
TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 3: *LÍNEAS DE INFLUENCIA EN ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

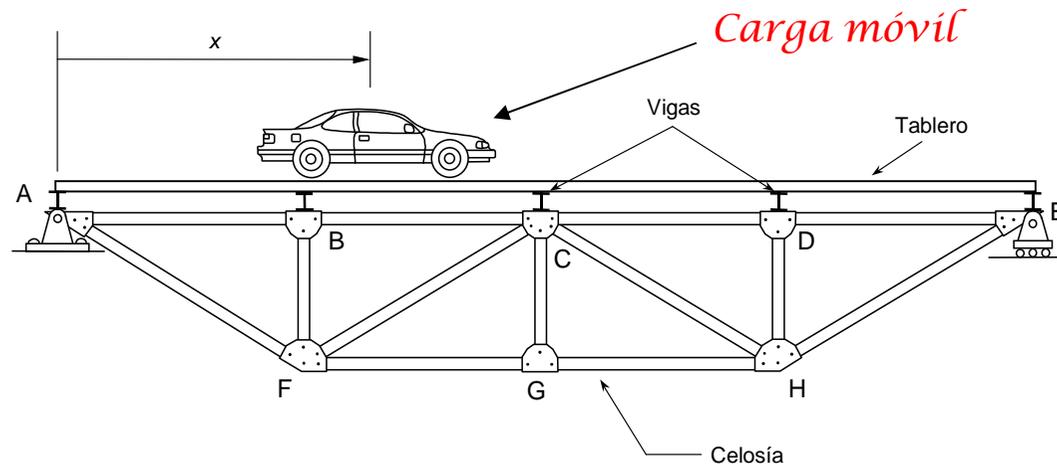
UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU





1. Concepto de línea de influencia

En algunos casos las cargas no son fijas sino móviles a lo largo de la estructura, como es el caso de un puente recorrido por un vehículo, o una viga carril sobre la que se desplaza un puente grúa, o la pluma de una grúa de construcción a lo largo de la cual se desplaza el carro que sustenta la carga: en estos casos varía el punto de aplicación de la carga (carga móvil), y por tanto, los esfuerzos y deformaciones que se originan en la estructura, ya que estos valores dependen de la posición que ocupa la carga.



El valor máximo de la respuesta de la estructura, sea valorada en esfuerzos (y por tanto tensiones), y/o deformaciones, se producirá para una posición particular y determinada de la carga, que por lo general será desconocida y que se deberá determinar.

Para cada una de las barras de la celosía de la figura, la posición del coche para la cual el esfuerzo en esa barra alcanza el valor máximo puede ser diferente. Se debe calcular la posición más desfavorable de la carga para cada esfuerzo y/o deformación que se esté analizando.



1. Concepto de línea de influencia

Supuestos básicos empleados en el estudio de las líneas de influencia:

- 1) Bajo la acción de las cargas, la estructura mantiene un comportamiento **elástico lineal** y experimenta **pequeñas deformaciones**, siendo aplicable, por consiguiente, el principio de superposición.
- 2) Se considerará una única **fuerza móvil de módulo unidad**. Es un supuesto que se introduce para facilitar el estudio inicial, pero que se puede generalizar sin dificultad a otro tipo de cargas.
- 3) Se prescinde del posible **efecto dinámico** en cargas móviles (principalmente de posibles vibraciones).

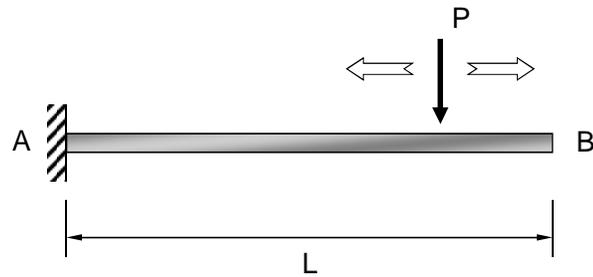
Definición de Línea de Influencia:

“Se define la línea de influencia de una reacción, un determinado esfuerzo o una determinada deformación, como la función que proporciona dicha reacción, esfuerzo o deformación, para las distintas posiciones de la carga móvil a lo largo de la estructura, y para un valor unitario de dicha carga”.

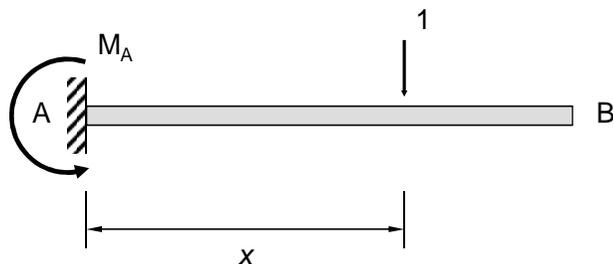
Es decir, una línea de influencia es una curva cuya ordenada en un punto cualquiera proporciona el valor de la respuesta que queremos calcular, debido a una carga unidad en ese punto.



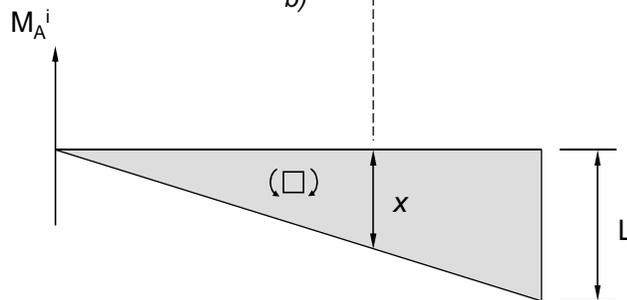
1. Concepto de línea de influencia



a)



b)



c)

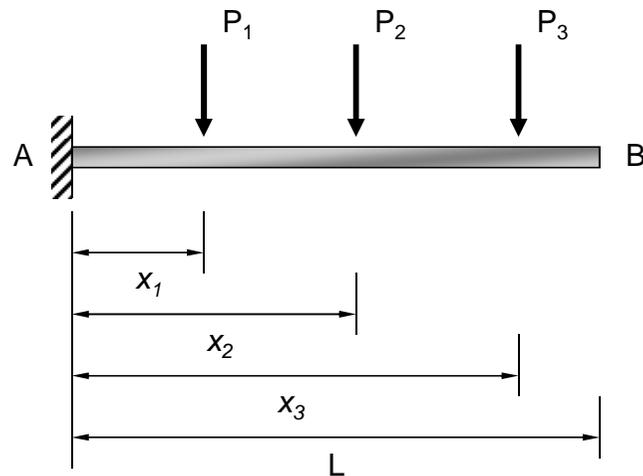
En la figura se ilustra esta definición aplicándolo a la determinación de la línea de influencia del momento flector del empotramiento A de la viga de la figura. La figura b) muestra el parámetro x utilizado para definir la posición de la carga unitaria móvil, y en la figura c) se representa la línea de influencia de dicha reacción, definida como M_A^i , cuya expresión analítica se obtiene aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A^i = 1 \cdot x = x \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

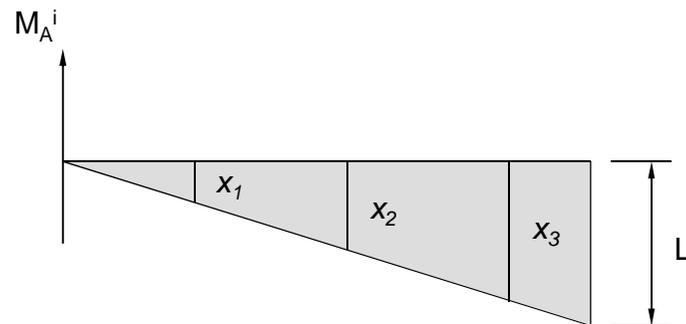
La línea de influencia buscada tiene un valor único, y no debe confundirse esa representación gráfica del momento de empotramiento en A con el diagrama de momentos flectores de la viga: son cosas diferentes.



1. Concepto de línea de influencia



a)



b)

En virtud del Principio de Superposición, si $M_A^i = x$ es el valor del momento en A debido a la acción de una carga unidad en la posición x , el valor de este momento debido a una carga P situada en la misma posición será: $M_A = P x$, y su valor debido a la acción simultánea de tres cargas P_1 , P_2 y P_3 aplicadas a distancias x_1 , x_2 y x_3 , respectivamente de A (ver figura), será:

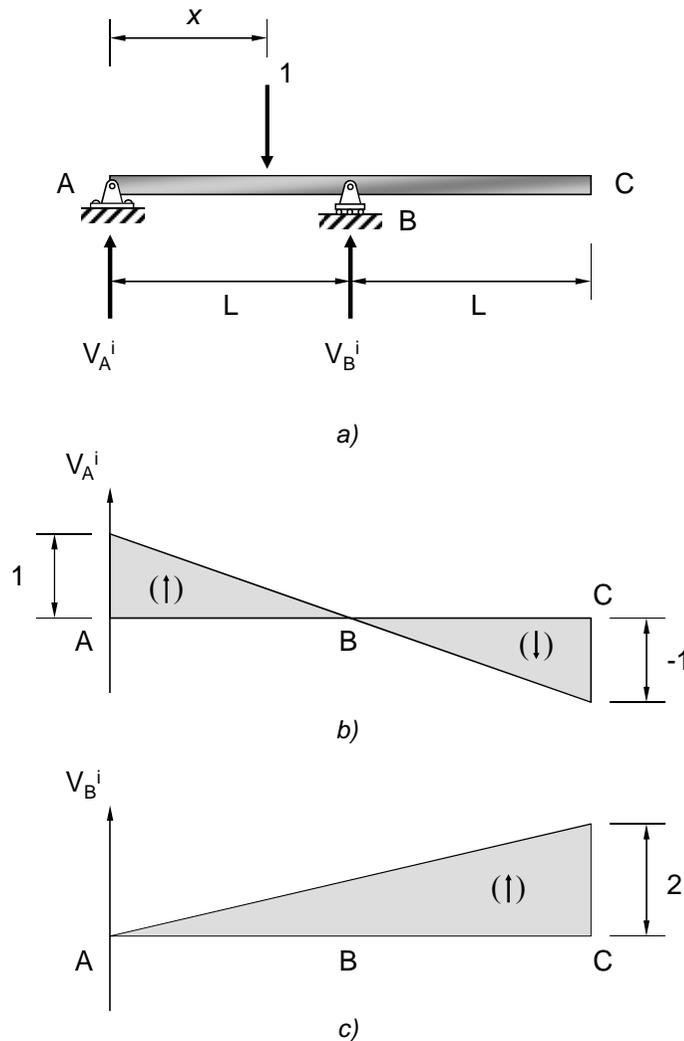
$$M_A = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3$$

Para el caso de una carga P actuando sobre la viga de la figura, el valor máximo del momento en A es $P L$ y corresponde a la posición de la carga P en el extremo libre, como fácilmente puede deducirse a partir de la línea de influencia.



2. Propiedades para diversos tipos de cargas

2.1. Cargas concentradas



En las figuras se representan las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos A y B de la viga biapoyada representada. Sus expresiones se obtienen mediante la simple aplicación de las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A^i \cdot \ell = 1 \cdot (\ell - x) \Rightarrow V_A^i = \frac{\ell - x}{\ell}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B^i = \frac{x}{\ell}$$

$$\text{Sección A } (x = 0) \quad V_A^i = 1 \quad V_B^i = 0$$

$$\text{Sección B } (x = \ell) \quad V_A^i = 0 \quad V_B^i = 1$$

$$\text{Sección C } (x = 2\ell) \quad V_A^i = -1 \quad V_B^i = 2$$

El valor de una respuesta (reacción, esfuerzo o deformación) debido a una carga aislada, es igual al producto de la magnitud de la carga por la ordenada de la línea de influencia de esa respuesta, medida en el punto de aplicación de la carga.

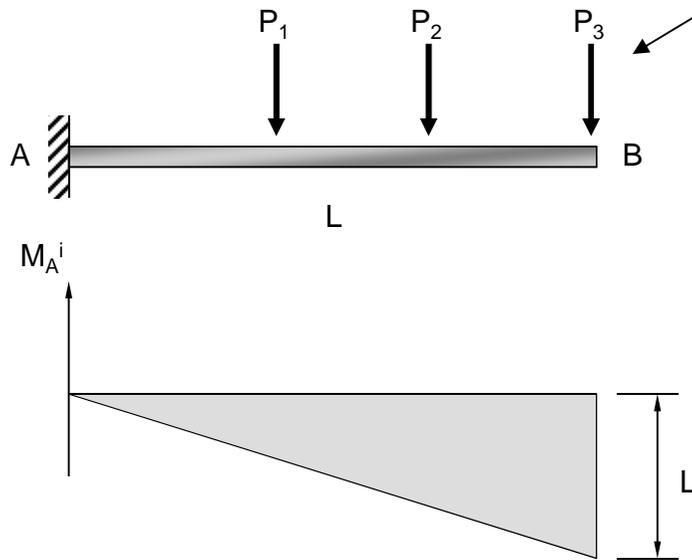


2. Propiedades para diversos tipos de cargas

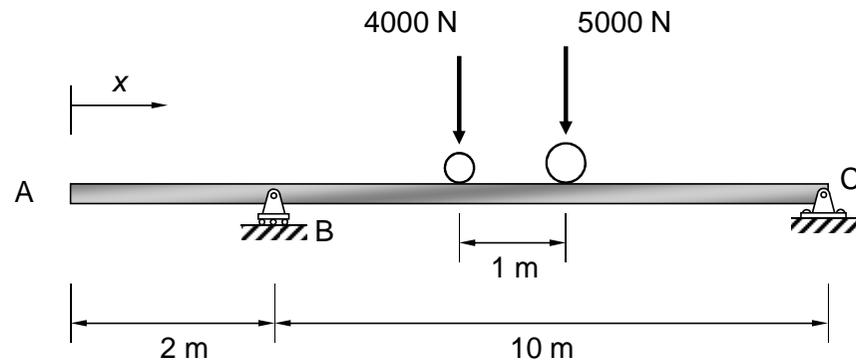
2.2. Trenes de cargas puntuales

Para calcular el valor de la respuesta (reacción, esfuerzo de sección,...) debida a un tren de cargas puntuales P_i , se calcula en primer lugar la línea de influencia de esa respuesta, a la que se denomina línea de influencia básica. A continuación se suma el valor que tiene la línea de influencia básica en la posición de cada carga, multiplicada por el valor de la carga correspondiente con su signo.

Posición más desfavorable del tren de cargas estudiado anteriormente (para M_A)



Ejemplo: La viga de la figura inferior está recorrida por dos cargas de 5000 N y 4000 N, respectivamente, separadas 1m entre sí. Calcular los valores máximos de las reacciones en los apoyos. El movimiento de las cargas puede producirse sobre toda la viga, y con las cargas situadas en los dos sentidos.





2. Propiedades para diversos tipos de cargas

2.3. Cargas distribuidas

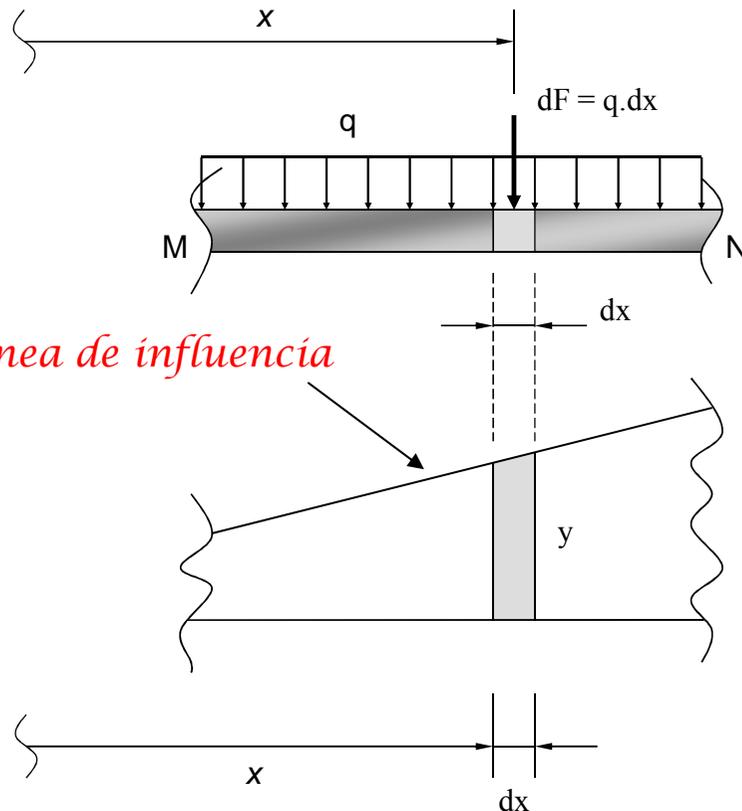
El caso de una carga distribuida móvil es similar al de un tren de cargas puntuales, pero considerando que las cargas están infinitamente próximas.

Sobre cada segmento infinitamente pequeño de la viga actúa una fuerza concentrada $dF = q \cdot dx$. Si dF se sitúa en x , donde la ordenada de la línea de influencia de la respuesta que se esté estudiando (reacción, esfuerzo,...) es K , entonces el valor de esa respuesta es:

$$(dF) \cdot y = (q \cdot dx) \cdot y$$

El efecto simultáneo de todas las fuerzas concentradas se obtiene integrando a lo largo de la longitud de la viga:

$$\int_{\ell} q \cdot y \cdot dx = q \cdot \int_{\ell} y \cdot dx$$



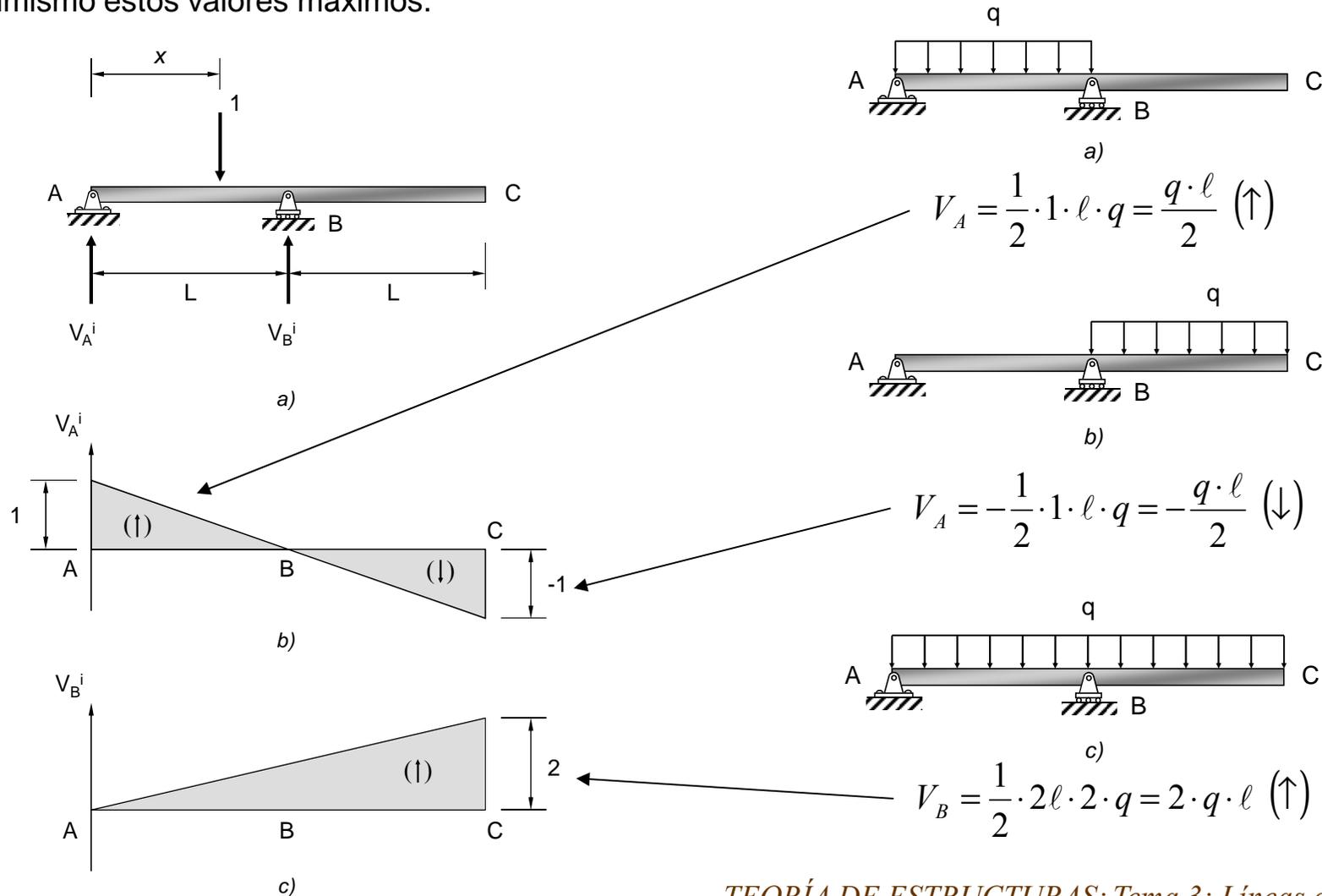
Esta segunda integral representa precisamente el área bajo la línea de influencia. Por consiguiente, puede afirmarse que el valor de la respuesta producida por una carga uniformemente distribuida móvil es igual al producto de la intensidad de la carga por el área total del diagrama de la línea de influencia básica de la respuesta considerada, correspondiente a la zona de estructura cargada.



2. Propiedades para diversos tipos de cargas

Ejemplo

Para la viga biapoyada de la figura, determinar la longitud que debe ocupar una carga uniformemente distribuida q , para que las reacciones en los apoyos alcancen los valores máximos posibles, y calcular asimismo estos valores máximos.





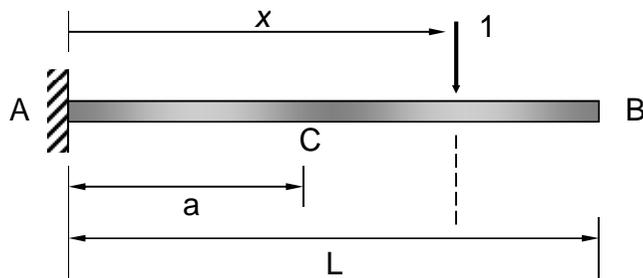
3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Existen dos grandes procedimientos para la determinación de líneas de influencia en estructuras isostáticas: el primero de ellos basado en la simple aplicación de las ecuaciones de la estática, y el segundo fundamentado en el Principio de los Trabajos Virtuales.

3.1. Aplicación de ecuaciones de equilibrio estático

En vigas isostáticas es posible calcular cualquier esfuerzo interno y reacciones en los apoyos utilizando exclusivamente ecuaciones de la estática, y de igual forma también éstas son suficientes para calcular las líneas de influencia.

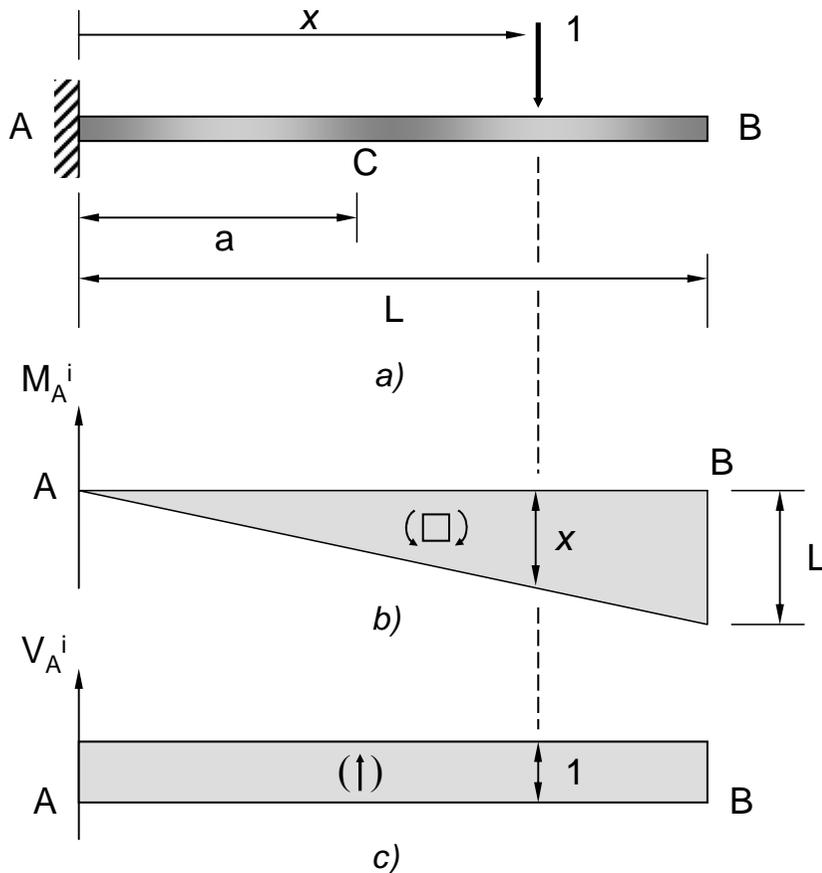
Habitualmente el cálculo de las líneas de influencia de los esfuerzos internos se facilita cuando se conocen las líneas de influencia de las reacciones, por lo que la obtención de éstas suele constituir el primer paso en el proceso de cálculo.



Ejemplo: Para la viga en voladizo de la figura, calcular las líneas de influencia de las reacciones en el empotramiento A, así como las del momento flector y del esfuerzo cortante en la sección C.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas



La línea de influencia del momento en el empotramiento A se obtiene aplicando la ecuación de equilibrio de momentos:

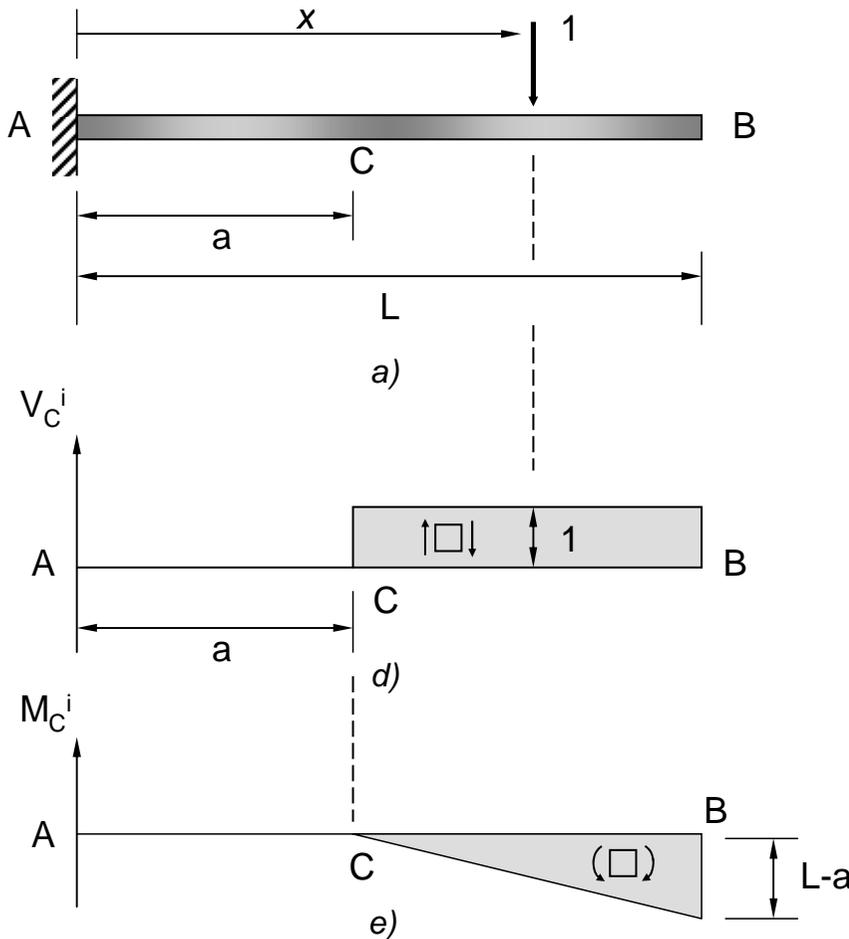
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A^i = 1 \cdot x = x \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

Planteando la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales, puede obtenerse la línea de influencia de la reacción vertical en el empotramiento. Supuesta positiva hacia arriba, su valor será:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A^i = 1 \quad (0 \leq x \leq \ell)$$



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas



Para hallar la línea de influencia del esfuerzo cortante en C se aísla el tramo izquierdo o derecho de la viga, según interese. Y así, si la carga está a la izquierda de C, se aísla el tramo derecho de la viga y se estudia su equilibrio:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C^i = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

Si la carga está a la derecha de C, se aísla y estudia el equilibrio del tramo izquierdo:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C^i = V_A^i = 1 \quad (a \leq x \leq \ell)$$

Para obtener la línea de influencia del momento flector en C se aplica el mismo procedimiento. Por lo tanto, si la carga está a la izquierda de C, se aísla el tramo derecho:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C^i = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

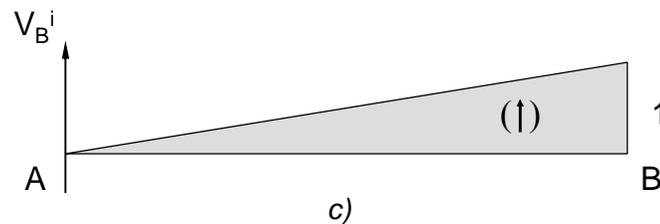
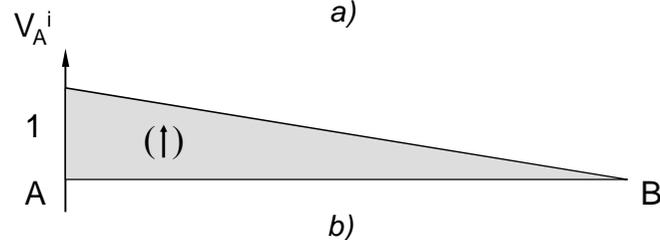
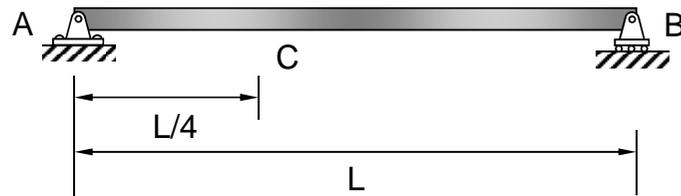
Y si la carga está a la derecha de C, se aísla el tramo izquierdo:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C^i = V_A^i \cdot a - M_A^i = 1 \cdot a - x \Rightarrow M_C^i = a - x \quad (a \leq x \leq \ell)$$



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Viga simplemente apoyada. Para la viga de la figura, calcular las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos así como la del esfuerzo cortante y el momento flector en la sección C.



La línea de influencia de la reacción en A, supuesta positiva hacia arriba, se obtiene tomando momentos respecto de B:

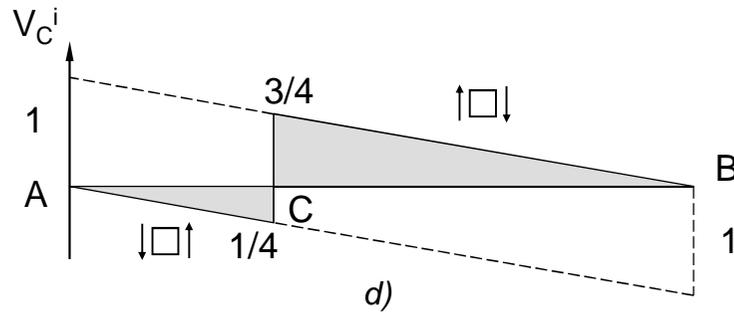
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A^i \cdot \ell = 1 \cdot (\ell - x) \Rightarrow V_A^i = \frac{\ell - x}{\ell} \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

La línea de influencia de la reacción en B, supuesta asimismo positiva hacia arriba, se obtiene tomando momentos respecto de A (o del equilibrio vertical del conjunto):

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B^i \cdot \ell = 1 \cdot x \Rightarrow V_B^i = \frac{x}{\ell} \quad (0 \leq x \leq \ell)$$



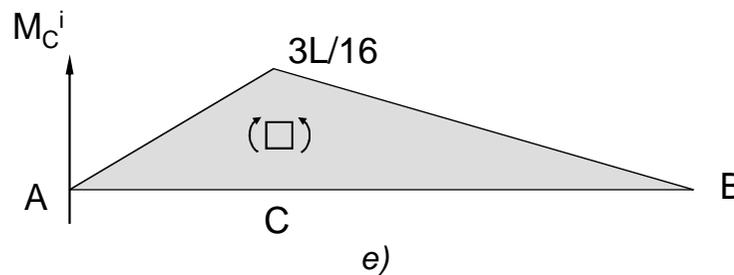
3. Líneas de influencia en vigas isostáticas



Para hallar las líneas de influencia del esfuerzo cortante y del momento flector en C, si la carga está a la izquierda de C se aísla el tramo derecho de la viga:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C^i = V_B^i = \frac{x}{l}$$

$$\left(0 \leq x \leq \frac{l}{4} \right)$$



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C^i = V_B^i \cdot \frac{3 \cdot l}{4} = \frac{x}{l} \cdot \frac{3 \cdot l}{4} = \frac{3 \cdot x}{4}$$

Y si la carga está a la derecha de C, se aísla el tramo izquierdo:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C^i = V_A^i = \frac{l-x}{l}$$

$$\left(\frac{l}{4} \leq x \leq l \right)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C^i = V_A^i \cdot \frac{l}{4} = \frac{l-x}{l} \cdot \frac{l}{4} = \frac{l-x}{4}$$



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

3.2. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Si en una estructura isostática en equilibrio se elimina la ligadura que da lugar a la reacción (o el esfuerzo) cuya línea de influencia se desea hallar, la estructura se convierte en un mecanismo, con lo cual puede tener movimientos de sólido rígido que se producen sin que la estructura se deforme y, por tanto, sin acumulación de energía elástica. De acuerdo con el P.T.V., al aplicar ahora un desplazamiento virtual y puesto que la estructura está en equilibrio, se cumple que el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura es nulo, al no acumularse energía elástica:

$$\delta W = \delta U = 0$$

Las fuerzas que actúan sobre la estructura transformada por ese procedimiento en mecanismo, son las siguientes:

- la fuerza unitaria móvil,
- las reacciones en los apoyos, que no producen trabajo virtual,
- el esfuerzo (o reacción) cuya línea de influencia se desea hallar, y que llamaremos genéricamente LI.

Si se aplica sobre la estructura un desplazamiento virtual en la dirección del esfuerzo o reacción LI cuya línea de influencia se busca, la estructura adopta una configuración deformada como sólido rígido. En esta configuración deformada se denomina δ_{LI} al desplazamiento virtual en la dirección del esfuerzo buscado y δ_1 al desplazamiento en la dirección de la fuerza unitaria móvil. El trabajo virtual producido por ambas fuerzas es:

$$\delta W = \delta_{LI} \cdot LI + \delta_1 \cdot 1 = 0$$



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Despejando el valor de la línea de influencia:

$$LI = -\frac{\delta_1}{\delta_{LI}}$$

Si se elige el desplazamiento virtual de tal manera que valga la unidad ($\delta_{LI} = 1$), se obtiene:

$$LI = -\delta_1$$

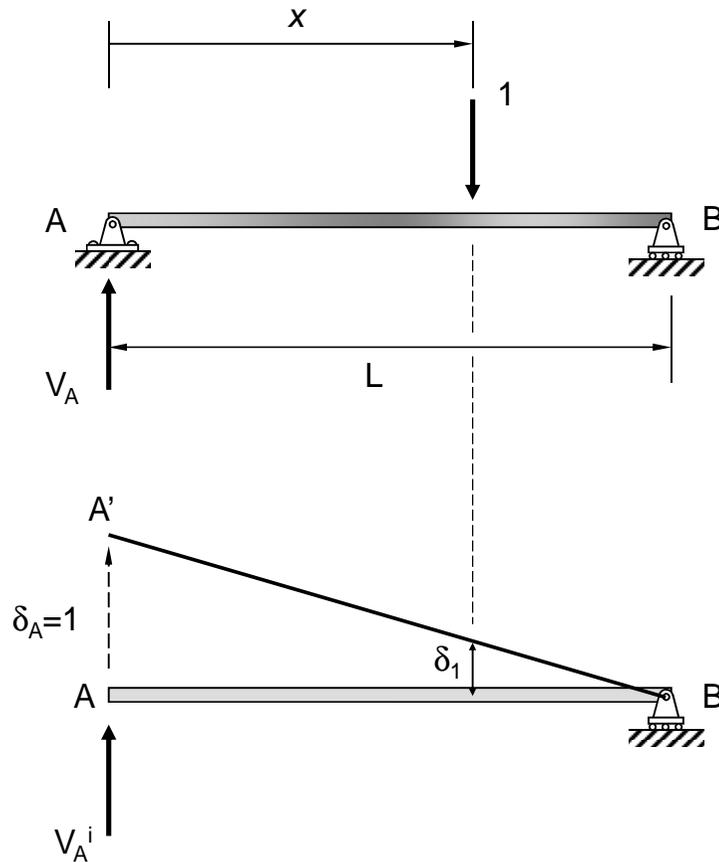
Esta expresión indica que la línea de influencia de un esfuerzo (o reacción) cualquiera en una estructura isostática es igual a la deformada - cambiada de signo – que adopta la estructura considerada como rígida, cuando se aplica un desplazamiento unitario en la dirección de ese esfuerzo (o reacción).

Esta deducción es totalmente general, válida tanto para reacciones como esfuerzos de sección. Se expondrán a continuación varios ejemplos sencillos para ilustrar la aplicación de este Principio a la determinación de diversas líneas de influencia.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Ejemplo: Línea de influencia de la reacción en el apoyo A en la viga biapoyada de la figura



Para aplicar el método se quita el apoyo A colocando la reacción V_A^i , y se permite en A un desplazamiento virtual δ_A en la dirección de la reacción. La viga gira alrededor de B como un mecanismo hasta la posición A'B. En la figura δ_1 indica el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga unitaria. Aplicando el P.T.V.:

$$\delta W = 0 \Rightarrow V_A^i \cdot \delta_A - 1 \cdot \delta_1 = 0 \Rightarrow V_A^i = \frac{\delta_1}{\delta_A}$$

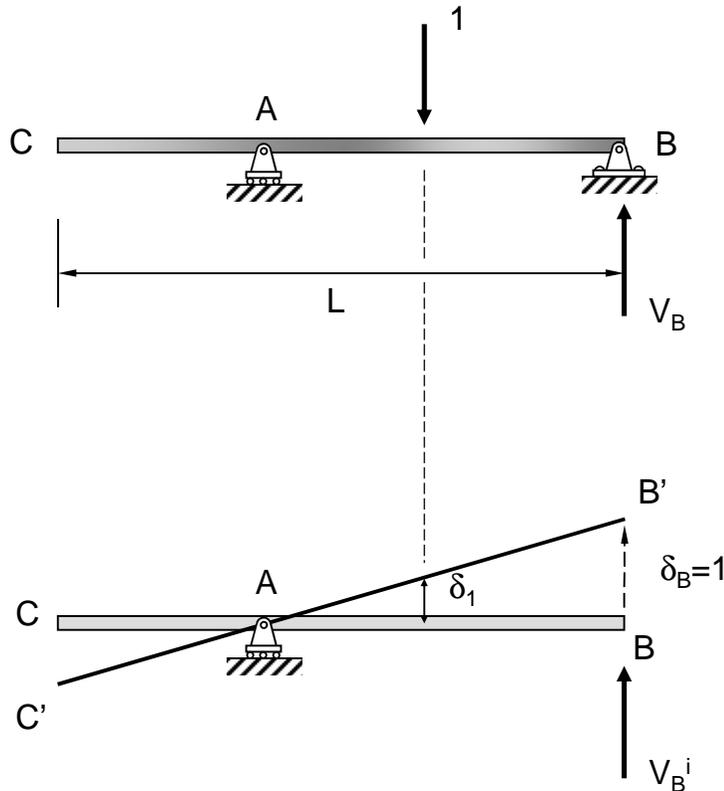
$$\text{Si: } \delta_A = 1 \Rightarrow V_A^i = \delta_1$$

Por definición de línea de influencia, se concluye que la línea A'B es la línea de influencia para V_A , siempre que $\delta_A = 1$.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Ejemplo: Línea de influencia de la reacción en B en la viga de la figura



Repitiendo el planteamiento realizado en el caso anterior:

$$\delta W = 0 \Rightarrow V_A^i \cdot 0 + V_B^i \delta_B - 1 \cdot \delta_1 = 0 \Rightarrow V_B^i = \frac{\delta_1}{\delta_B}$$

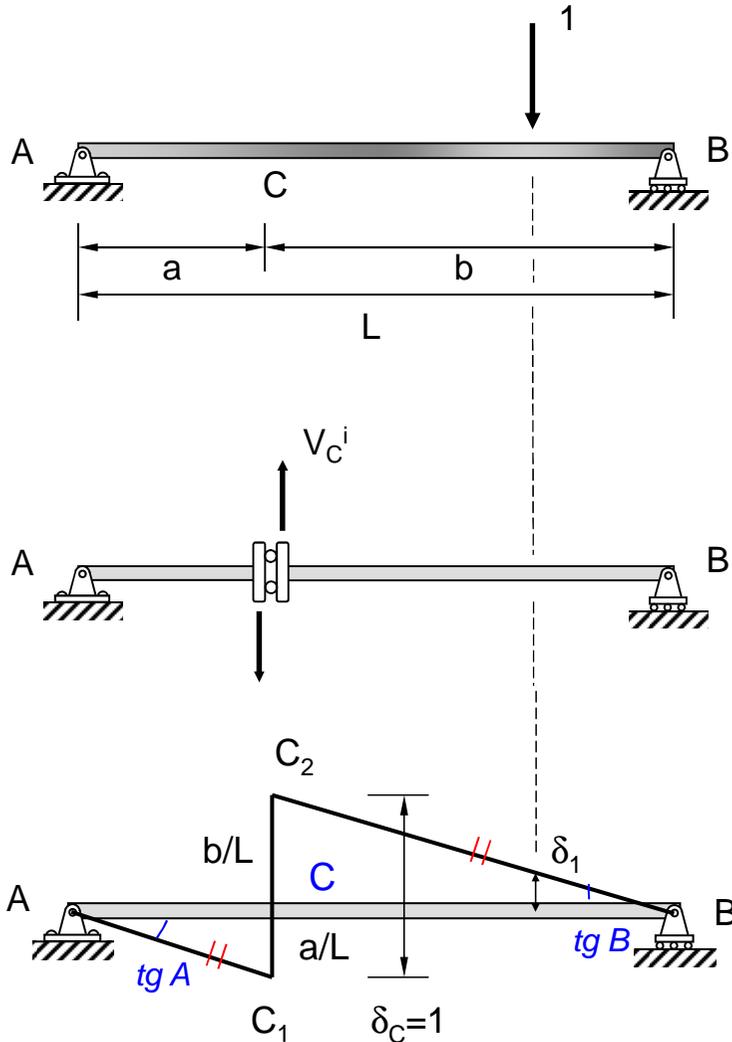
$$\text{Si: } \delta_B = 1 \Rightarrow V_B^i = \delta_1$$

Es decir, la línea de influencia es la recta C'B'. Como es obvio, el valor de C'C puede obtenerse sencillamente a partir de puras consideraciones geométricas.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Ejemplo: Línea de influencia del esfuerzo cortante en la sección C de la figura



Para obtener la línea de influencia del esfuerzo cortante en una sección C, se corta por dicha sección y se aplica un movimiento vertical relativo de valor unidad entre ambas caras, manteniendo el mismo giro en ambas (no se puede introducir una rotación relativa en la sección). Con ello el momento flector en C no produce trabajo virtual.

Considerando la viga biapoyada de la figura, lo dicho es equivalente a rotar AC y BC el mismo ángulo pequeño alrededor de A y B, respectivamente:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B \Rightarrow \frac{CC_1}{a} = \frac{CC_2}{b} = \frac{1 - CC_1}{b} \Rightarrow$$

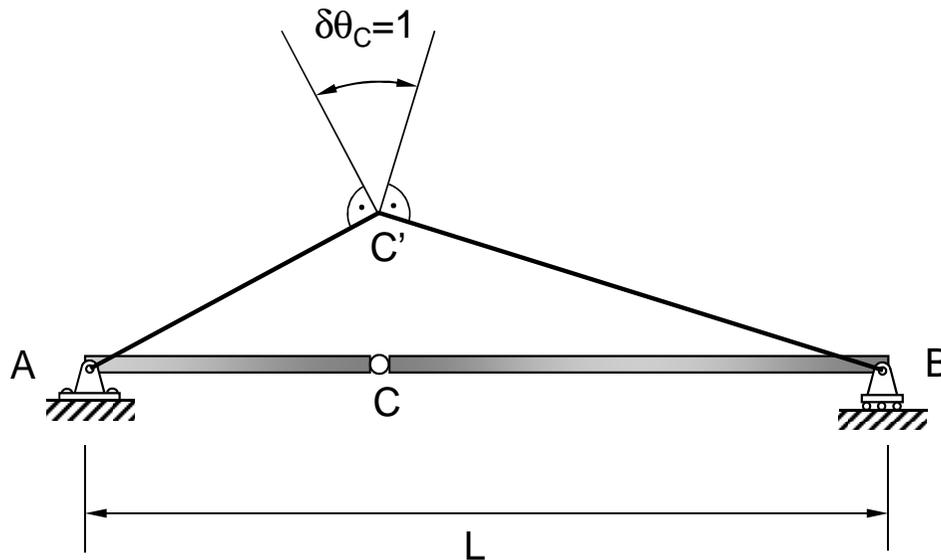
$$(b + a) \cdot CC_1 = a \Rightarrow CC_1 = \frac{a}{\ell} \quad \text{y} \quad CC_2 = \frac{b}{\ell}$$

$$\delta W = 0 \Rightarrow V_C^i \cdot \frac{a}{\ell} + V_C^i \cdot \frac{b}{\ell} - 1 \cdot \delta_1 = 0 \Rightarrow V_C^i = \delta_1$$



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Ejemplo: Línea de influencia del momento flector en la sección C de la viga biapoyada



Para obtener la línea de influencia del momento flector en una sección C, se impone un giro relativo unitario entre ambas caras (como introducir una articulación en C), manteniendo la flecha continua entre ellas a fin de que el cortante no produzca trabajo virtual.

$$\delta W = 0 \Rightarrow M_C^i \cdot (\delta v_C = 1) - 1 \cdot \delta_1 = 0 \Rightarrow M_C^i = \delta_1$$

Esto que prueba que la línea AC'B es la línea de influencia correspondiente al momento flector en la sección C. Esa línea representa el movimiento posible de sólido rígido al introducir una rótula en C.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Este procedimiento para construir líneas de influencia fue desarrollado por Heinrich Müller-Breslau en 1886, y se conoce con el nombre de Principio de Müller-Breslau, el cual podría enunciarse de la siguiente forma:

La línea de influencia de una reacción (o de un esfuerzo de sección) es igual a la configuración deformada que adopta la estructura (considerada como rígida) cuando se elimina de la estructura original la ligadura correspondiente a esa reacción o esfuerzo, y se comunica a la estructura liberada un desplazamiento (o rotación) unidad en el lugar y dirección de esa reacción o esfuerzo, de tal forma que únicamente esta respuesta estructural y la carga unidad realicen trabajo exterior”.

Si además se desean calcular también valores numéricos de las ordenadas de las líneas de influencia, puede aplicarse para ello el método del equilibrio previamente visto. La combinación de ambos constituye un procedimiento muy eficaz para la construcción de líneas de influencia. El procedimiento conjunto podría resumirse en los siguientes pasos:

1. Dibujar la forma general de la línea de influencia aplicando el Principio de **Müller-Breslau**.
 - Para ello se comienza eliminando de la estructura dada la ligadura correspondiente a la respuesta estructural cuya línea de influencia se pretende calcular. Se obtiene un mecanismo.
 - A continuación se aplica a este mecanismo un pequeño desplazamiento (o rotación) en el lugar y en la dirección positiva de esa respuesta (reacción o esfuerzo de sección). Se dibuja la correspondiente configuración deformada del mecanismo que sea compatible con las condiciones de apoyo y de continuidad de la estructura. Esta configuración corresponde a la forma general de la línea de influencia buscada.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

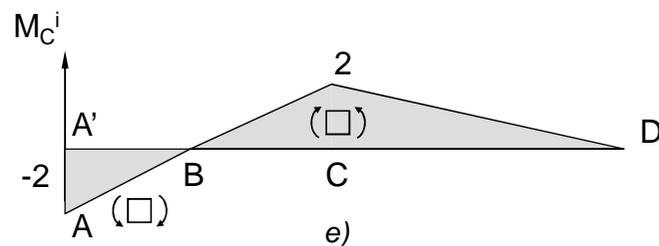
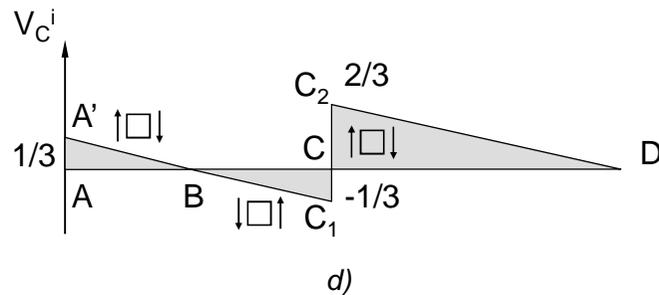
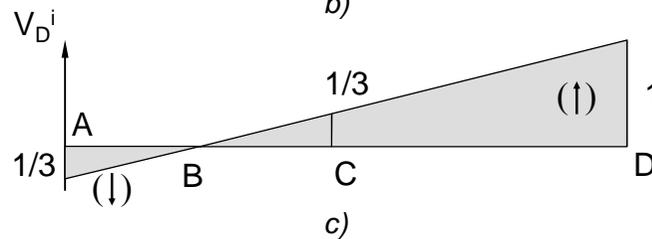
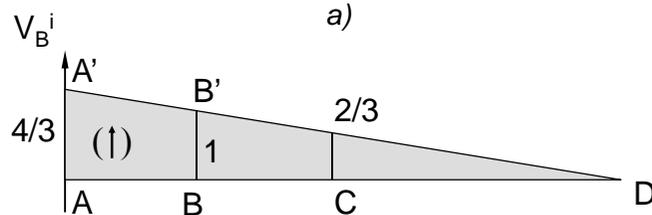
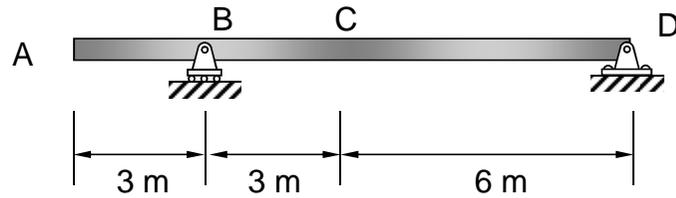
2. Determinar los valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia utilizando el método del equilibrio y la propia geometría de la línea.

- Colóquese una carga unidad en la posición correspondiente a la respuesta estructural en la estructura original (no liberada), y mediante la aplicación de las condiciones de equilibrio determínese el valor de la ordenada de la línea de influencia correspondiente a esa posición. Si la respuesta estructural buscada es un esfuerzo cortante, entonces la carga unidad debe colocarse sucesivamente en dos lugares, inmediatamente a la izquierda y a la derecha, de la sección correspondiente, y para ambas posiciones deben calcularse los valores de las ordenadas de la línea de influencia. Si la ordenada de la sección correspondiente a la respuesta estructural que se está estudiando es cero, entonces colóquese la carga unidad en la posición de ordenada máxima o mínima, y determínese el valor numérico de la ordenada aplicando condiciones de equilibrio.
- Utilizando la geometría de la línea de influencia, determínese los valores numéricos de las restantes ordenadas en todas aquellas posiciones correspondientes a cambios de pendiente en la línea de influencia.

Este principio es únicamente válido para líneas de influencia correspondientes a respuestas estructurales que son reacciones o esfuerzos de sección, pero no puede aplicarse al cálculo de líneas de influencia de deformaciones. Y puede aplicarse indistintamente en estructuras isostáticas o hiperestáticas.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

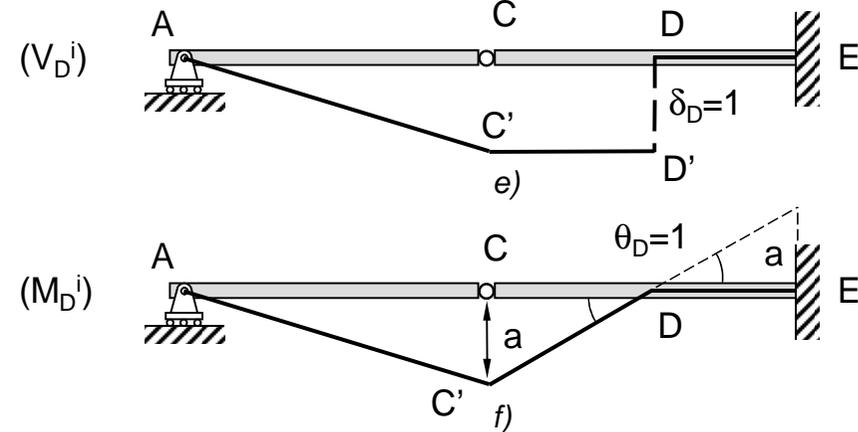
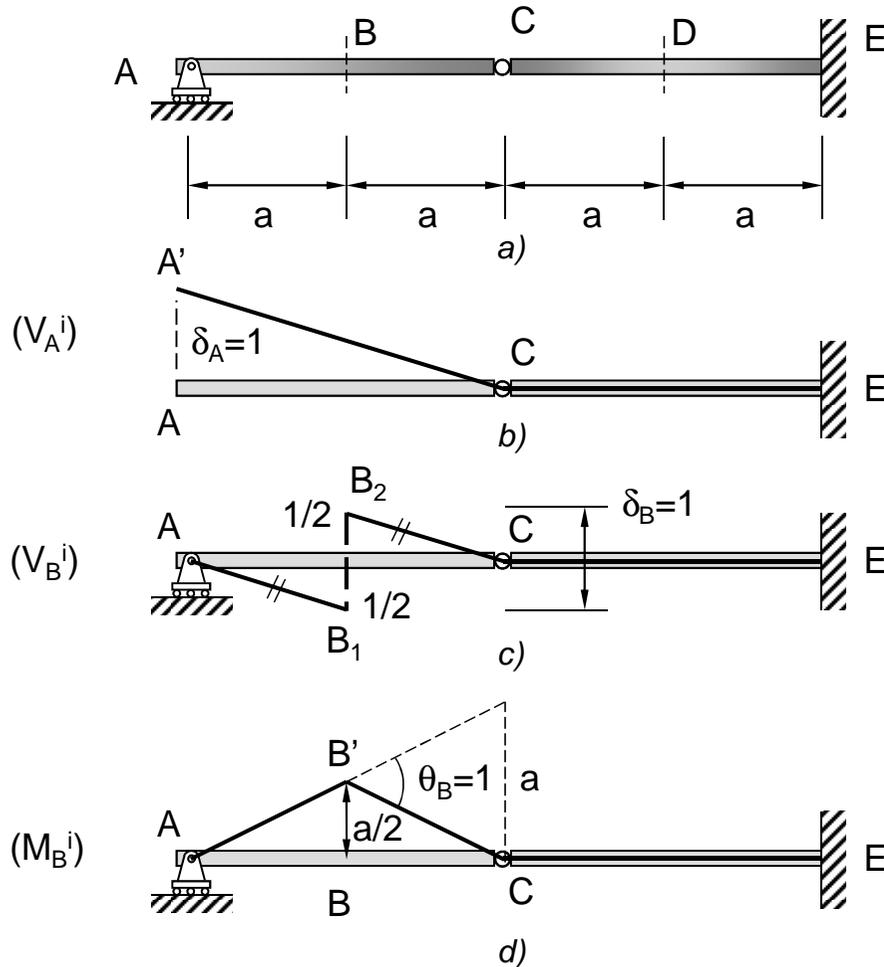


Ejemplo: En la figura se representan, debidamente acotadas, las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos así como las del esfuerzo cortante y del momento flector en la sección C.



3. Líneas de influencia en vigas isostáticas

Ejemplo: En la figura se representan las líneas de influencia de la reacción en el apoyo A así como las del esfuerzo cortante y del momento flector en las secciones B y D.





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Se pueden determinar las líneas de influencia correspondientes a los esfuerzos axiales en las barras de una celosía mediante procedimientos similares a los estudiados para el caso de vigas.

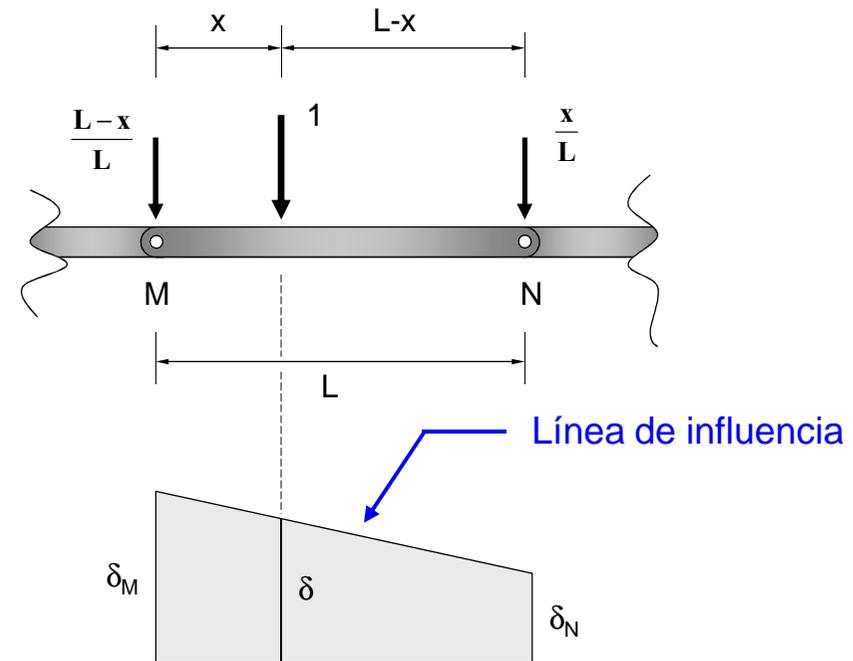
La principal diferencia es que en el caso de celosías las cargas únicamente pueden estar aplicadas en los nudos, y no a lo largo de todo el vano, por lo que en principio, las líneas de influencia no serían rectas de uno al otro lado del vano.

Pero dado que las diversas barras están desconectadas a flexión unas de otras y su comportamiento es lineal, ocurre que la línea de influencia cuando la carga móvil está entre dos nudos es también lineal. Por tanto, es suficiente con hallar la línea de influencia para la carga aplicada en los distintos nudos de la trayectoria, y unir los valores discretos obtenidos mediante líneas rectas.

Cuando la carga unidad ocupa una posición intermedia entre M y N, por ejemplo, a una distancia x de M, esta carga se transmitirá a los nudos M y N con los valores $(L-x)/L$ y x/L respectivamente. Para verificarlo basta estudiar el equilibrio tomando momentos respecto de ambos nudos:

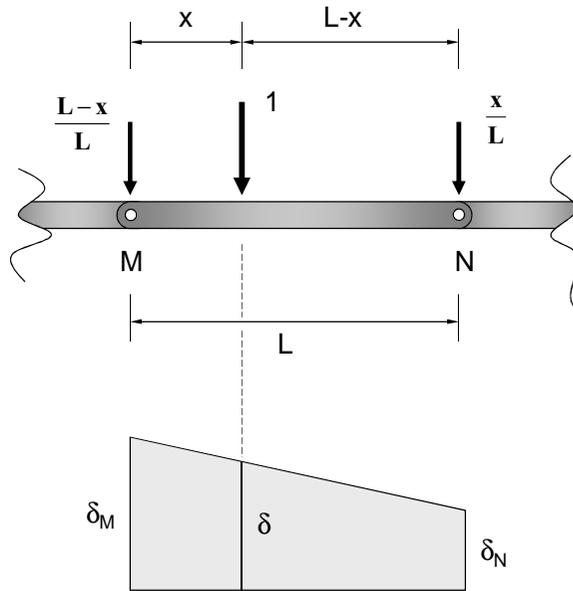
$$\sum M_N = 0 \Rightarrow R_M \cdot \ell = 1 \cdot (\ell - x) \Rightarrow R_M = \frac{\ell - x}{\ell}$$

$$\sum M_M = 0 \Rightarrow R_N \cdot \ell = 1 \cdot x \Rightarrow R_N = \frac{x}{\ell}$$





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas



Por consiguiente, el efecto de esa carga equivale a la superposición de esas otras dos cargas de valores $(L-x)/L$ y x/L actuando en los nudos M y N, respectivamente.

Fácilmente puede demostrarse que si δ es la ordenada de la línea de influencia cuando la carga unidad está colocada en la posición de la figura, se verifica, por pura equivalencia estática:

Ecuación de una
recta

$$1 \cdot \delta = \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right) \cdot \delta_M + \frac{x}{\ell} \cdot \delta_N \Rightarrow \begin{aligned} \text{Para } x = 0: \quad \delta &= \delta_M \\ \text{Para } x = \ell: \quad \delta &= \delta_N \end{aligned}$$

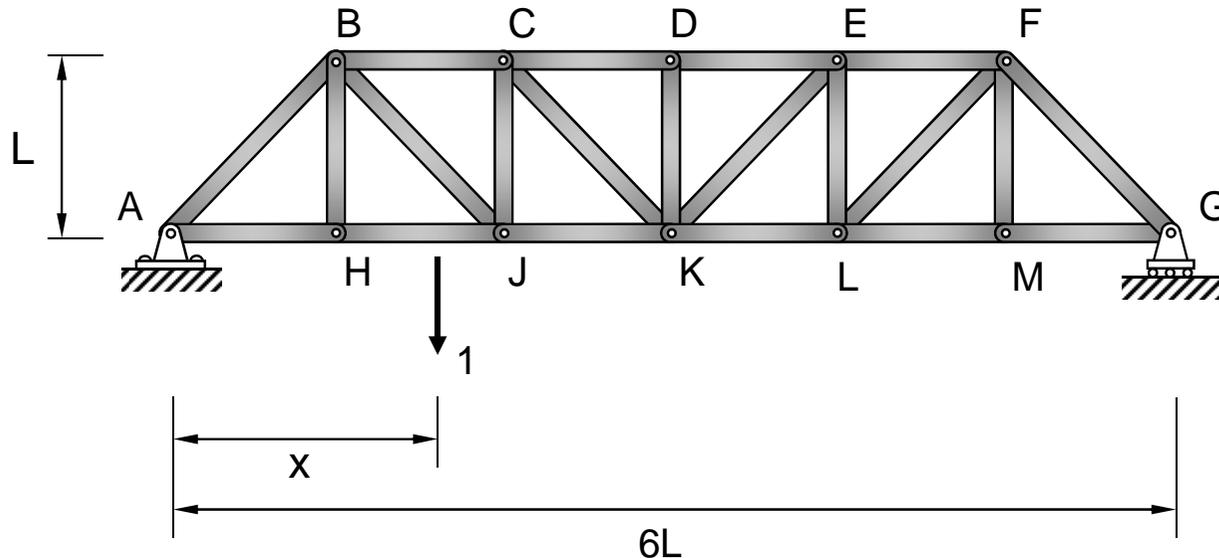


4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

4.1. Aplicación de ecuaciones de equilibrio estático

Un procedimiento sencillo y rápido para determinar la línea de influencia de cualquier barra de una celosía utilizando exclusivamente consideraciones de equilibrio estático, consiste en aplicar los ya conocidos métodos de los nudos o de las secciones de Ritter (con sus simplificaciones), calculando previamente, cuando sean necesarios, los valores de las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos, y tener en cuenta la propiedad que acaba de demostrarse, es decir, que la línea de influencia varía linealmente cuando la carga se mueve entre dos nudos.

Ejemplo: Para la celosía de la figura 3.19 se representan las líneas de influencia de las reacciones y de los esfuerzos en diversas barras. La carga unitaria se mueve a lo largo del cordón inferior.



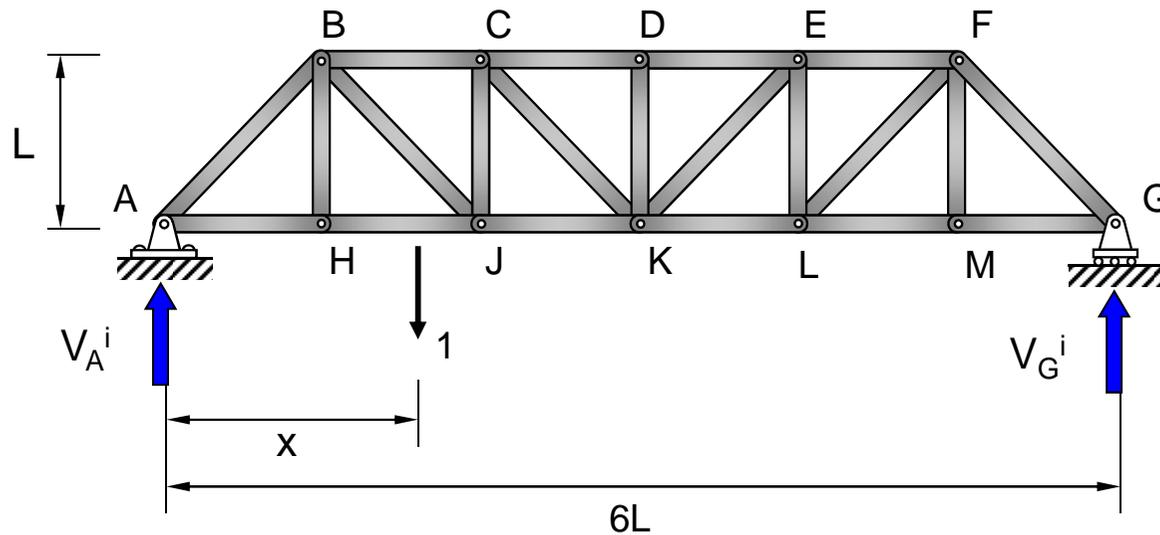


4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Las líneas de influencia de las reacciones se calculan aplicando el equilibrio de todo el conjunto:

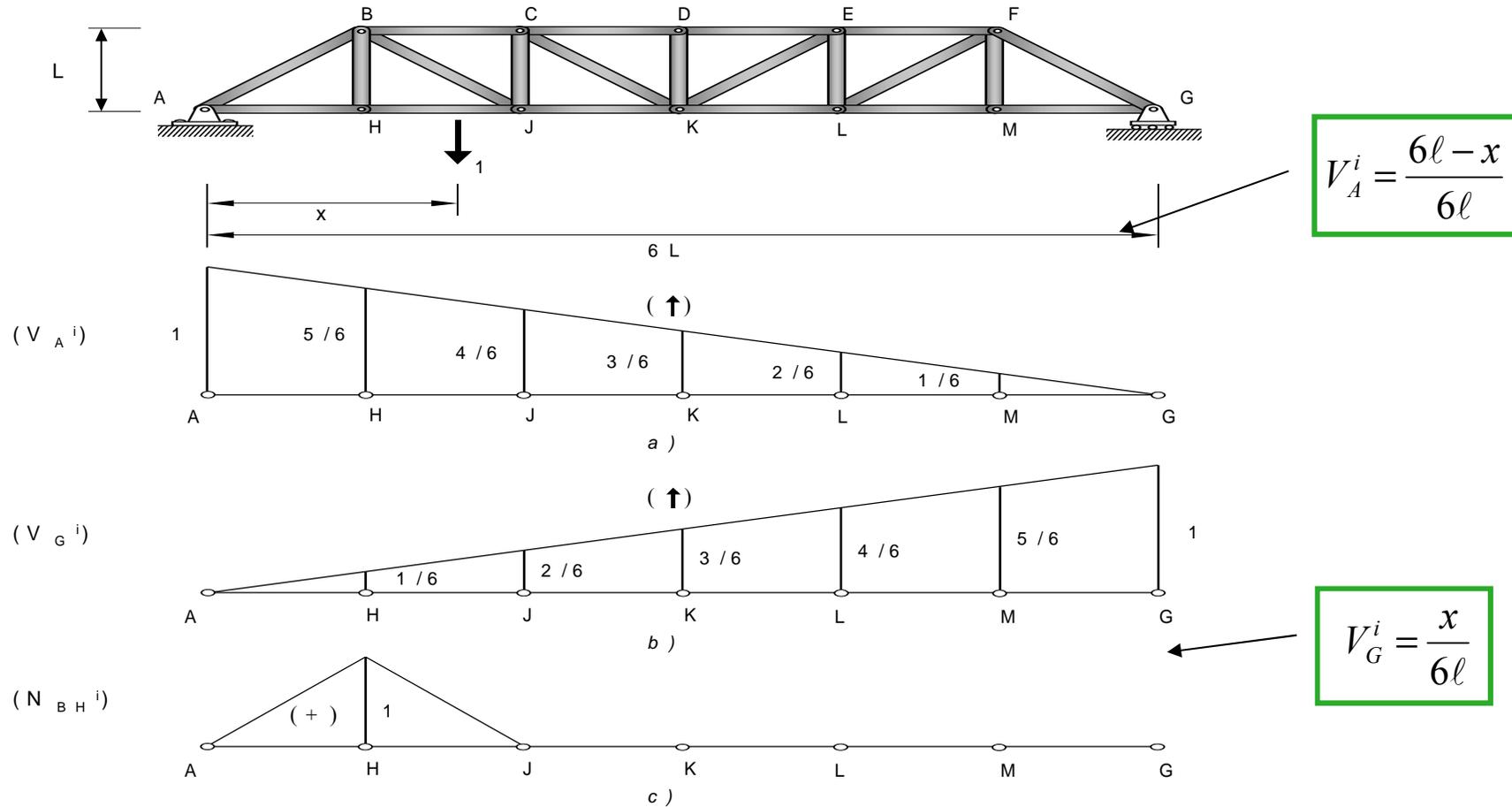
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow V_A^i \cdot 6l = 1 \cdot (6l - x) \Rightarrow V_A^i = \frac{6l - x}{6l}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_G^i \cdot 6l = 1 \cdot x \Rightarrow V_G^i = \frac{x}{6l}$$





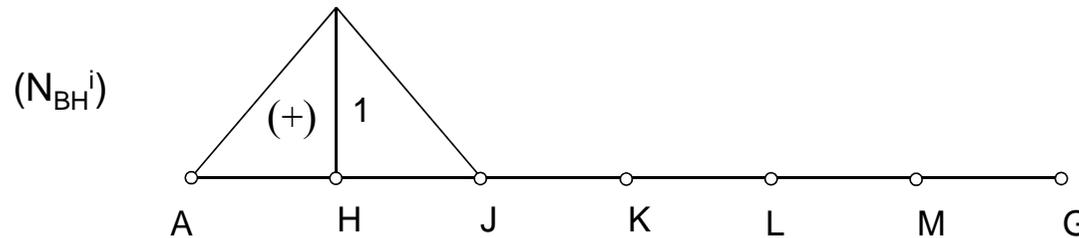
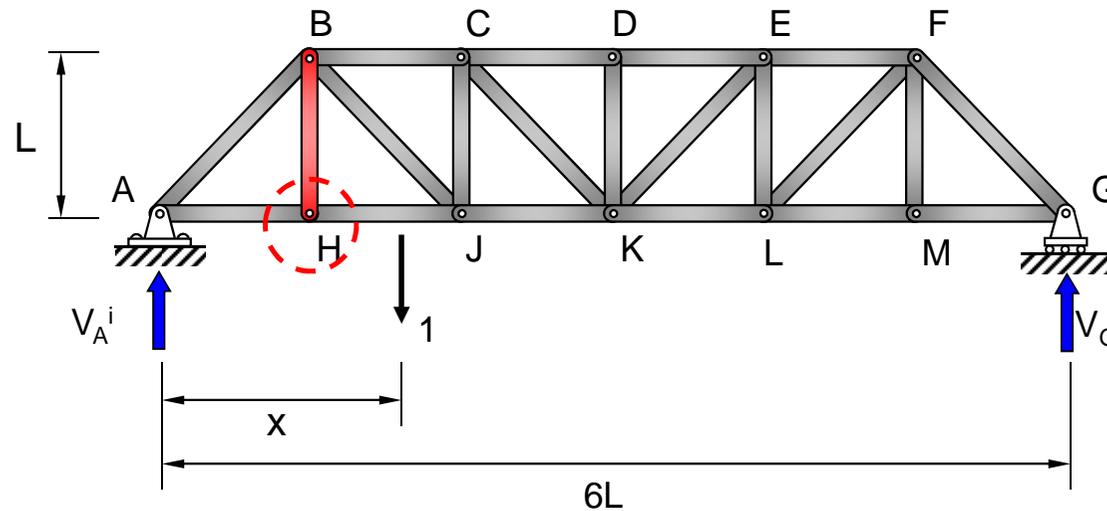
4. Líneas de influencia en celosías isostáticas





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

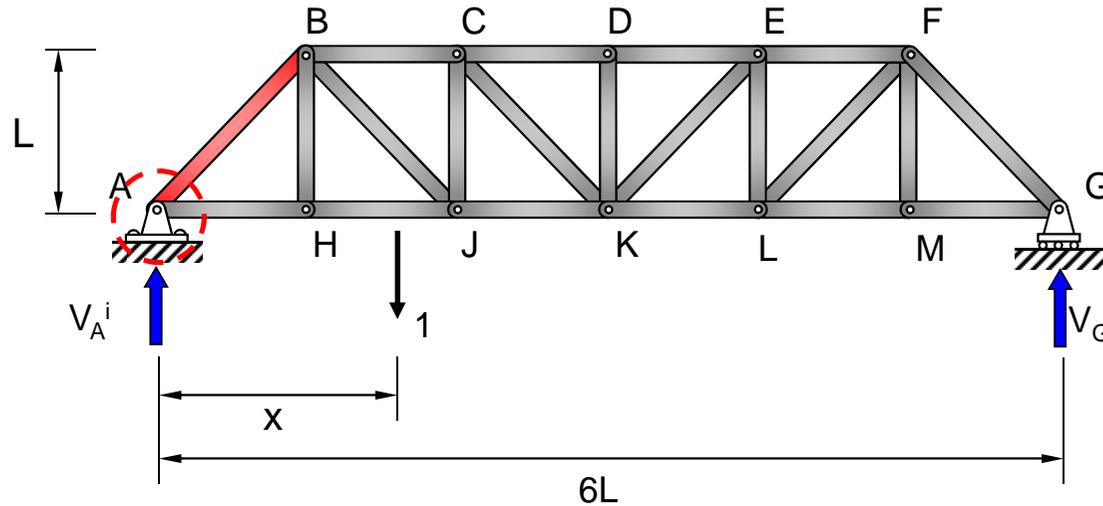
Línea de influencia en el tirante vertical BH: Considerando el equilibrio vertical del nudo H, el elemento BH está sometido a un esfuerzo unidad cuando la fuerza está justo en H, y tiene un esfuerzo nulo cuando la fuerza está en otros nudos. Para completar la representación basta con tener en cuenta la propiedad de variación lineal cuando la carga se mueve entre dos nudos.



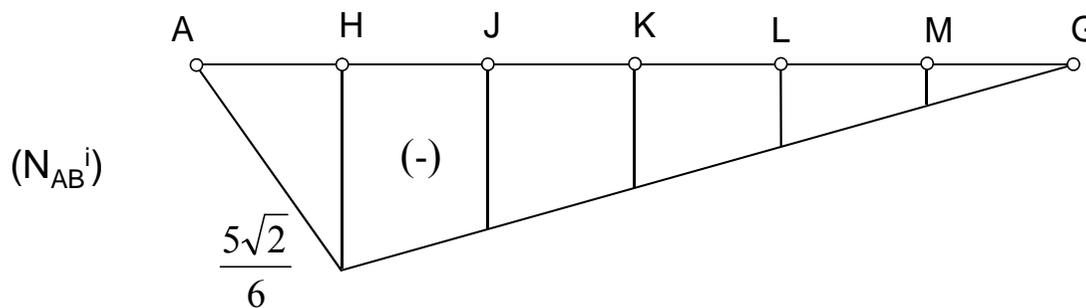


4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Línea de influencia en la diagonal AB: Considerando el equilibrio vertical del nudo A:



$$N_{AB}^i = -\sqrt{2} \cdot V_A^i = -\sqrt{2} \cdot \frac{6l - x}{6l}$$

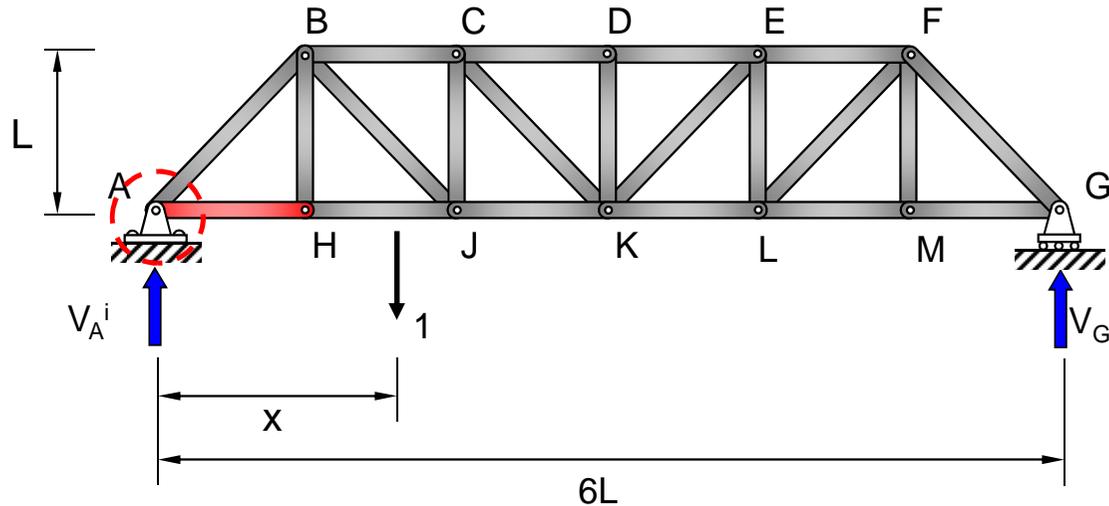


Cuando la carga está en A el esfuerzo en AB es nulo, por lo que la línea de influencia en el tramo AH es distinta y llega a cero en el punto A.

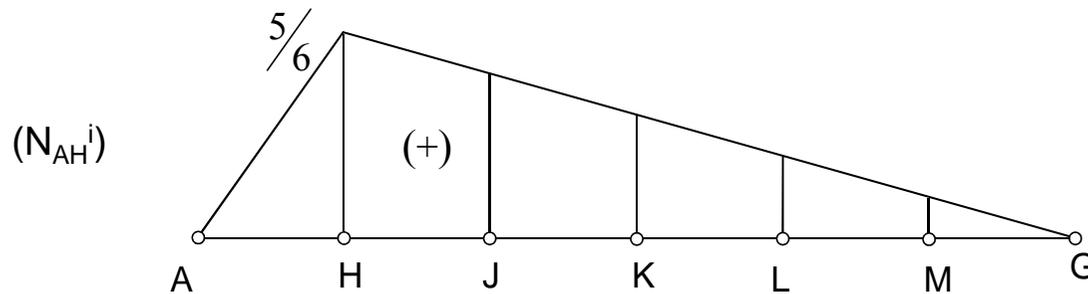


4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Línea de influencia en la barra AH: Considerando el equilibrio horizontal del nudo A:



$$N_{AH}^i = \frac{-N_{AB}^i}{\sqrt{2}} = V_A^i = \frac{6l - x}{6l}$$

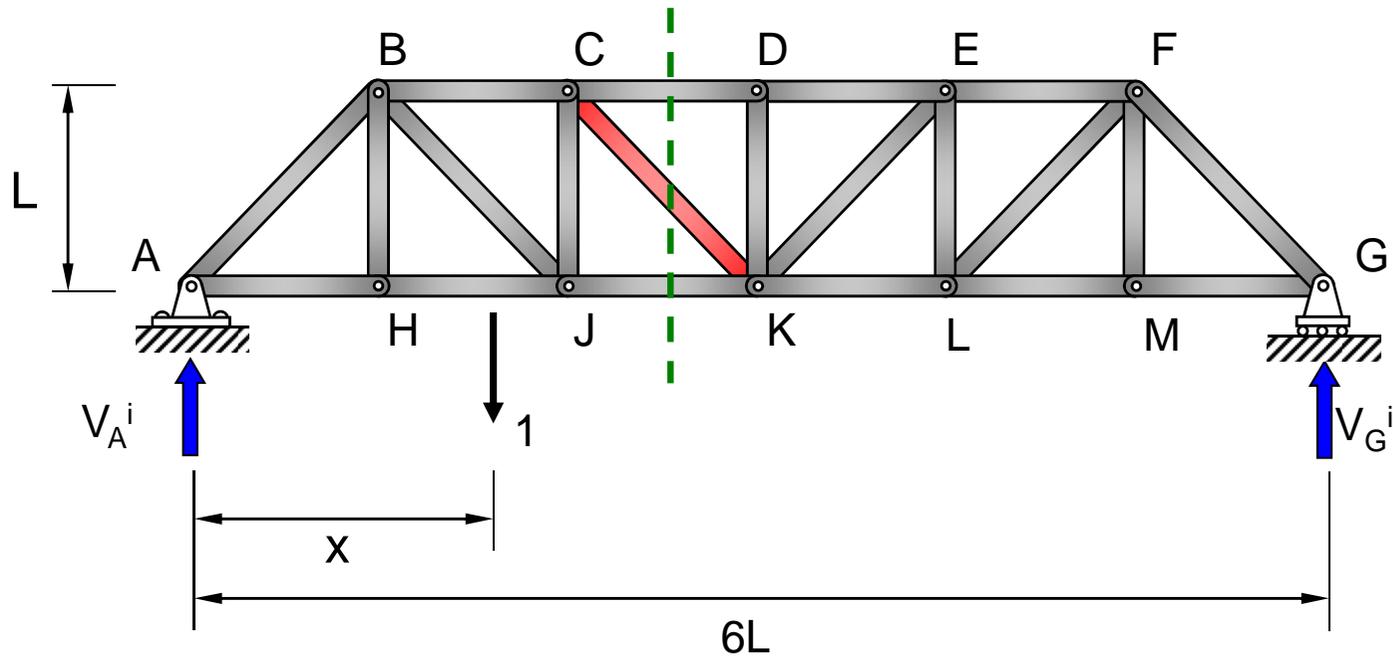


Cuando la carga está en A el esfuerzo en AH es nulo, por lo que la línea de influencia en el tramo AH es distinta y llega a cero en el punto A.



4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

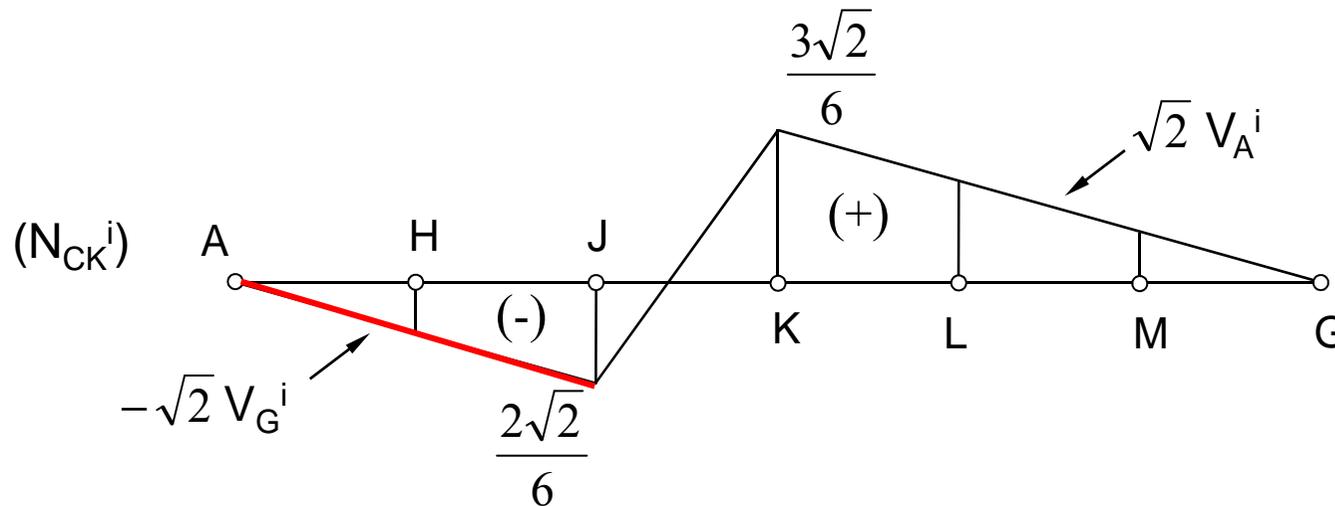
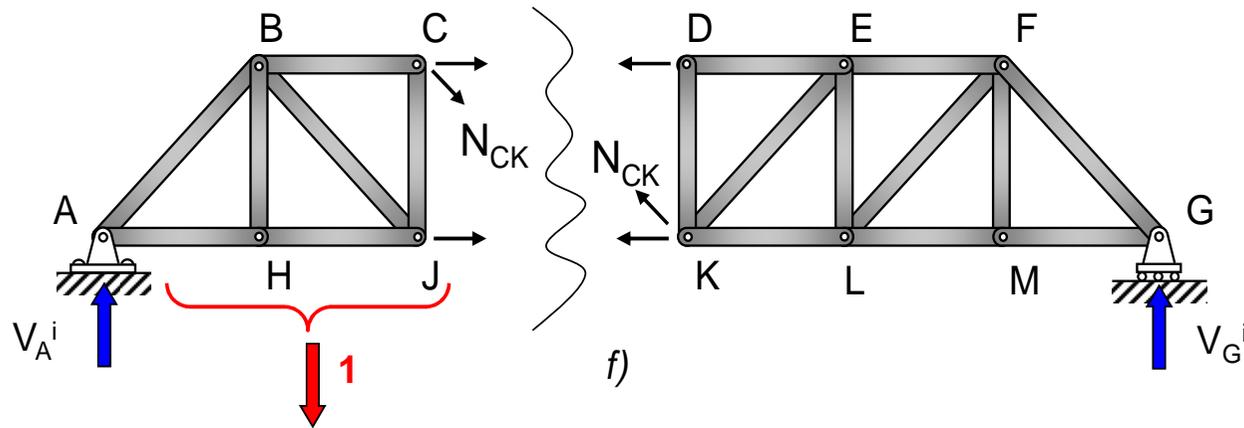
Línea de influencia en la diagonal CK: Aplicando el método de las secciones y dando el corte de la figura:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

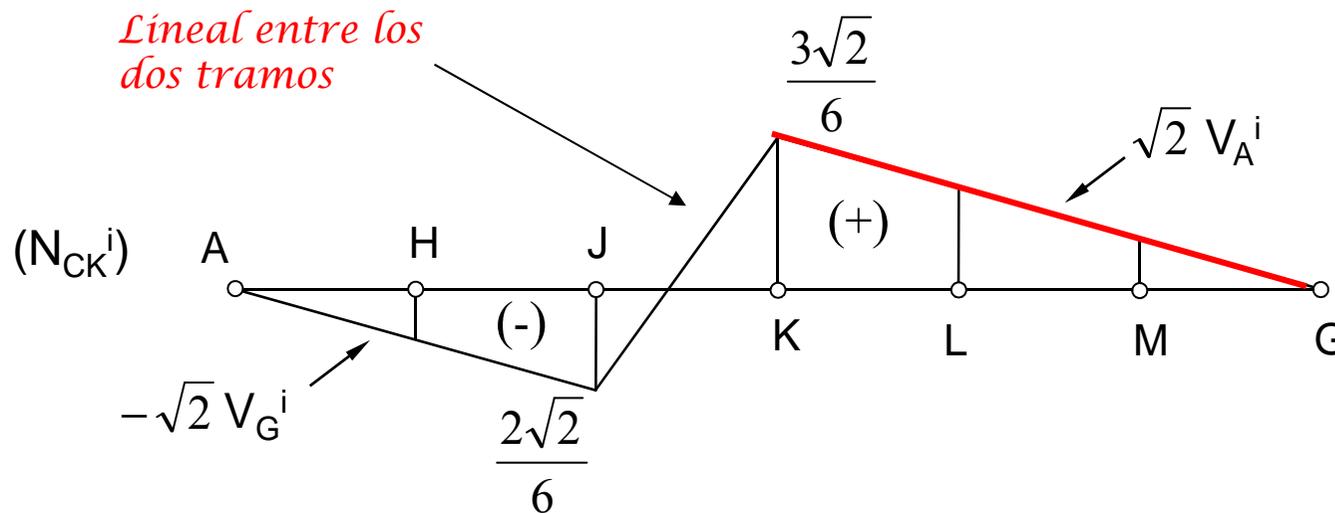
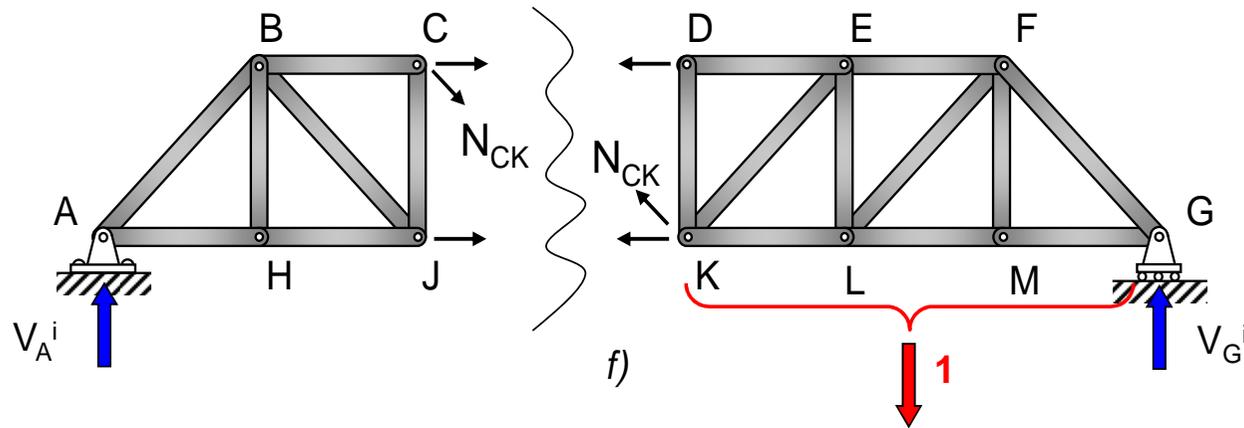
Si la carga está entre A y J, se aísla la parte de la derecha: $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{CK}^i = -\sqrt{2} \cdot V_G^i$





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

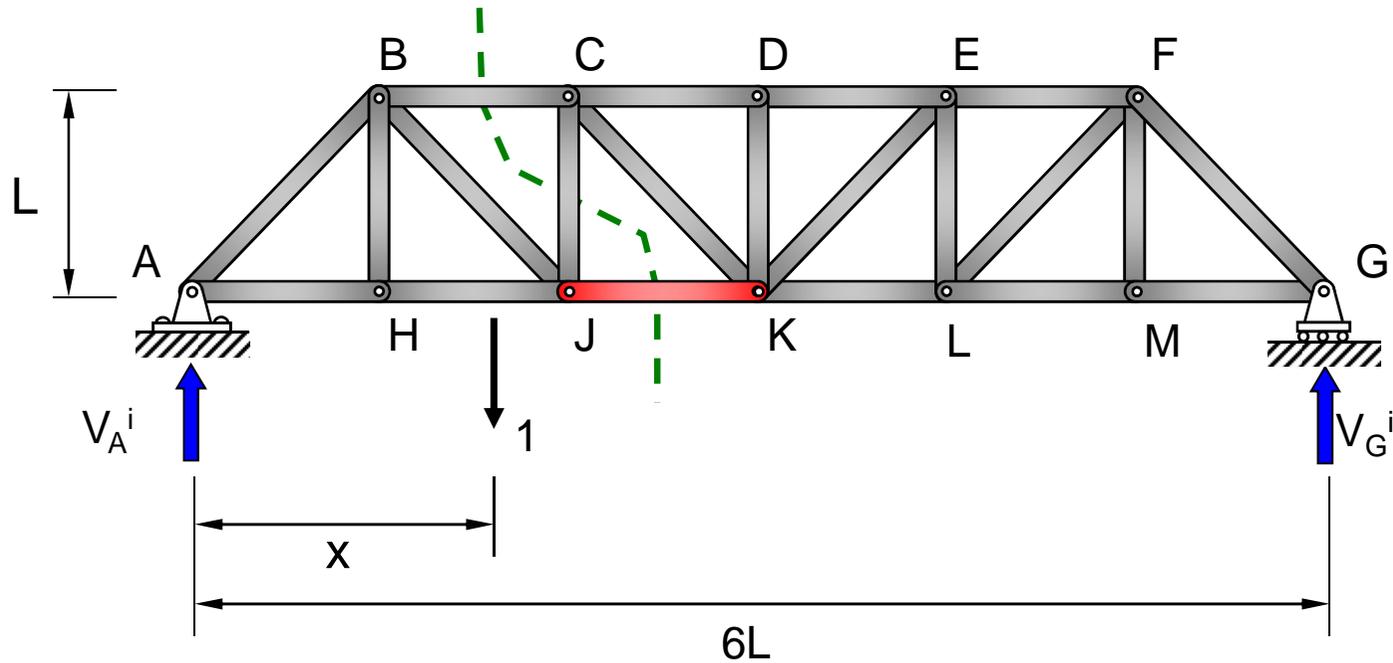
Si la carga está entre K y G, se aísla la parte de la izquierda: $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{CK}^i = \sqrt{2} \cdot V_A^i$





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

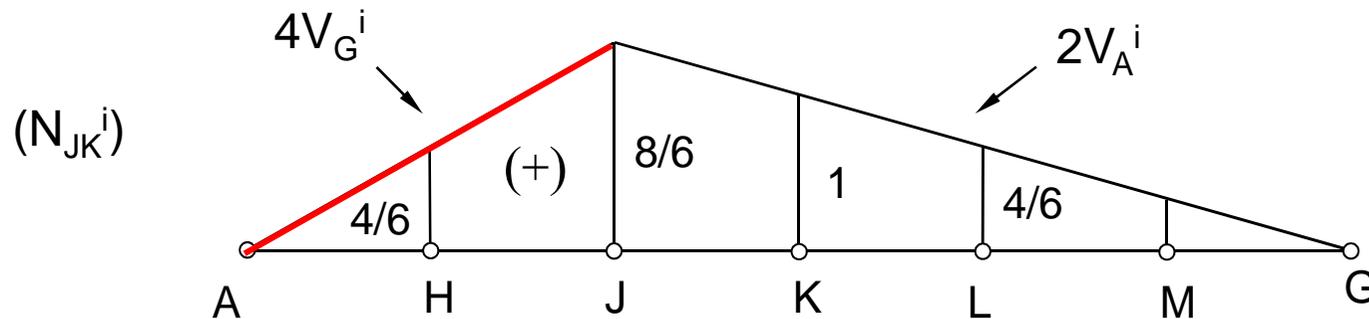
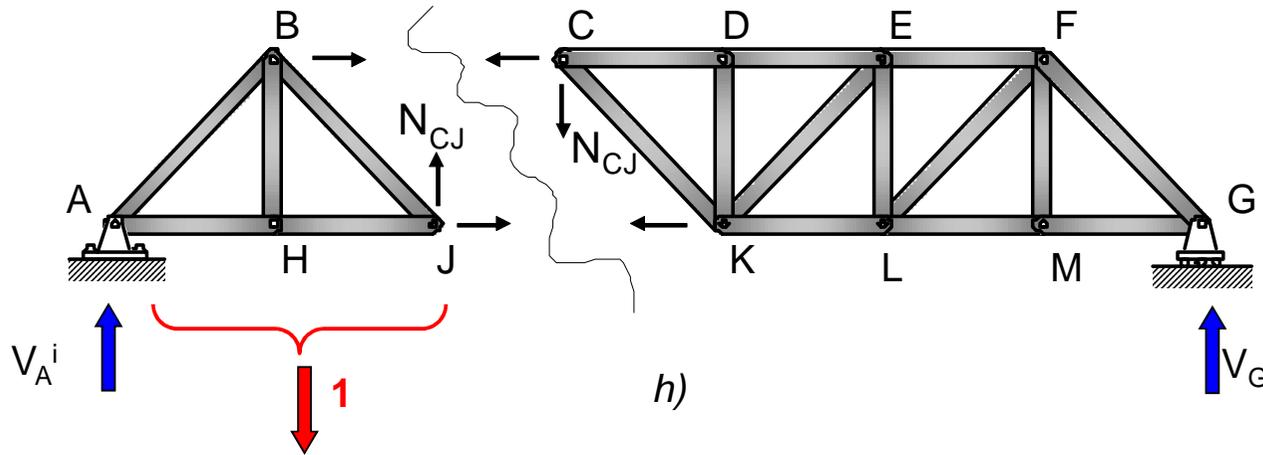
Línea de influencia en la barra JK: Aplicando el método de las secciones y dando el corte de la figura:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

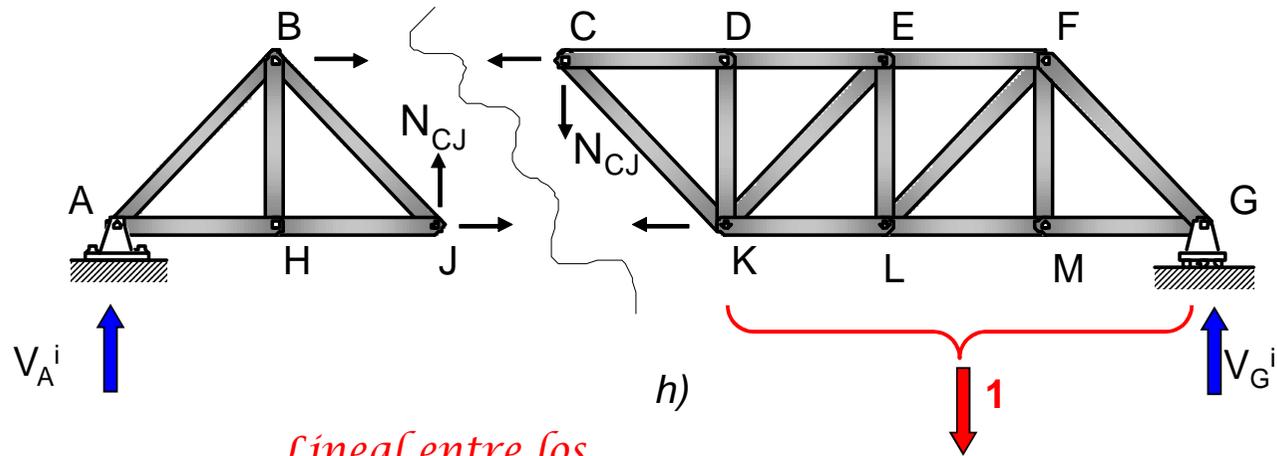
Si la carga está entre A y J, se aísla la parte de la derecha: $\sum M_C = 0 \Rightarrow N_{JK}^i \cdot \ell = V_G^i \cdot 4\ell \Rightarrow N_{JK}^i = 4V_G^i$



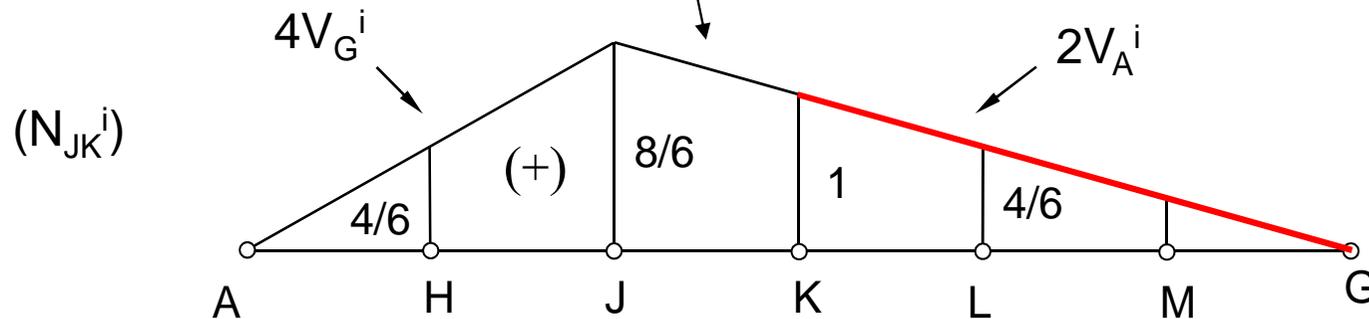


4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Si la carga está entre K y G, se aísla la parte izquierda: $\sum M_C = 0 \Rightarrow N_{JK}^i = 2V_A^i$



Línea entre los dos tramos





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

4.2. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Al igual que se hizo para el caso de vigas, también en el caso de estructuras en celosía resulta especialmente adecuado la aplicación del Principio de Müller-Breslau para la determinación de la forma general de la línea de influencia. Si además se quieren calcular valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia, el procedimiento más rápido para acotarla numéricamente es colocar una carga unidad en un nudo cualquiera de la celosía para obtener el valor de la ordenada de la línea de influencia en ese punto de una forma analítica, al mismo tiempo que se determina si la barra trabaja a tracción o compresión.

Proceso:

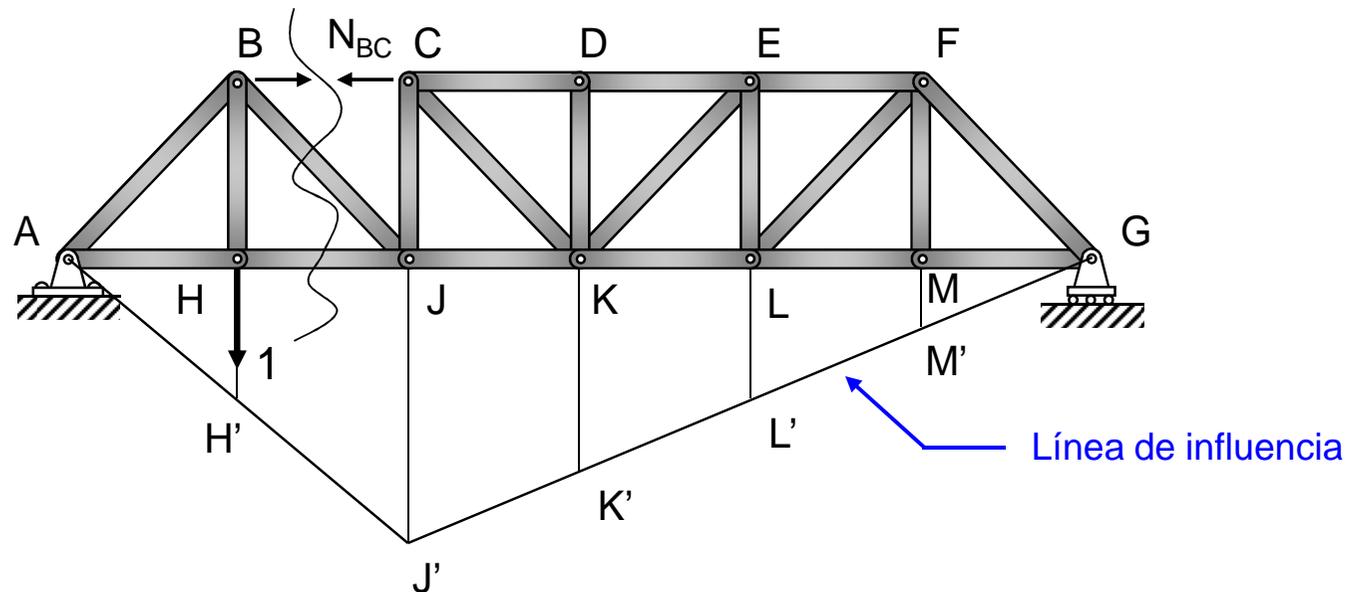
- 1) Se suprime la barra y se sustituye por dos fuerzas de la misma dirección, iguales y de sentido contrario, que representan las acciones sobre la estructura.
- 2) Se obtiene un mecanismo con un grado de libertad.
- 3) La línea de influencia del esfuerzo axial de la barra suprimida coincide con la deformada del cordón inferior (considerado rígido) cuando se da a la estructura un pequeño desplazamiento compatible con ese grado de libertad introducido en la estructura.



4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Ejemplo: Determinar la línea de influencia de la barra BC de la celosía del apartado anterior.

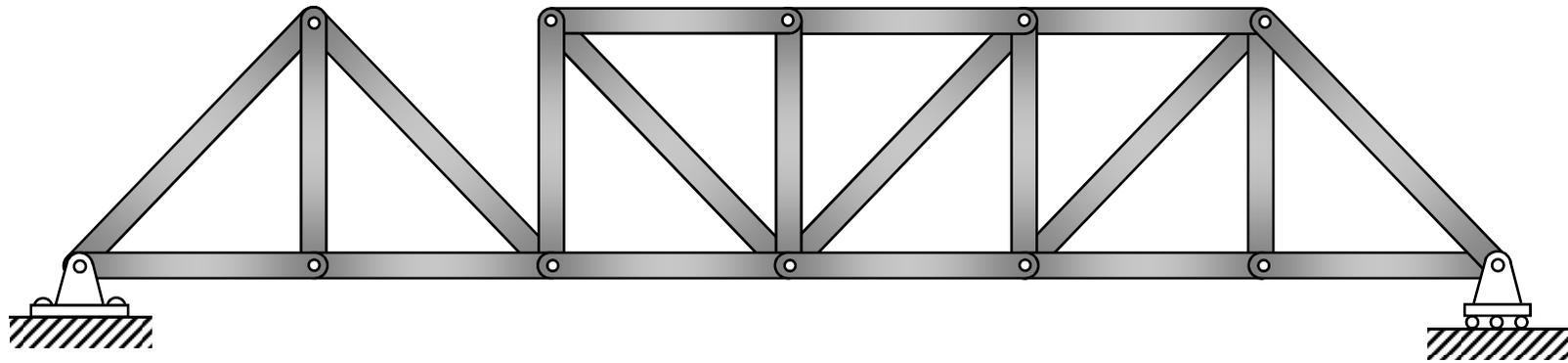
Por lo que respecta al cordón superior BC, la figura inferior muestra el mecanismo resultante de suprimir la barra BC, así como la deformada del cordón inferior al proporcionar un pequeño desplazamiento posible a este mecanismo (giro alrededor de las articulaciones A, G y J). De acuerdo con lo dicho anteriormente, la línea de influencia de BC es la línea AH'J'K'L'M'G.





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

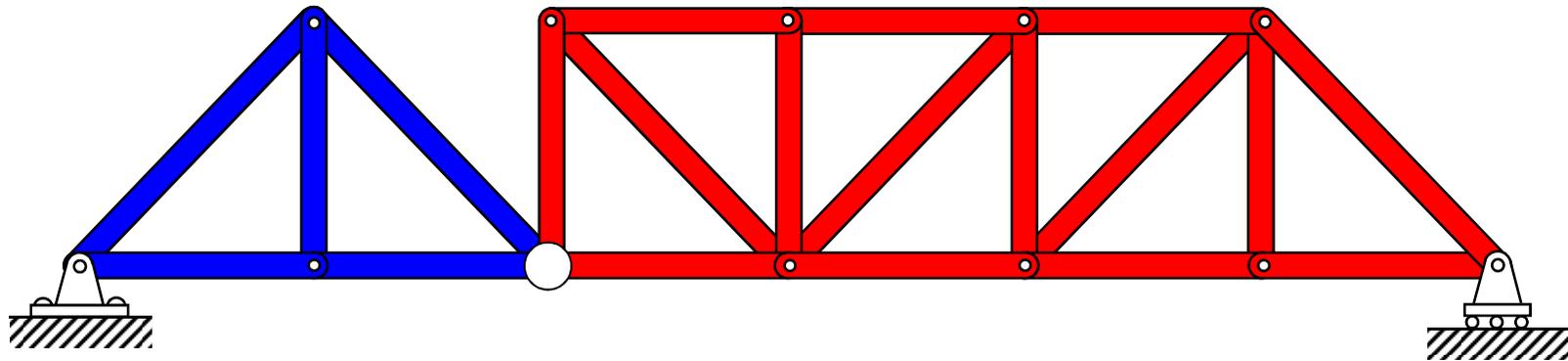
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

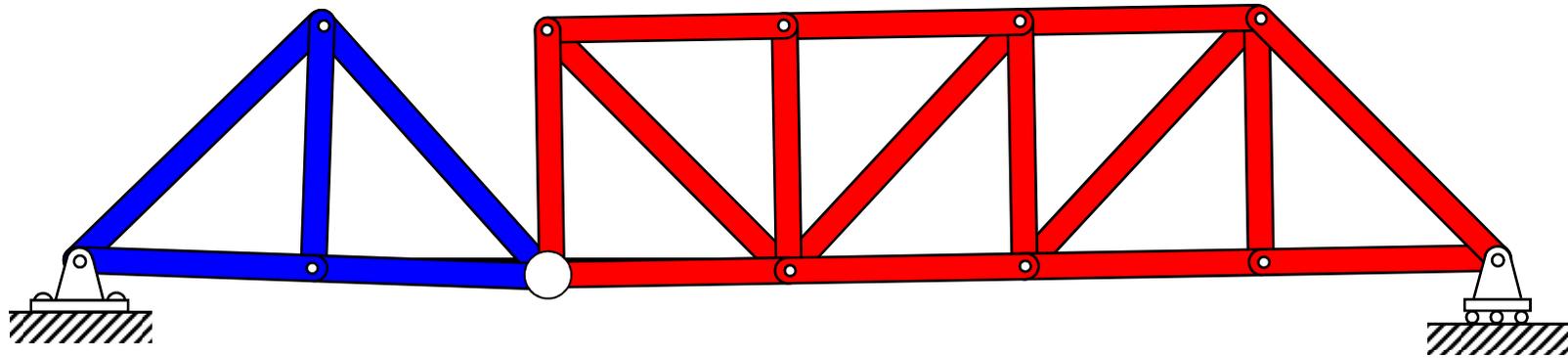
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

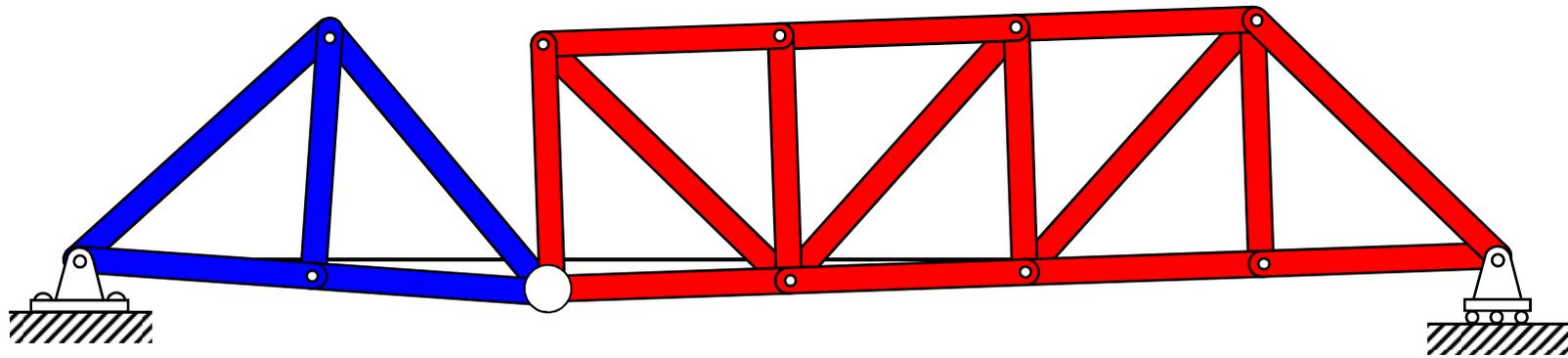
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

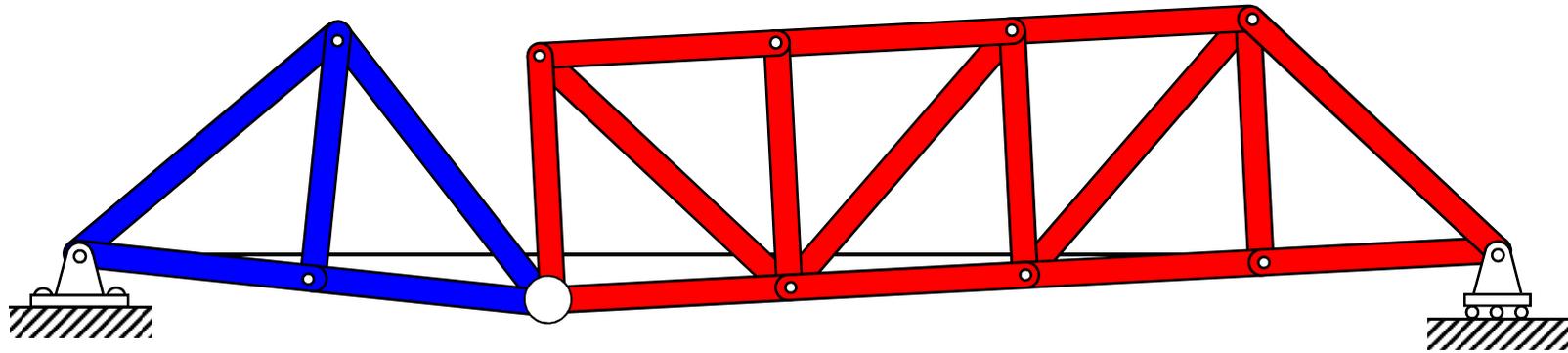
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

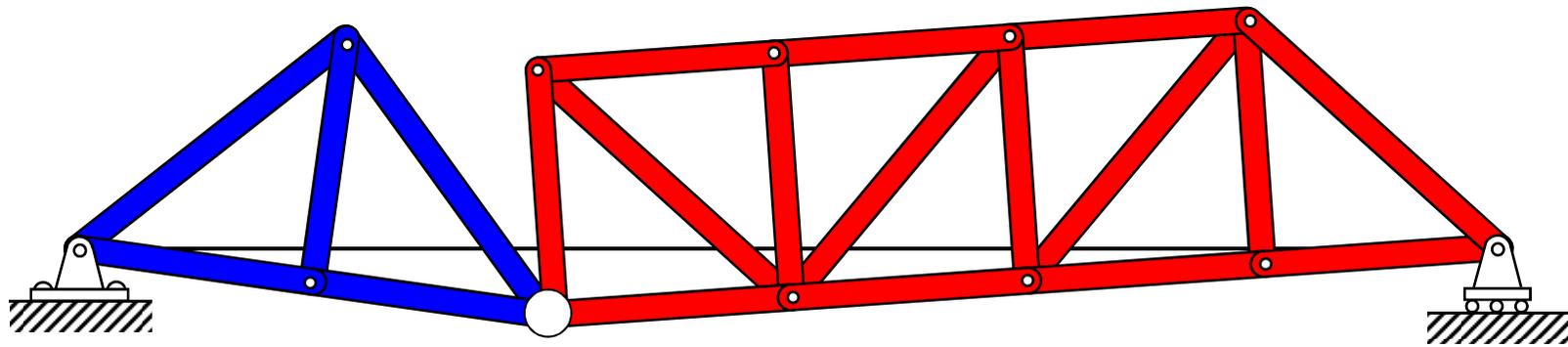
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

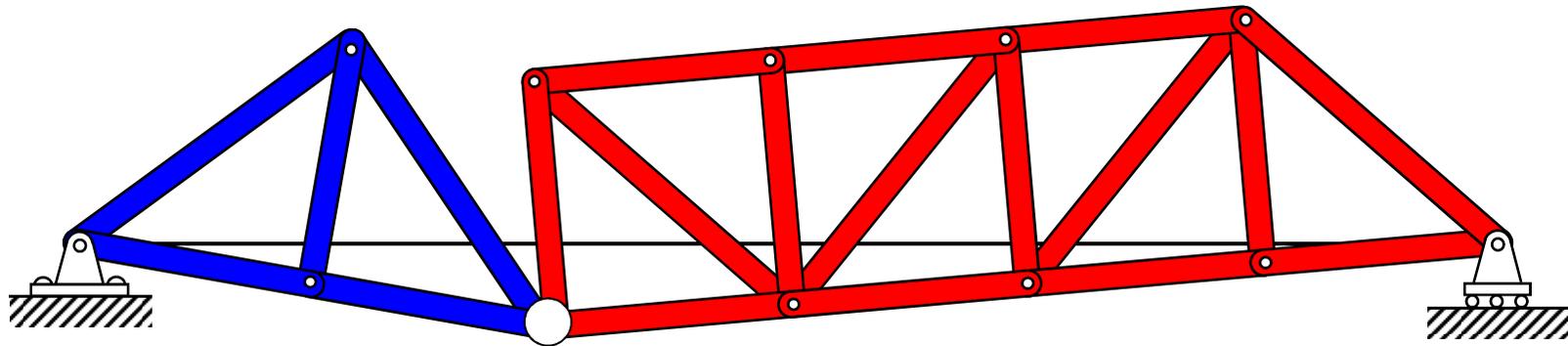
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

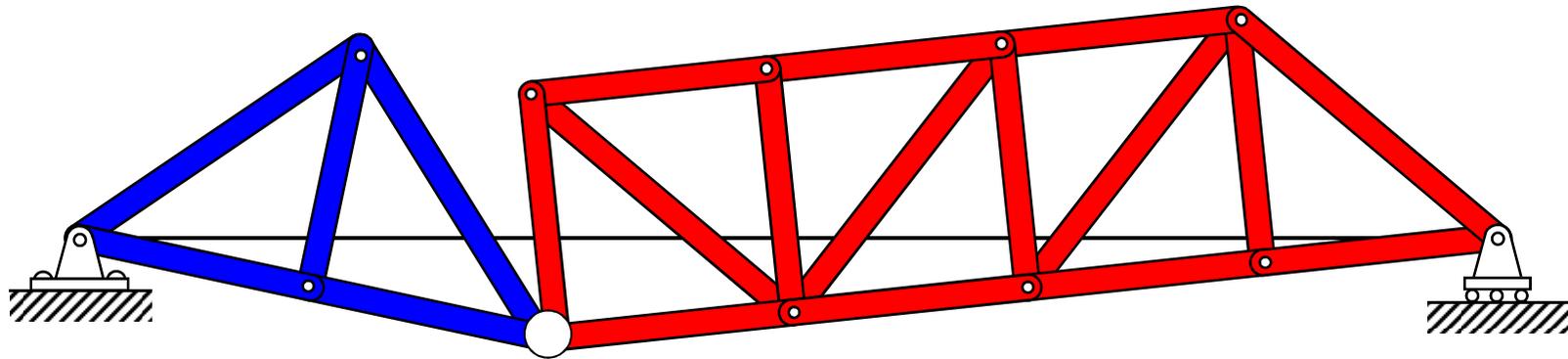
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

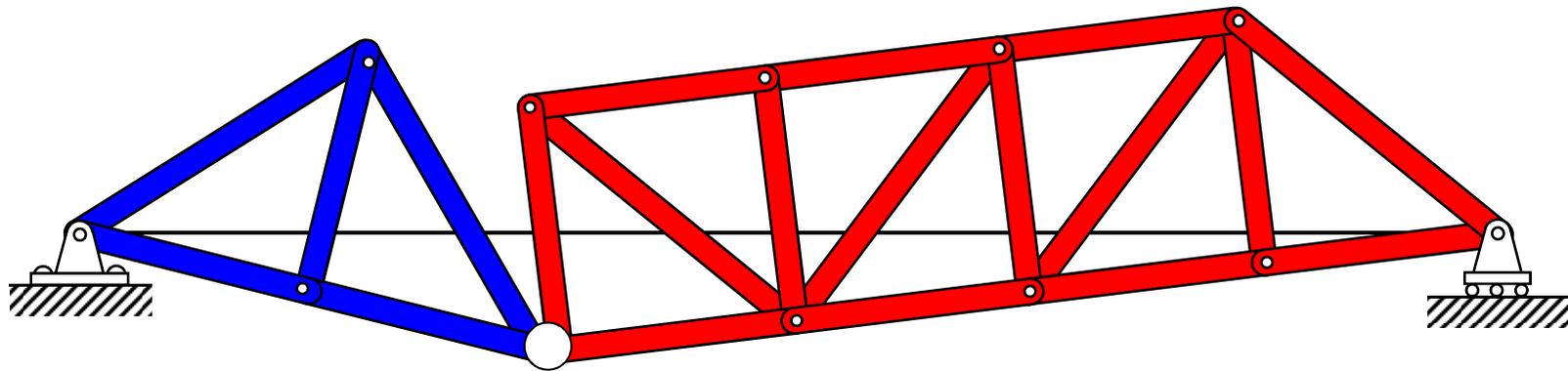
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

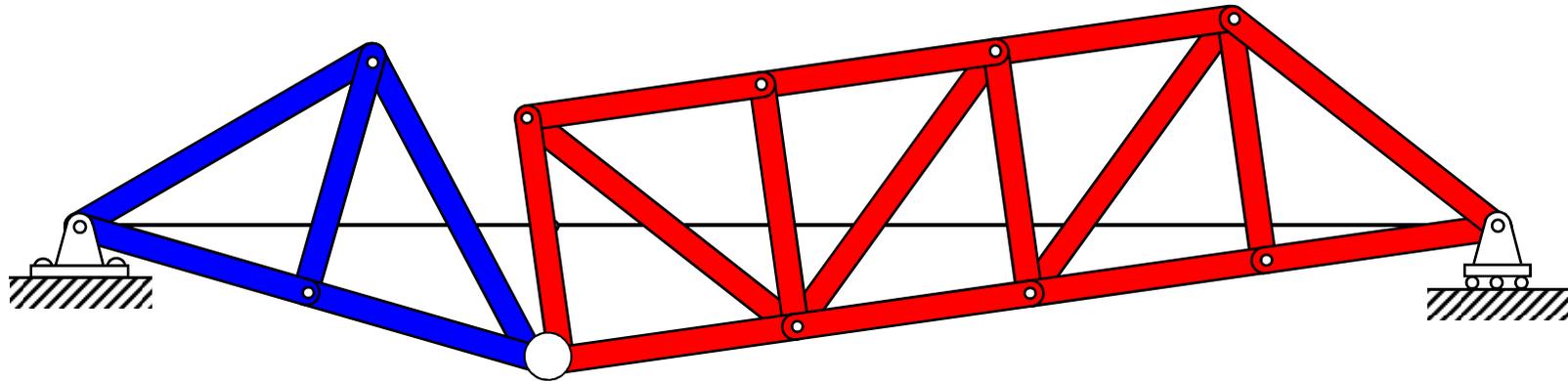
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

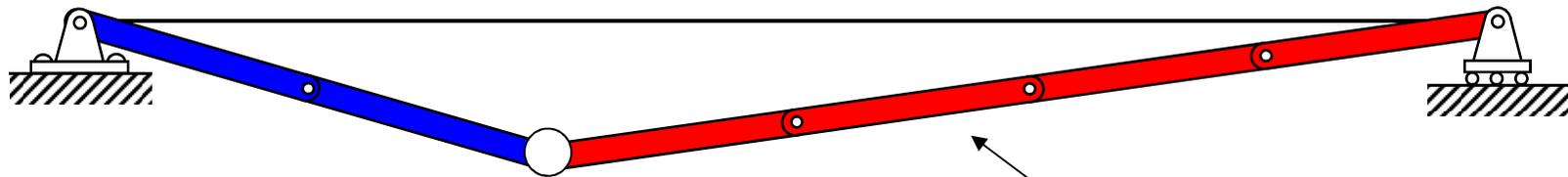
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:



*La línea de influencia
es la deformada del
cordón inferior*



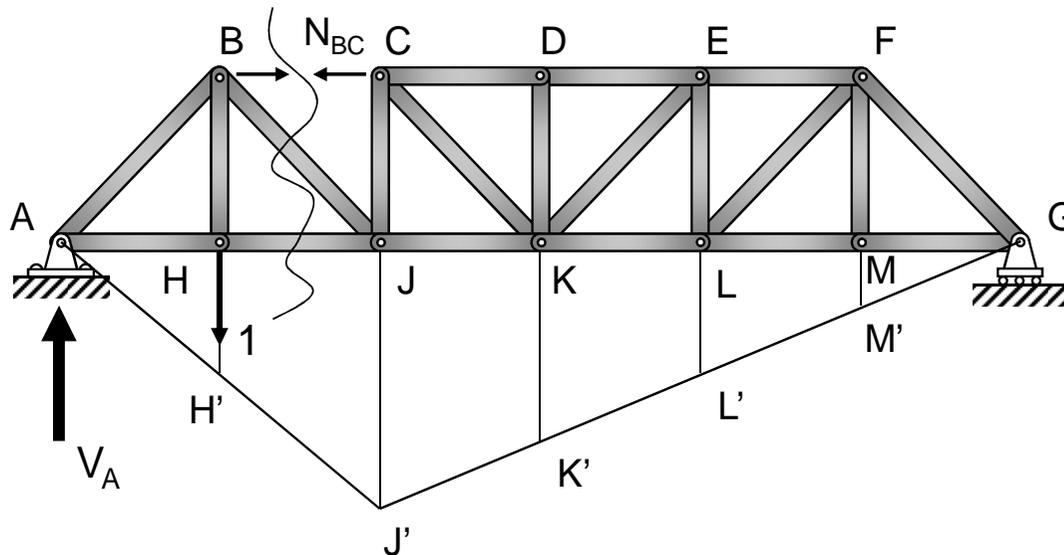
4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Para acotarla numéricamente basta con calcular un único valor, pues el resto se deduce por puras consideraciones geométricas. Y así, colocando una carga unidad en H, y suponiendo que la barra trabaja a tracción:

$$\text{Cálculo de la reacción en A: } \longrightarrow \sum M_G = 0 \Rightarrow V_A \cdot 6l = 1 \cdot 5l \Rightarrow V_A = \frac{5}{6}$$

Cálculo del esfuerzo en BC. Aplicando el método de las secciones con el corte indicado, aislando la parte izquierda AJ y tomando momentos respecto de J, resulta:

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2l + N_{BC} \cdot l - 1 \cdot l = 0 \Rightarrow N_{BC} = 1 - 2V_A = \boxed{-\frac{2}{3}}$$



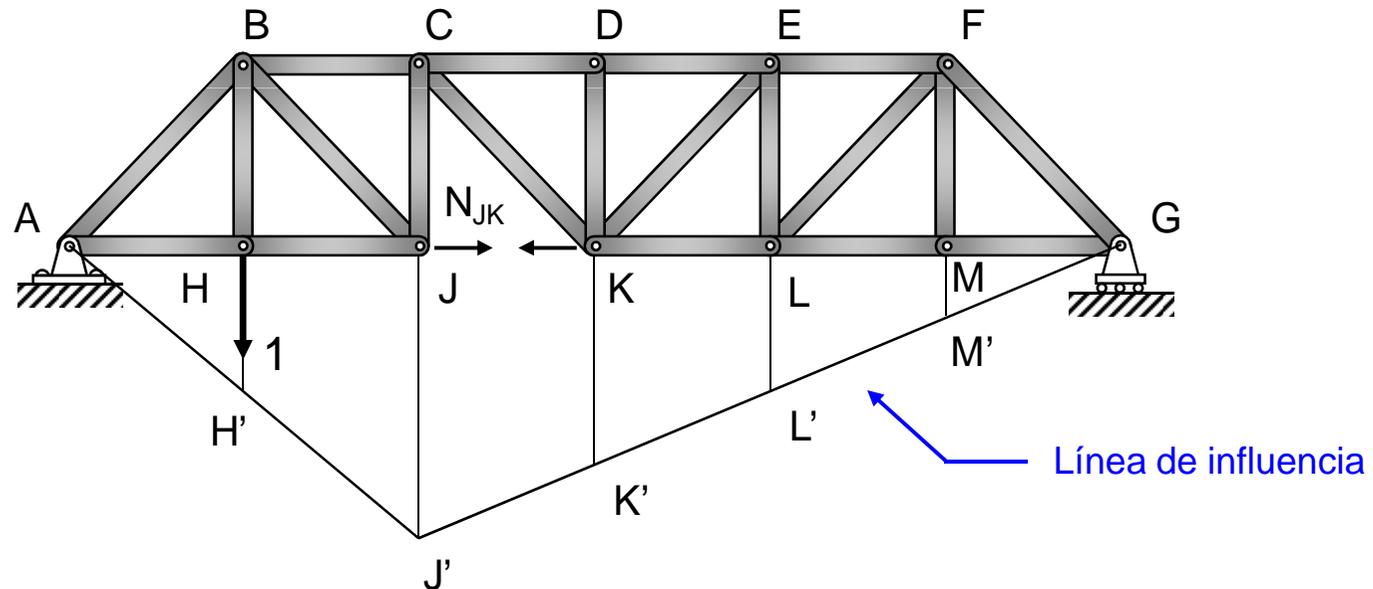
Luego la ordenada de la línea de influencia en H es $\frac{2}{3}$, y como se había supuesto que la barra trabajaba a tracción, realmente lo hace a compresión.



4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Ejemplo: Determinar la línea de influencia de la barra JK de la celosía del apartado anterior.

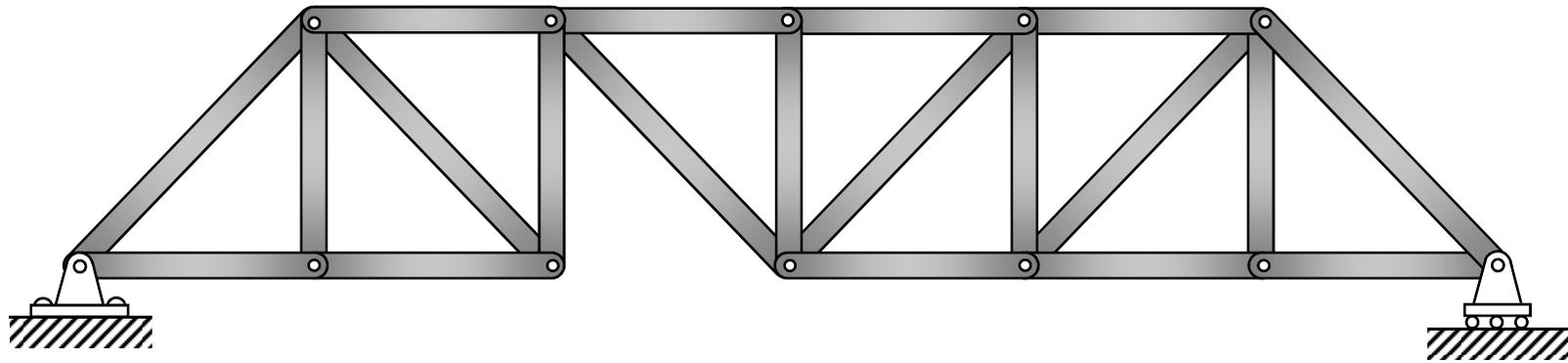
Por lo que respecta al cordón superior BC, la figura inferior muestra el mecanismo resultante de suprimir la barra BC, así como la deformada del cordón inferior al proporcionar un pequeño desplazamiento posible a este mecanismo (giro alrededor de las articulaciones A, G y J). De acuerdo con lo dicho anteriormente, la línea de influencia de BC es la línea AH'J'K'L'M'G.





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

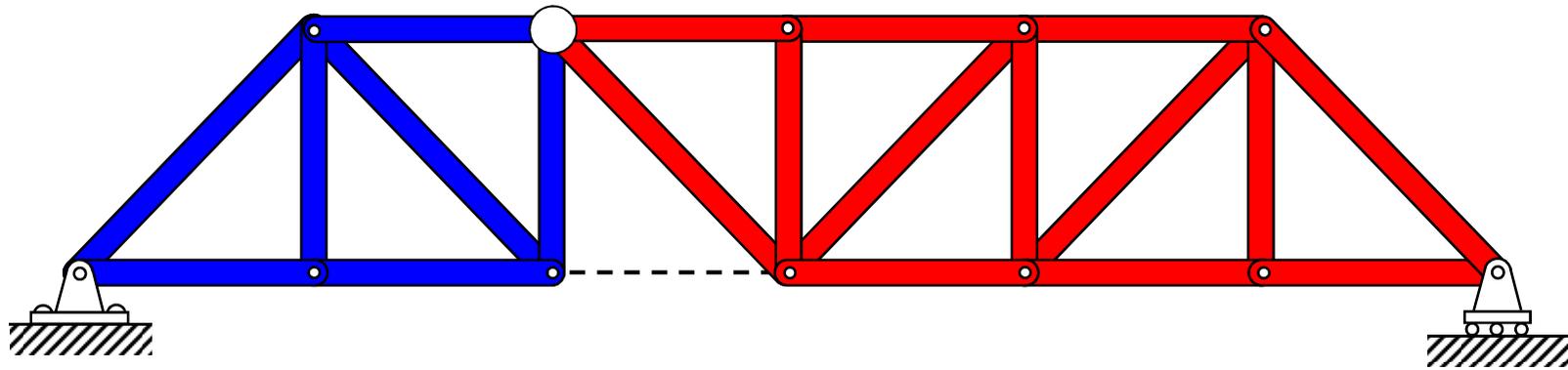
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

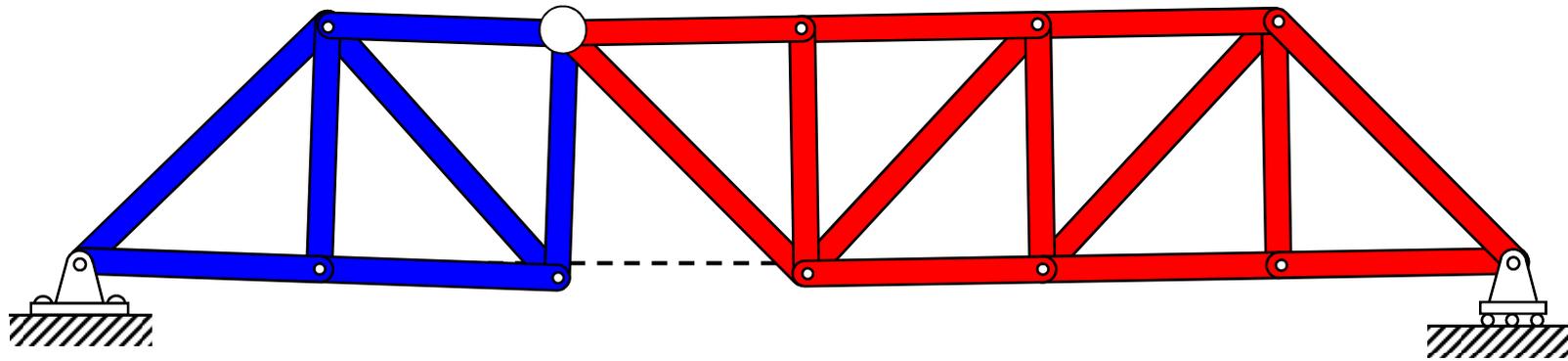
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

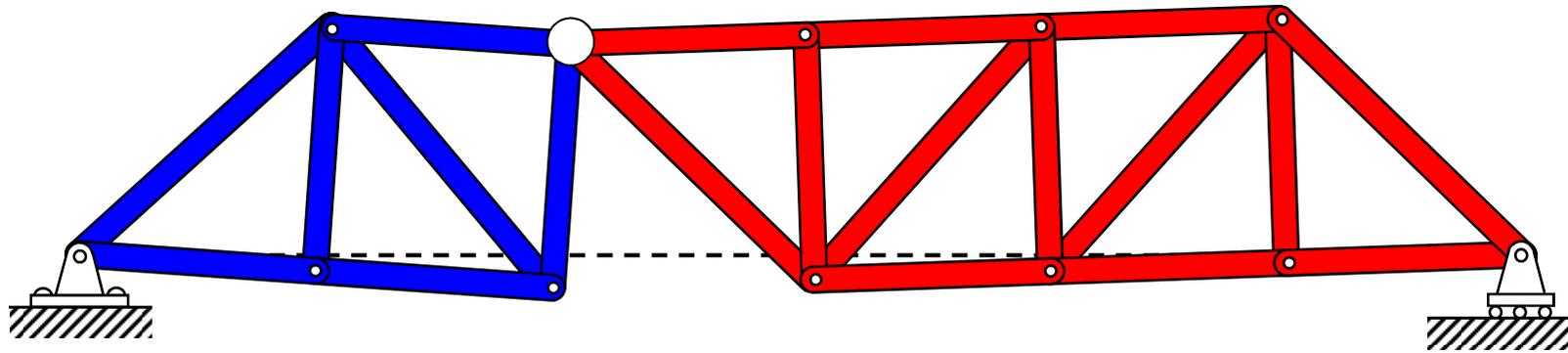
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

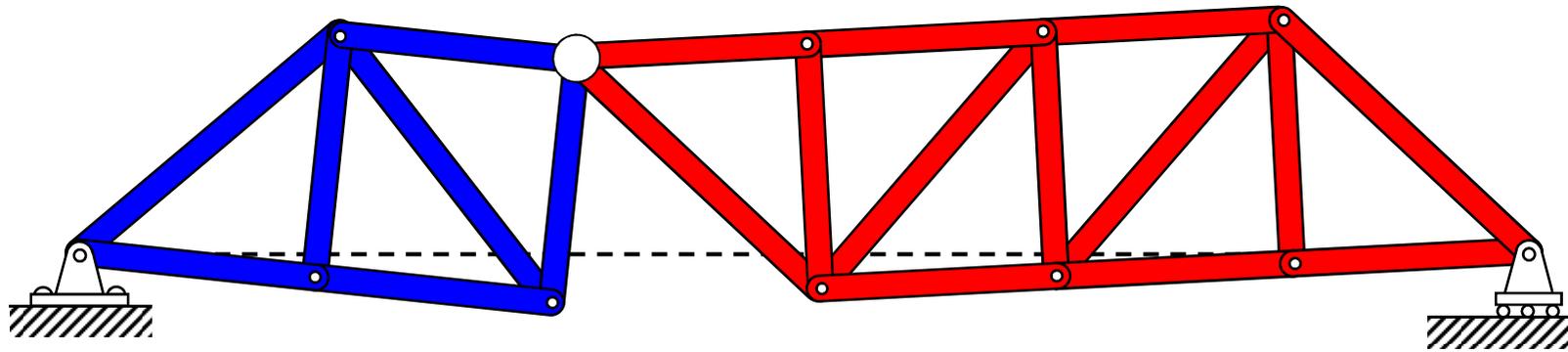
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

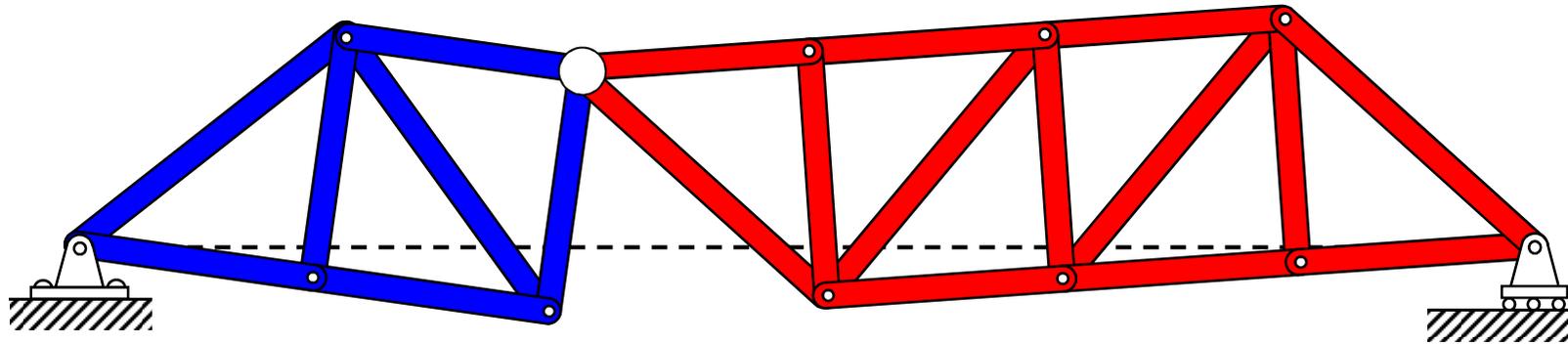
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

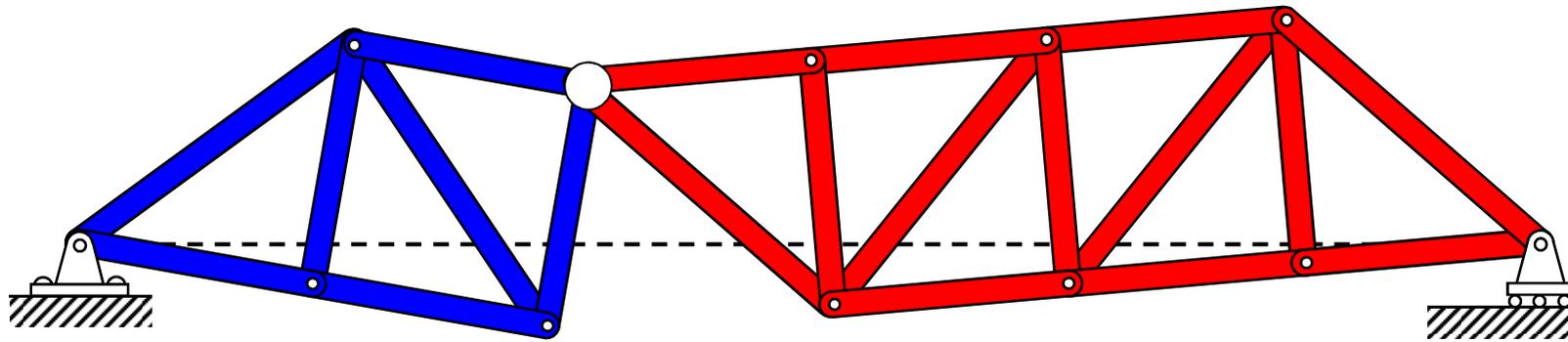
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

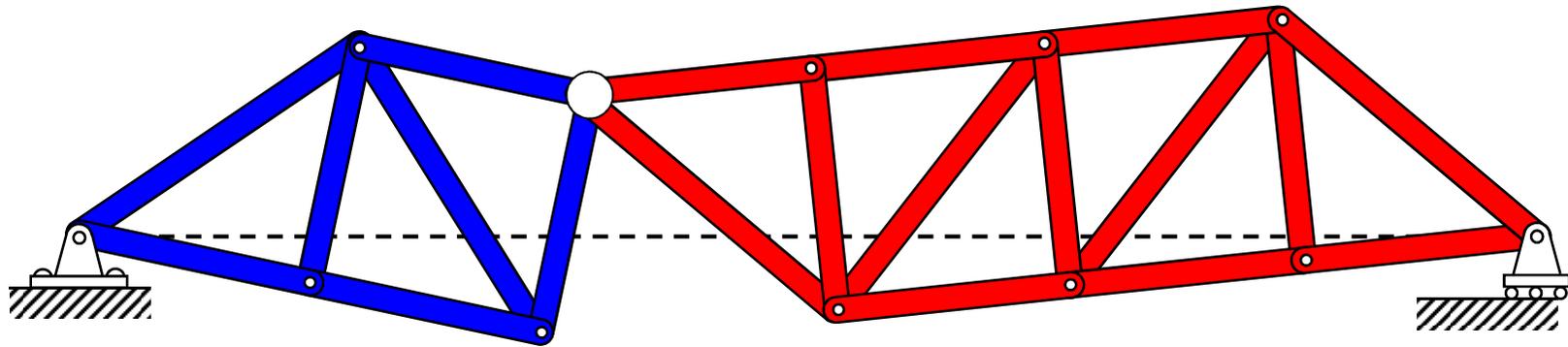
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

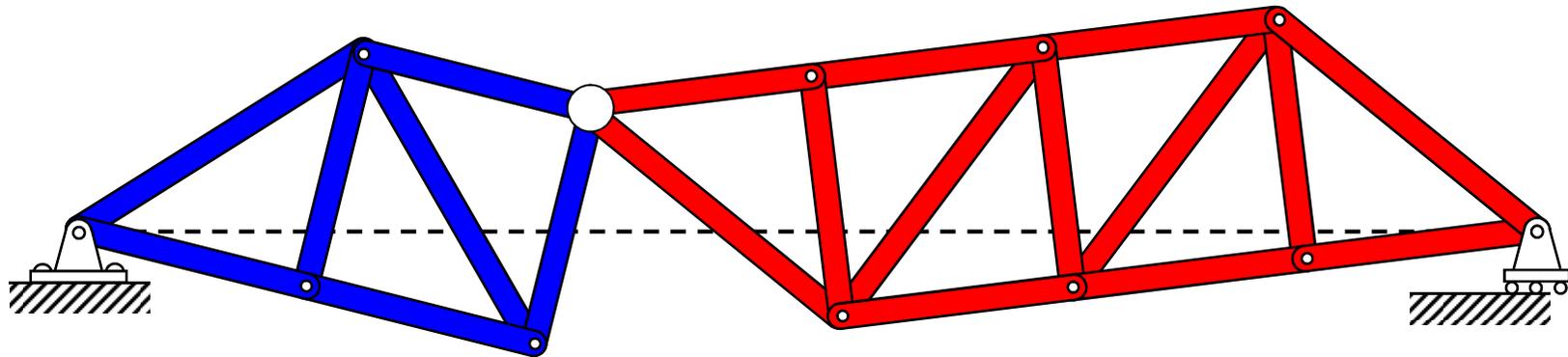
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

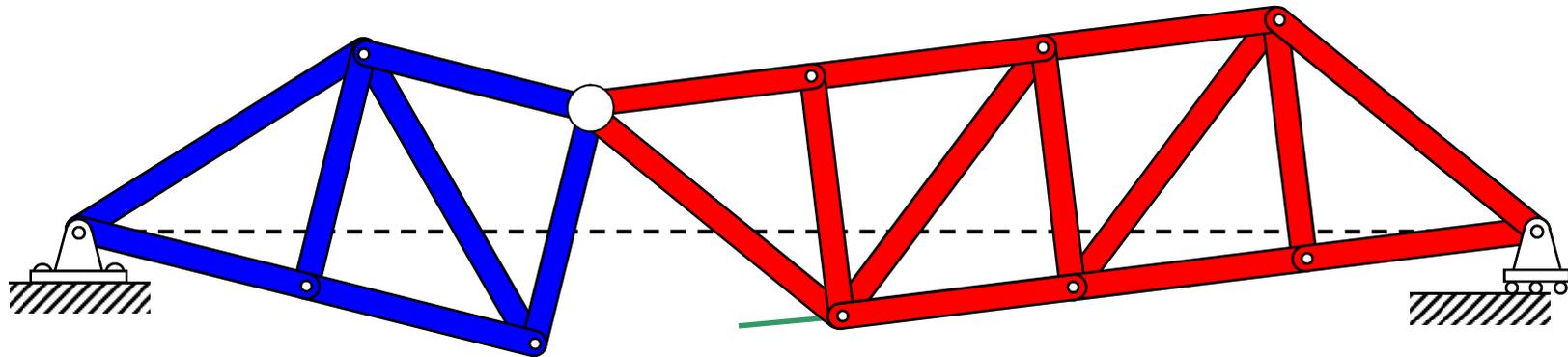
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

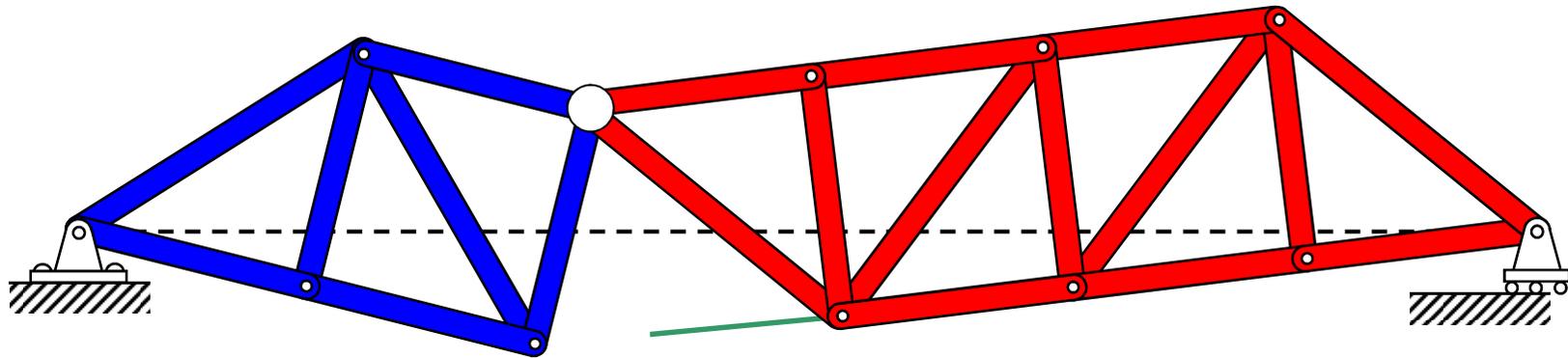
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

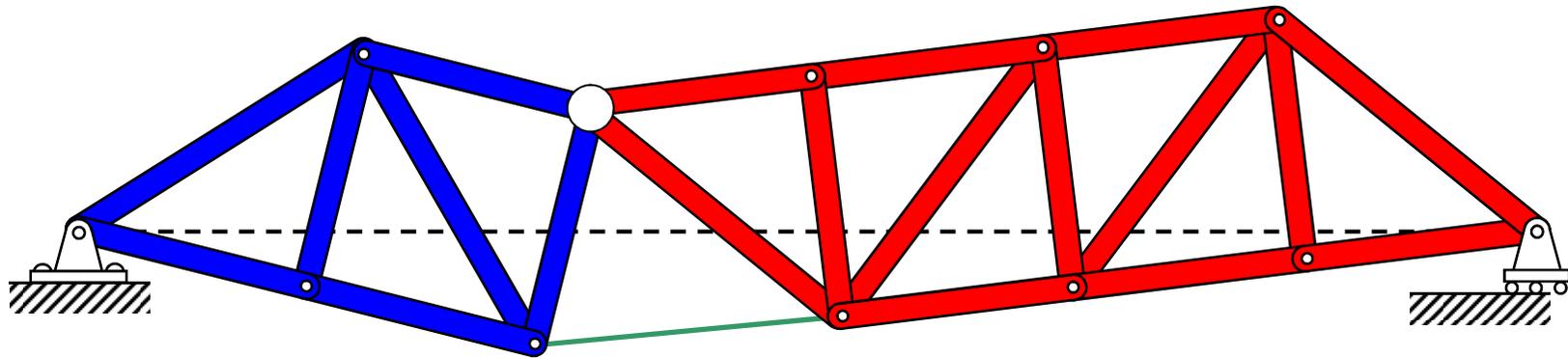
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

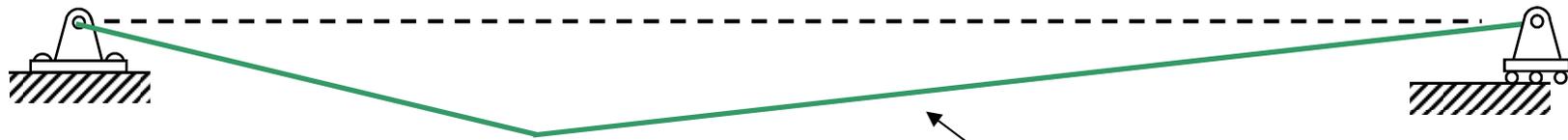
Movimiento del mecanismo:





4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:



*La línea de influencia
es la deformada del
cordón inferior*



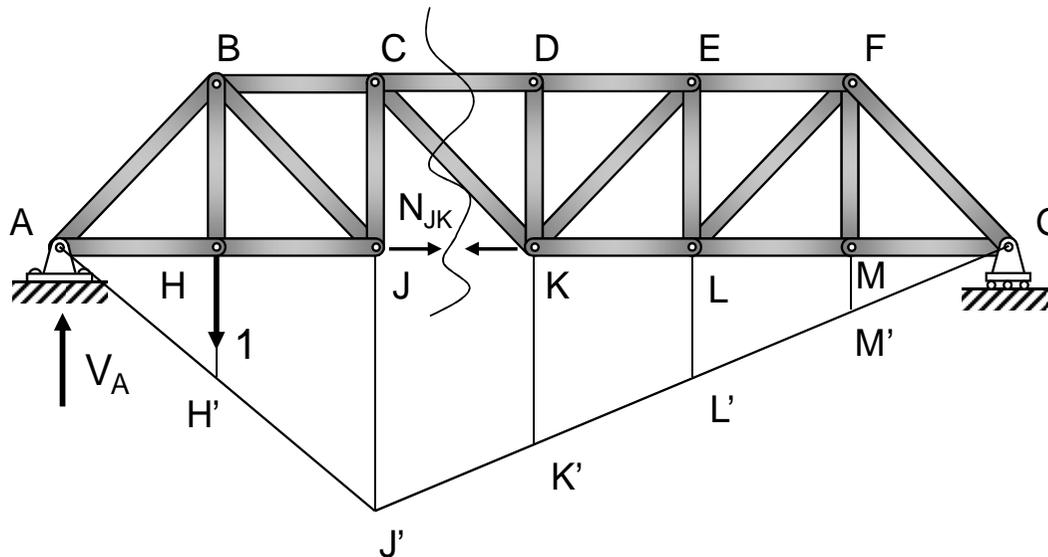
4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Para acotarla numéricamente se procede de la misma forma que en el caso anterior. Colocando una carga unidad en H, y suponiendo que la barra trabaja a tracción:

$$\text{Cálculo de la reacción en A: } \longrightarrow \sum M_G = 0 \Rightarrow V_A \cdot 6l = 1 \cdot 5l \Rightarrow V_A = \frac{5}{6}$$

Cálculo del esfuerzo en JK. Aplicando el método de las secciones con el corte indicado, aislando la parte izquierda AJ y tomando momentos respecto de C, resulta:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2l - N_{BC} \cdot l - 1 \cdot l = 0 \Rightarrow N_{BC} = 2V_A - 1 = \frac{2}{3}$$



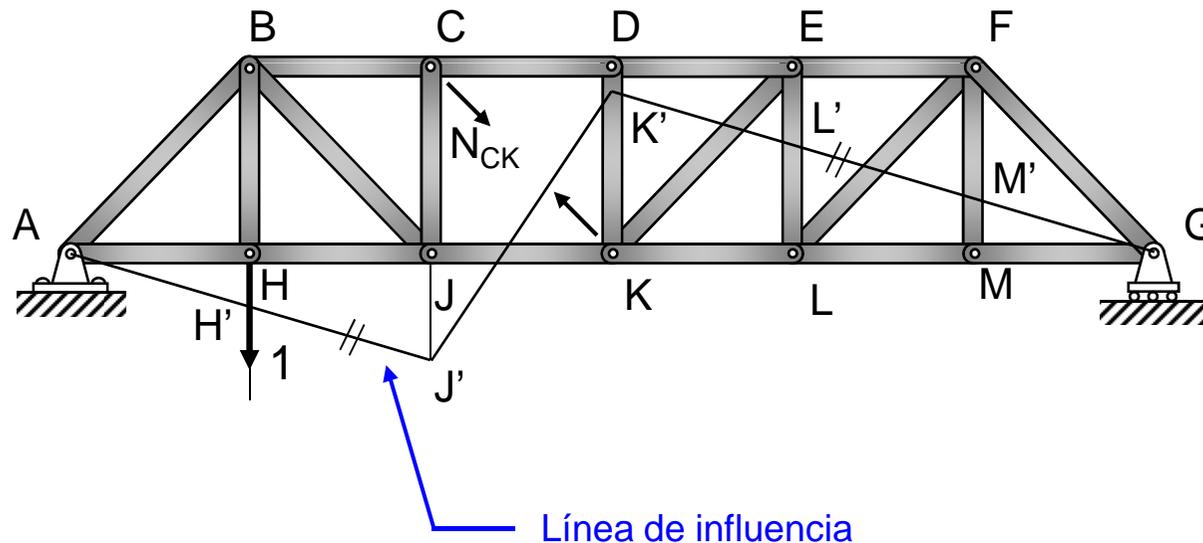
Luego la ordenada de la línea de influencia en H es $\frac{2}{3}$, y la barra trabaja a tracción.



4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Ejemplo: Determinar la línea de influencia de la barra CK de la celosía del apartado anterior.

En cuanto a la diagonal CK, la figura muestra el mecanismo resultante de suprimir esta diagonal, así como la deformada del cordón inferior al proporcionar un pequeño desplazamiento posible a este mecanismo (en este caso al suprimir la diagonal del cuadrilátero CDKJ, éste se distorsiona como un cuadrilátero articulado permaneciendo rígida la celosía a ambos lados, lo cual implica que debe girar alrededor de las articulaciones A y G exactamente el mismo ángulo). Consecuentemente, la línea de influencia de CK es la línea AH'J'K'L'M'G.

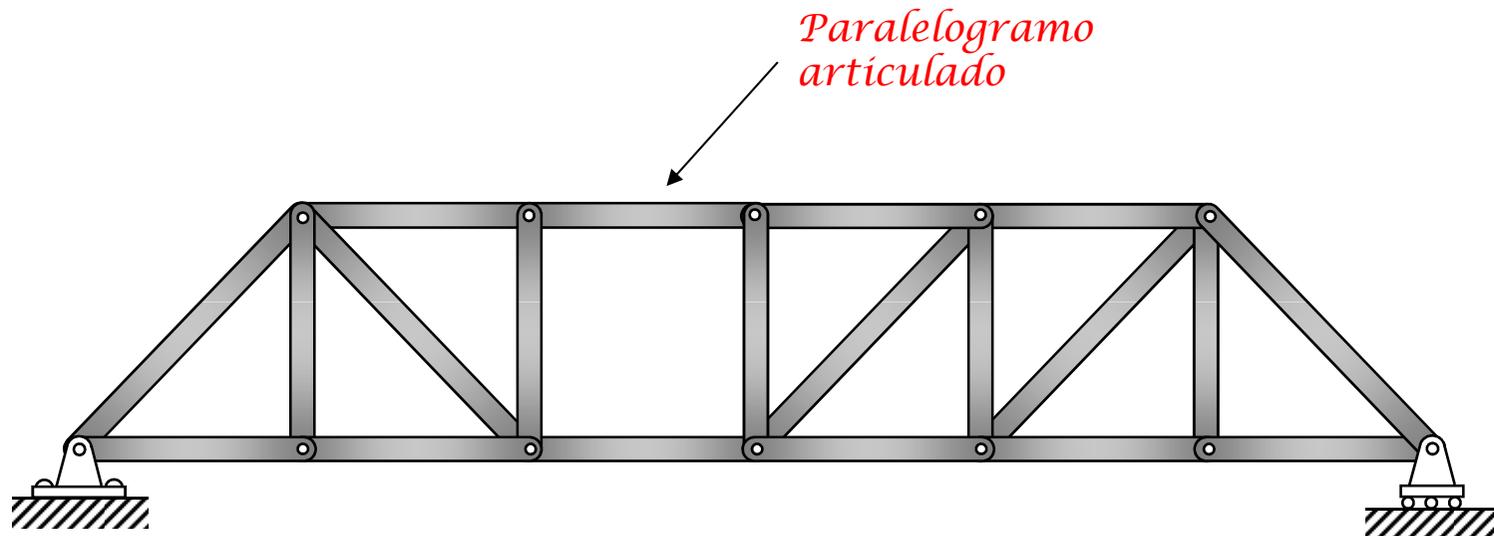




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

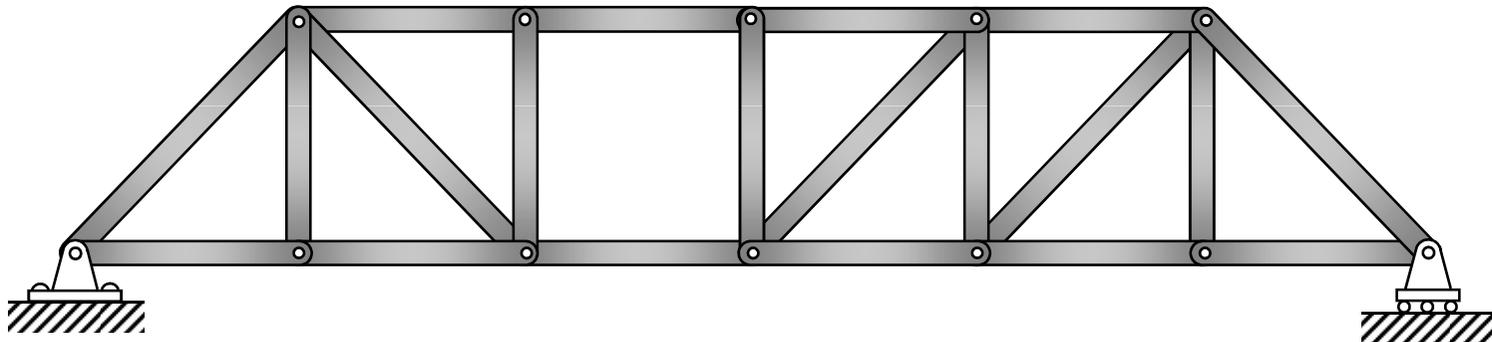




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

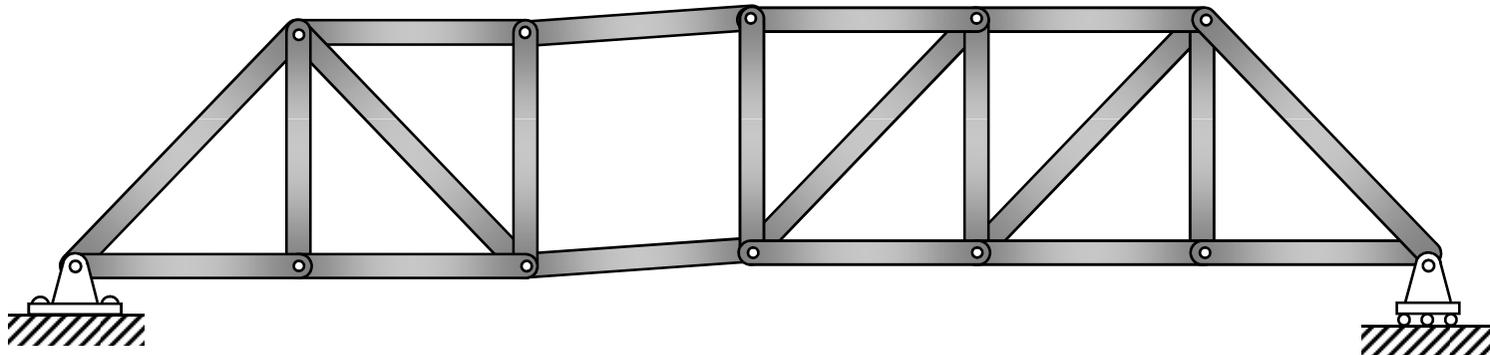




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

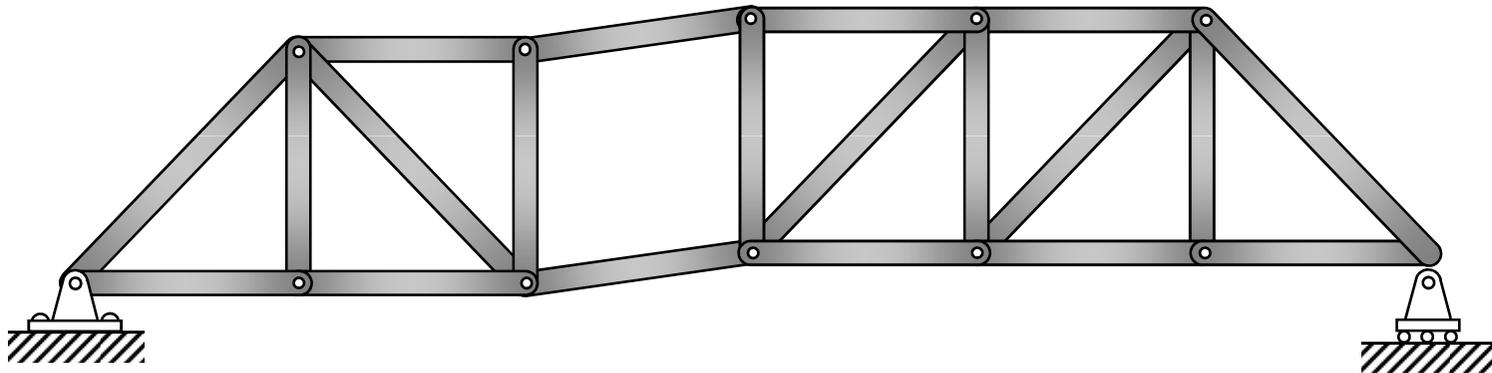




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

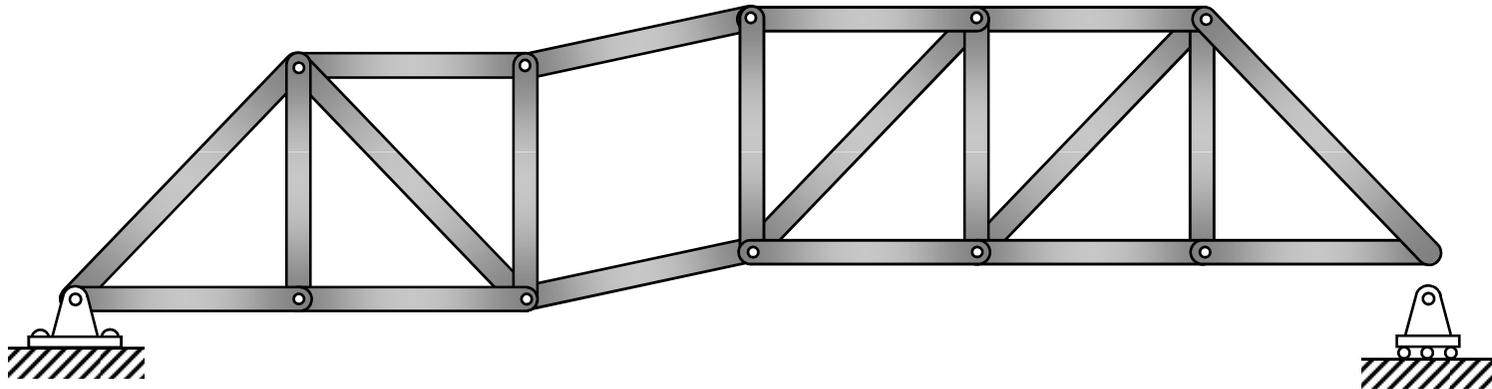
Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra



4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

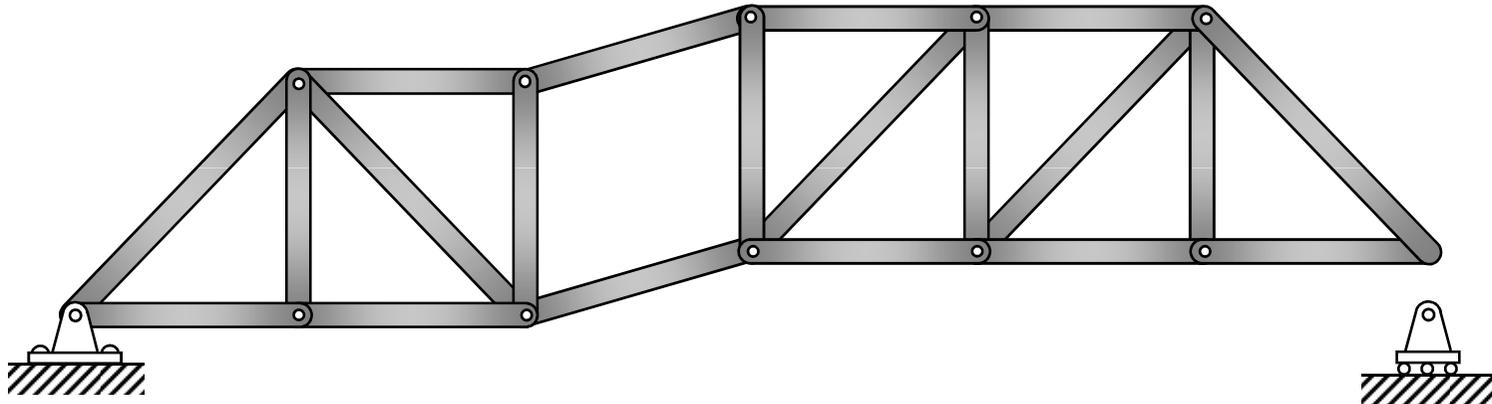




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

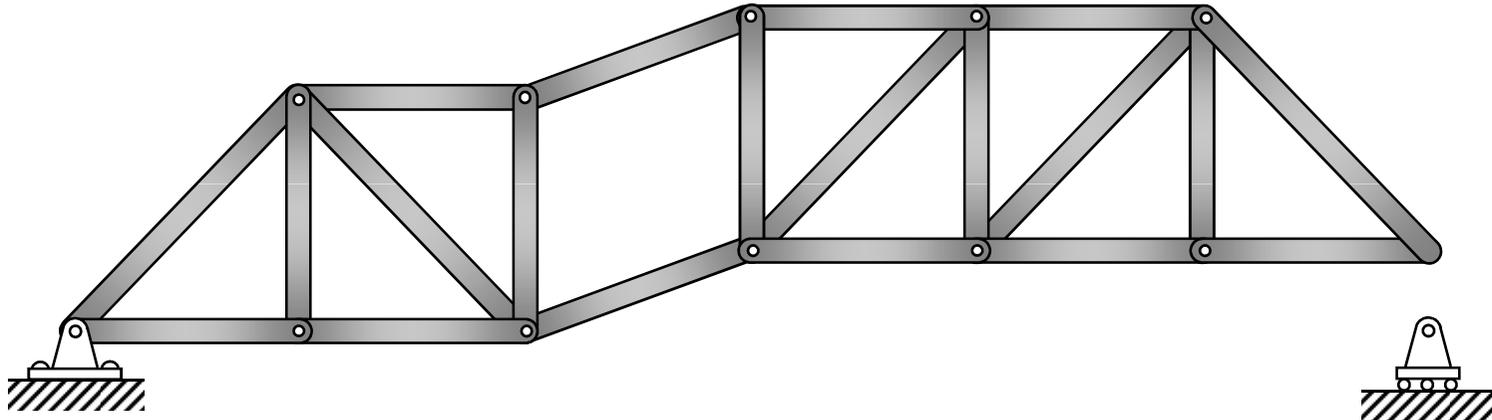




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

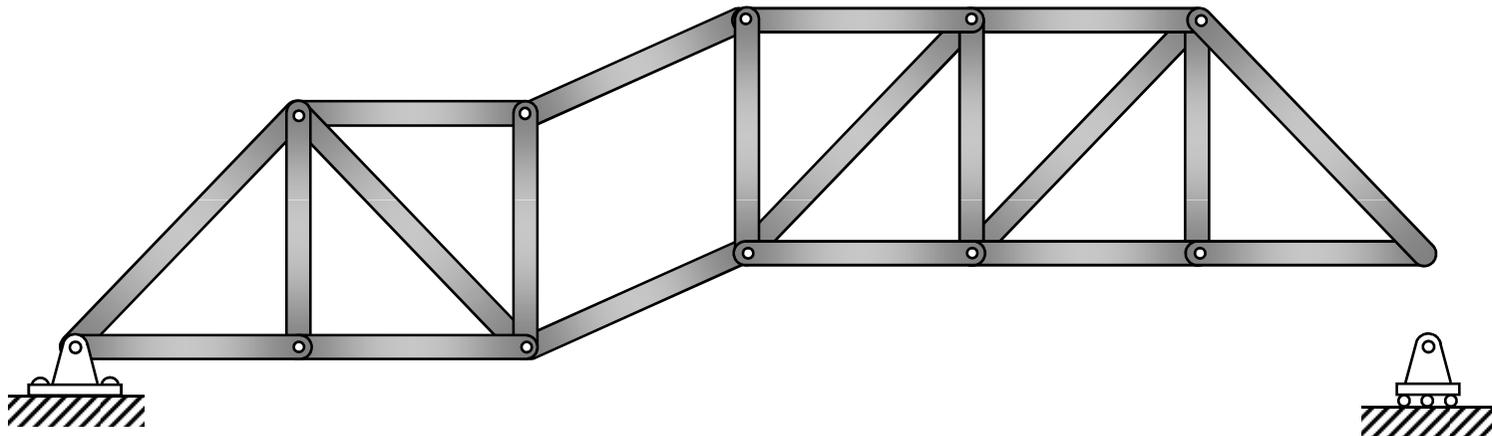




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

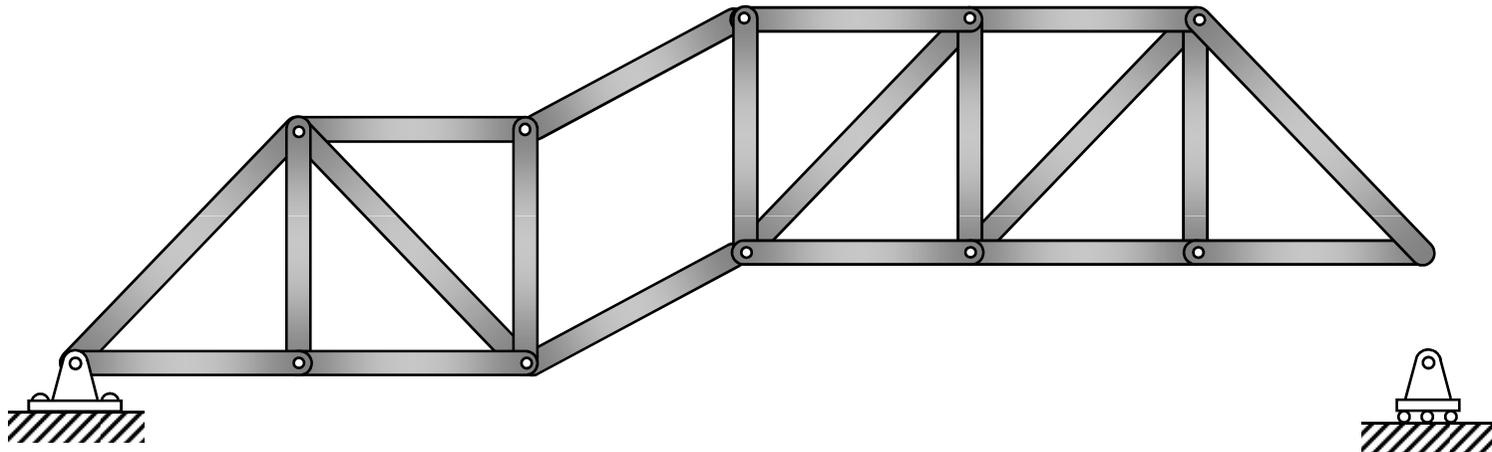




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

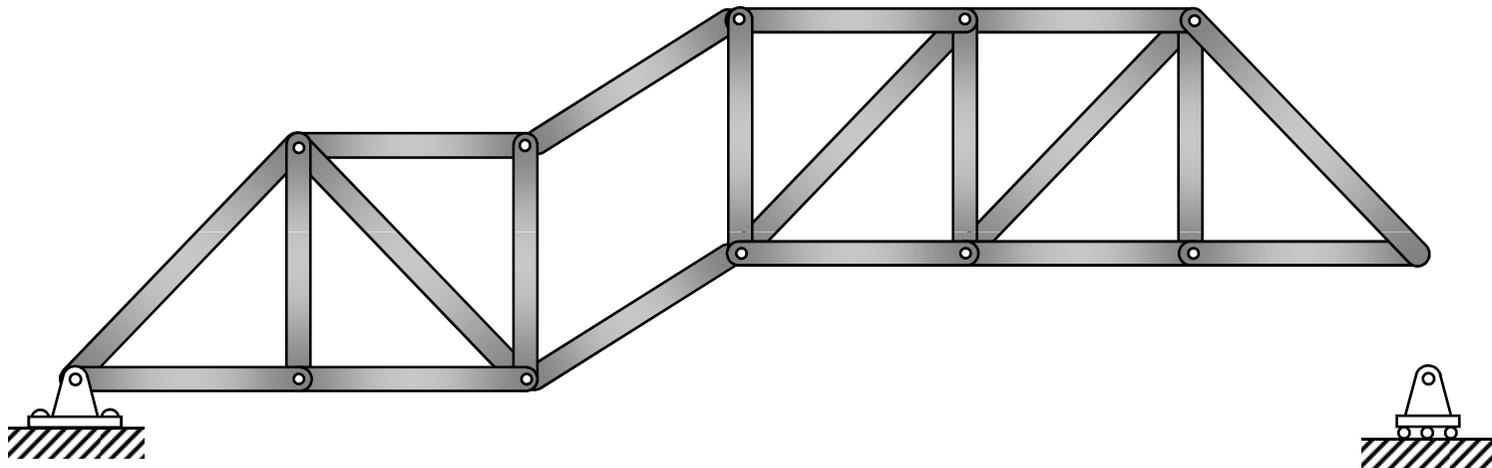




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

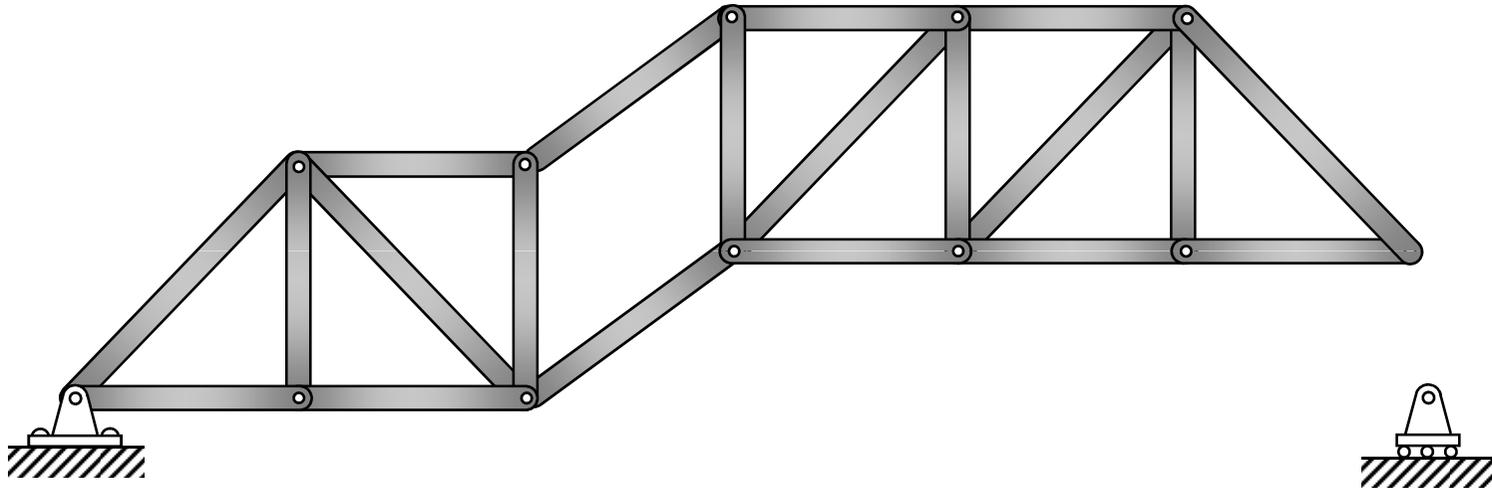




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

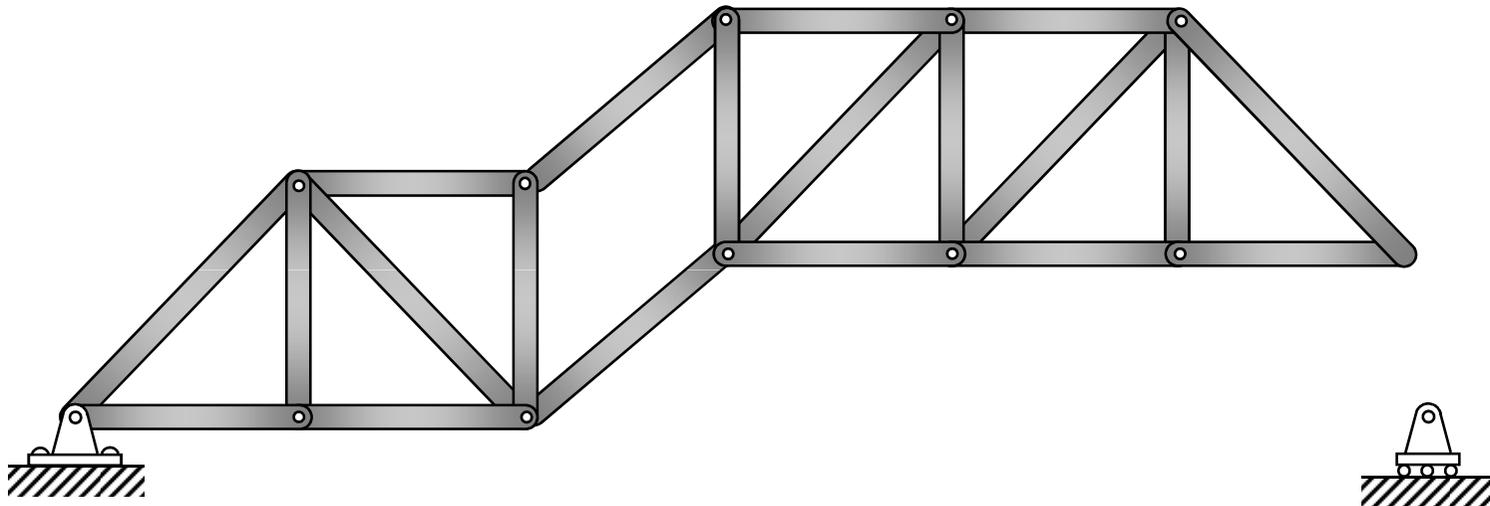




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra

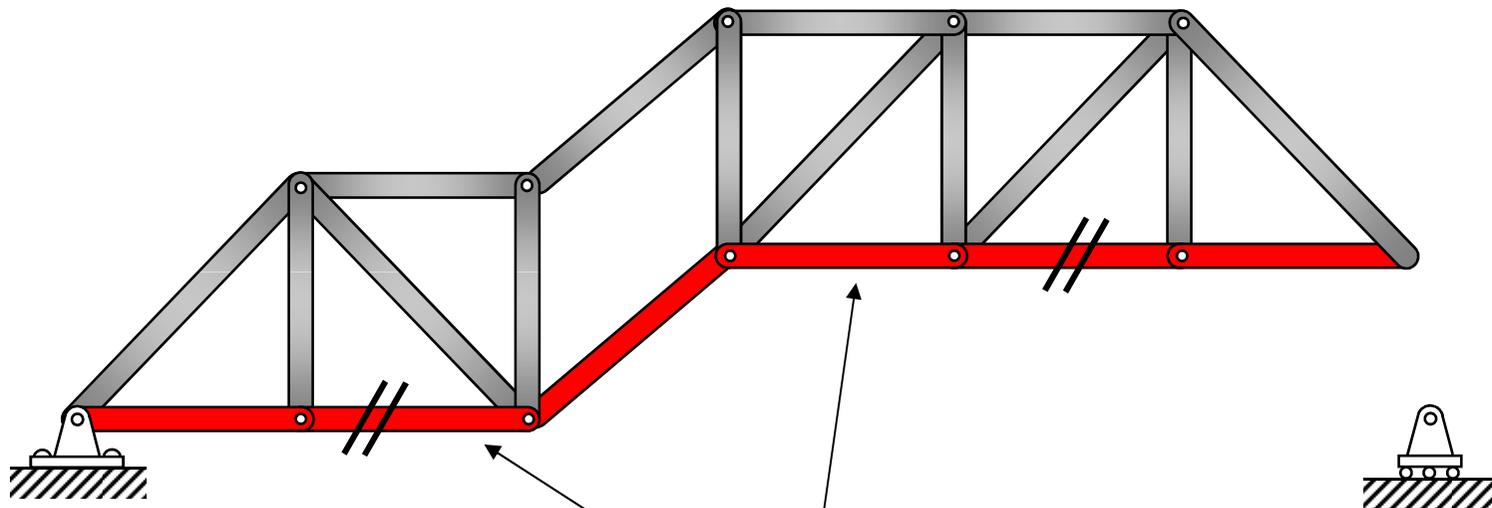




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 1: Desplazamiento relativo de una parte de la celosía respecto de la otra



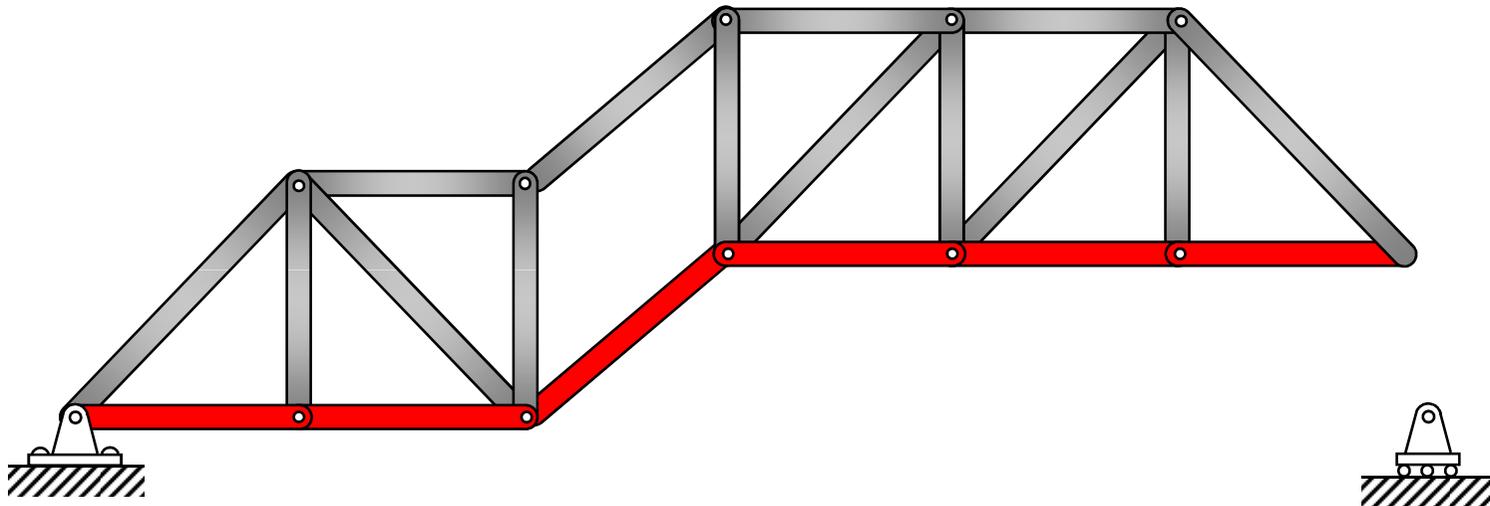
*El cordón inferior a ambos
lados del paralelogramo
articulado queda paralelo*



4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 2: Giro respecto del apoyo izquierdo para respetar condición de apoyo derecho

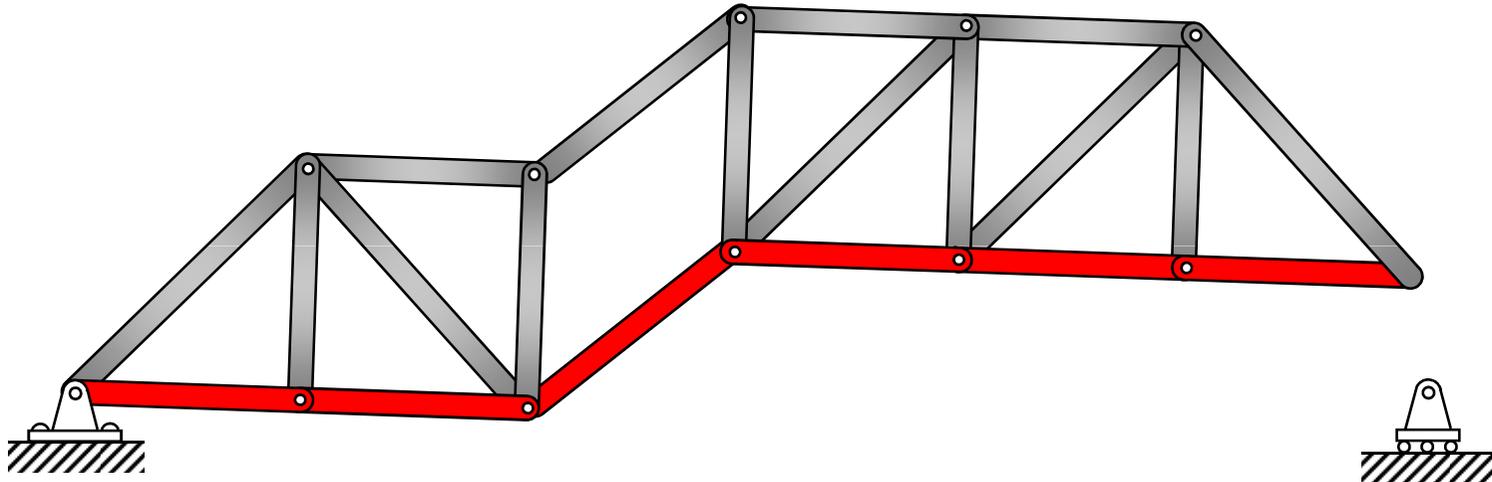




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 2: Giro respecto del apoyo izquierdo para respetar condición de apoyo derecho

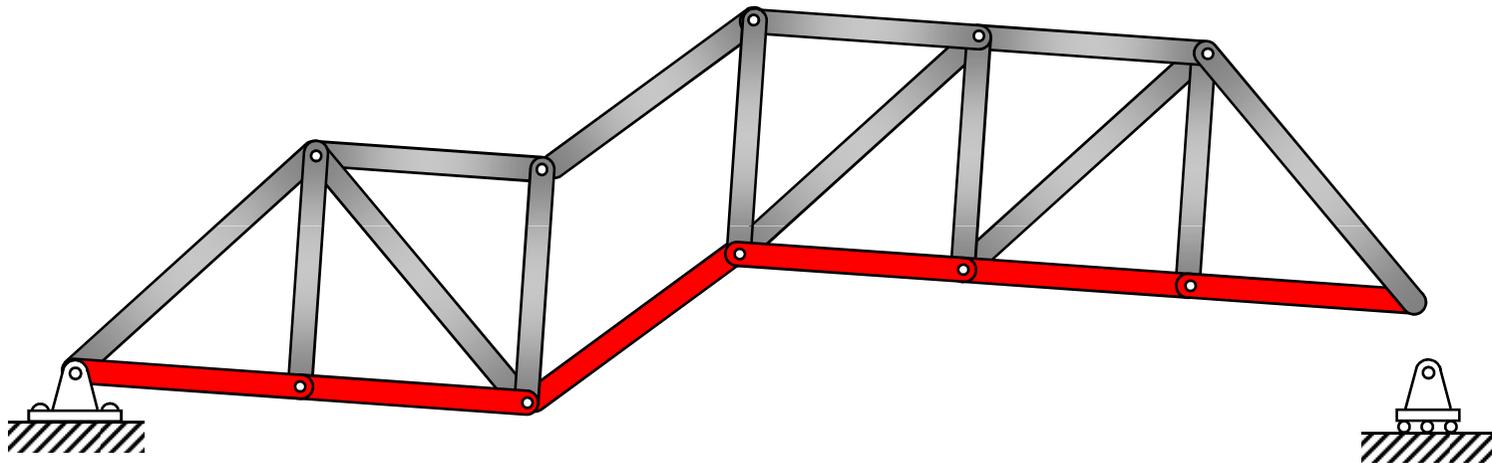




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 2: Giro respecto del apoyo izquierdo para respetar condición de apoyo derecho

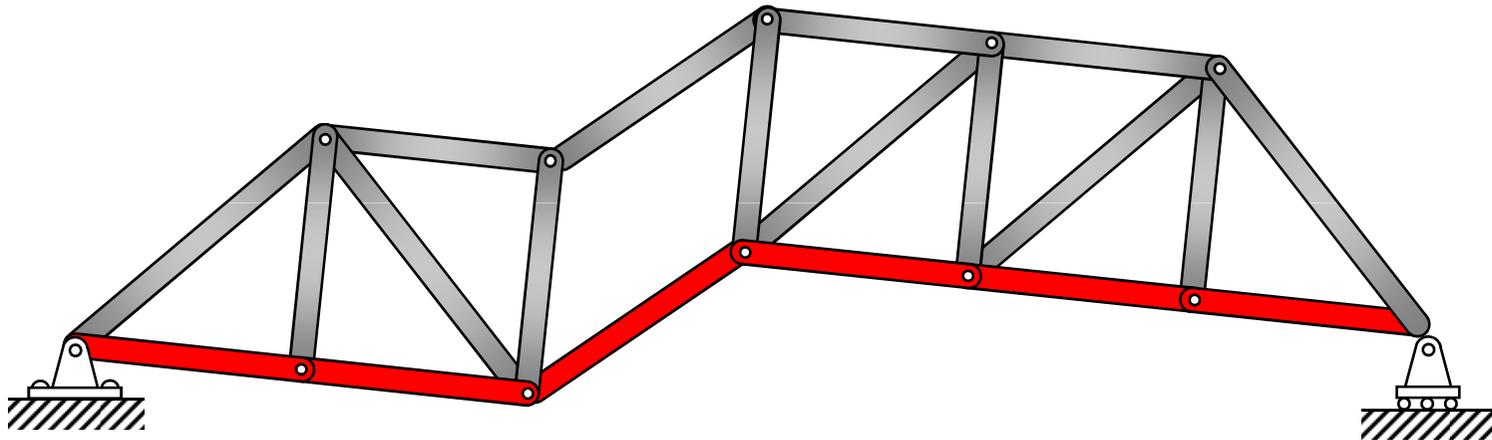




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 2: Giro respecto del apoyo izquierdo para respetar condición de apoyo derecho

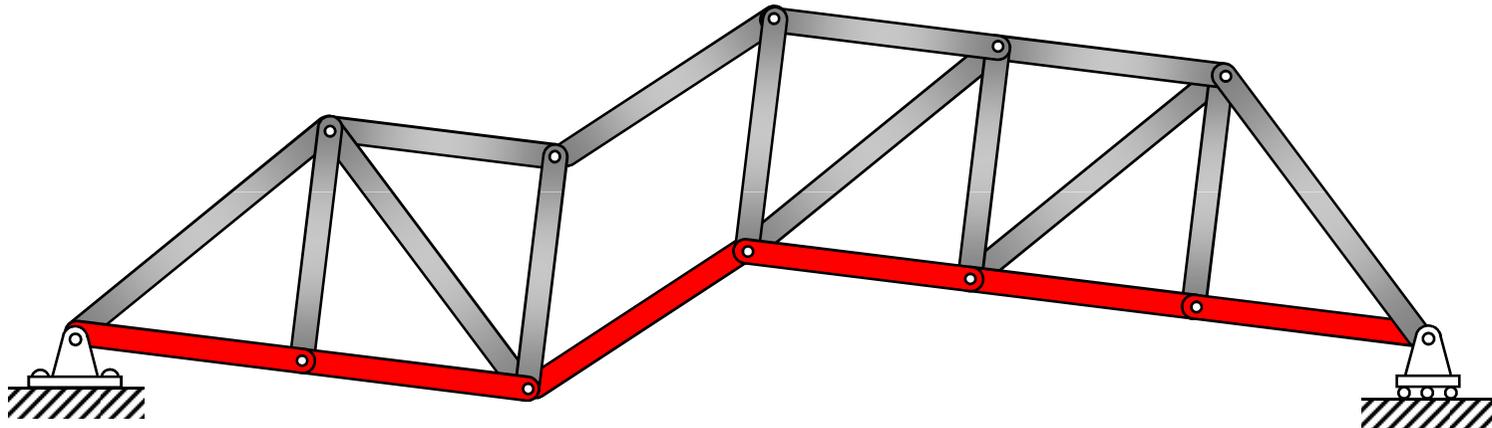




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 2: Giro respecto del apoyo izquierdo para respetar condición de apoyo derecho

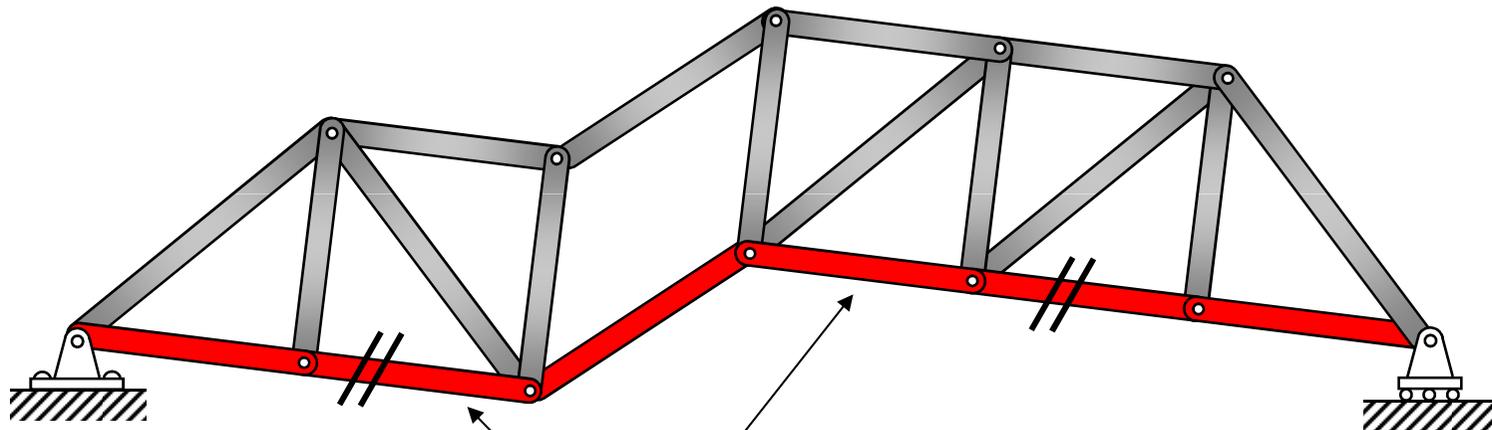




4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 2: Giro respecto del apoyo izquierdo para respetar condición de apoyo derecho



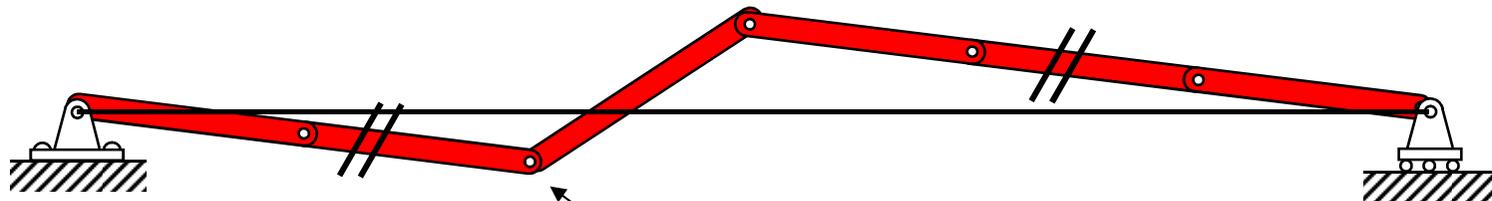
*El cordón inferior a ambos
lados del paralelogramo
articulado queda paralelo*



4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Movimiento del mecanismo:

Fase 2: Giro respecto del apoyo izquierdo para respetar condición de apoyo derecho



*La línea de influencia
es la deformada del
cordón inferior*



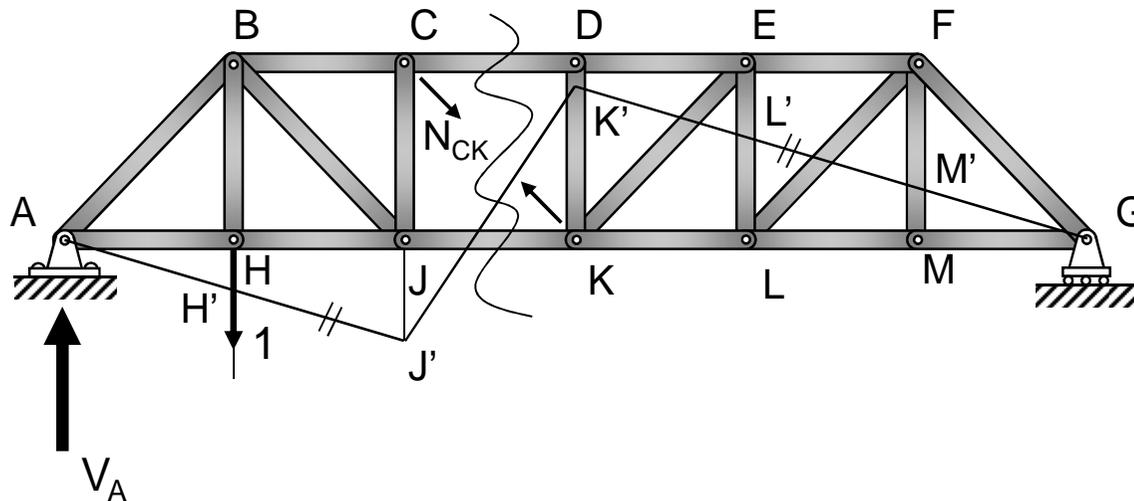
4. Líneas de influencia en celosías isostáticas

Para acotarla numéricamente se procede de la misma forma que en el caso anterior. Colocando una carga unidad en H, y suponiendo que la barra trabaja a tracción:

$$\text{Cálculo de la reacción en A: } \longrightarrow \sum M_G = 0 \Rightarrow V_A \cdot 6l = 1 \cdot 5l \Rightarrow V_A = \frac{5}{6}$$

Cálculo del esfuerzo en JK. Aplicando el método de las secciones con el corte indicado, aislando la parte izquierda y planteando el equilibrio vertical:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot N_{CK} = 0 \Rightarrow N_{CK} = \sqrt{2} \cdot (V_A - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$



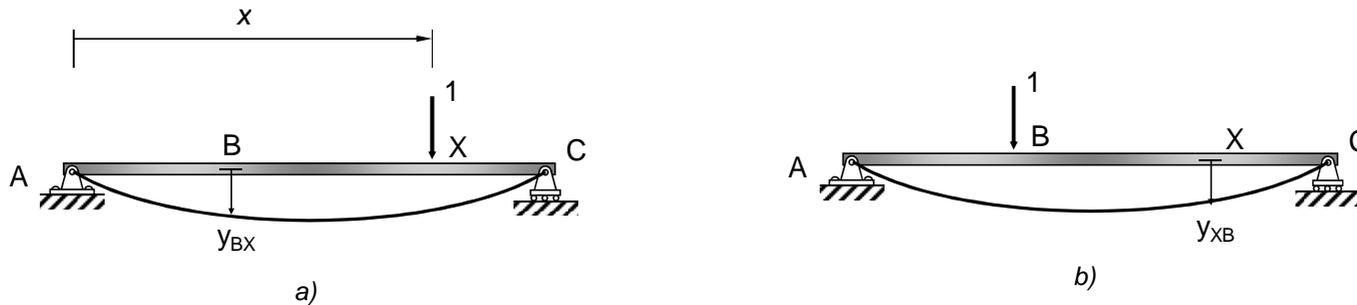
Luego este es el valor de la ordenada de la línea de influencia en H, y la barra trabaja a compresión.



5. Líneas de influencia de deformaciones

Una línea de influencia de una determinada deformación en una estructura elástica lineal representa cómo varía esa deformación a medida que una carga concentrada de valor unidad se mueve a lo largo de la misma.

Supongamos que se desea construir la línea de influencia para la deformación vertical en la sección B de la viga simplemente apoyada de la figura. Un procedimiento eficaz para construir esta línea de influencia (y por extensión, para obtener la línea de influencia de cualquier deformación, sea flecha o giro), es el basado en el Teorema de Reciprocidad de Maxwell.



Si y_{BX} es la flecha en B cuando la carga unidad está aplicada en un punto arbitrario X de la viga, entonces y_{BX} representa, por definición de línea de influencia, la ordenada en X de la línea de influencia de la flecha en B.



5. Líneas de influencia de deformaciones

Considérese ahora la carga unidad colocada en B, como se muestra en la figura de la derecha, y sea Y_{XB} el valor de la flecha en X para esta carga unidad en B. Según el Teorema de Reciprocidad de Maxwell, ha de cumplirse:

$$y_{XB} = y_{BX}$$

Esto quiere decir que la flecha en X debida a una carga unidad en B (Y_{XB}) también representa la ordenada en X de la línea de influencia representativa de la flecha en B. Y, puesto que el punto X se ha elegido de forma totalmente arbitraria, se concluye que:

La curva elástica (deformada) de una estructura elástica lineal debida a la carga unidad aplicada en un punto representa la línea de influencia de la flecha en el punto donde la carga unitaria está aplicada.

Por consiguiente, para obtener la línea de influencia de una deformación en un punto de una estructura, basta con colocar en ese punto la carga unidad en la dirección de la deformación cuya línea de influencia se busca, y determinar la curva elástica de la estructura por cualquiera de los procedimientos conocidos.

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 3: *LÍNEAS DE INFLUENCIA EN ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU

