$ o Condiciones de enlace

5) Plantear **m** ecuaciones de equilibrio

Se realizan m cortes en la estructura y se aplica en cada uno condiciones de equilibrio.

El objetivo es obtener unas ecuaciones en las que aparezcan M_{ij}, M_{ji} y las cargas exteriores.

5. Aplicación del método

2) Elegir los desplazamientos Δ independientes y poner los desplazamientos Δ de las demás barras en función de estos $\Delta_{ij}=f(\Delta_{indep})$

PROCEDIMIENTO GENERAL

-Se eligen m nudos de la estructura y se coloca en cada uno de ellos un apoyo deslizante eliminando el grado de desplazabilidad correspondiente.

Se pueden plantear diferentes opciones

- PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: Para hallar la relación $\Delta_{ij}=f(\Delta_{indep})$

Se calculan los desplazamientos transversales $\Delta_{ij}^{\ 1}$, $\Delta_{ij}^{\ 2}$, $\Delta_{ij}^{\ 3}$… al eliminar cada uno de los apoyos deslizante manteniendo los demás.

Finalmente

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \Delta_{ij}^{k} = \Delta_{ij}^{1} + \Delta_{ij}^{2} + \Delta_{ij}^{3} + \ldots$$

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 4: *CÁLCULO DE ESTRUCTURAS POR EL MÉTODO DE LA DEFORMACIÓN ANGULAR*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea