
TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 2: *CELOSÍAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU





1. Introducción

Una celosía es una estructura formada por barras rectas unidas entre sí por medio de articulaciones, tal que al estar sometida a fuerzas exteriores sus barras trabajan exclusivamente a esfuerzo axial.

El modelo estructural idealizado que se emplea para el estudio de una celosía se basa en las siguientes **suposiciones**:

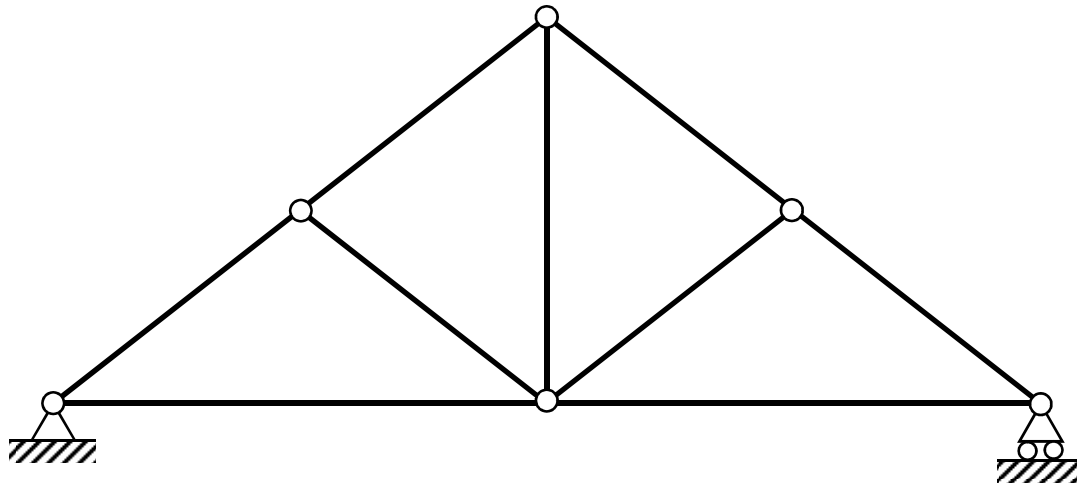
- a) Las barras se unen entre sí en un extremo mediante uniones que sólo transmiten fuerzas y no pueden transmitir ningún tipo de momento: articulaciones en el caso plano y rótulas esféricas en el caso espacial, tanto unas como otras sin fricción.
- b) El eje centroidal de cada barra es recto, y coincide con la línea que une los centros de las articulaciones de cada extremo de la barra.
- c) La sección transversal de cada barra tiene un área despreciable frente a su longitud.
- d) Las fuerzas están aplicadas en los nudos, y nunca sobre las barras. Esto obliga a sustituir el peso propio de las barras por fuerzas aplicadas en los nudos extremos de las mismas.



1. Introducción

Se tiene una **celosía plana** si cumple las condiciones siguientes:

- Todos los ejes centroidales de las barras están contenidos en un mismo plano que es el plano de la estructura. Normalmente éste se toma como el plano XY .
- Todas las fuerzas aplicadas y las reacciones en los apoyos están contenidas en el plano de la estructura.
- En consecuencia, los desplazamientos de los nudos tienen lugar en el plano de la estructura.



Idealización de una celosía plana



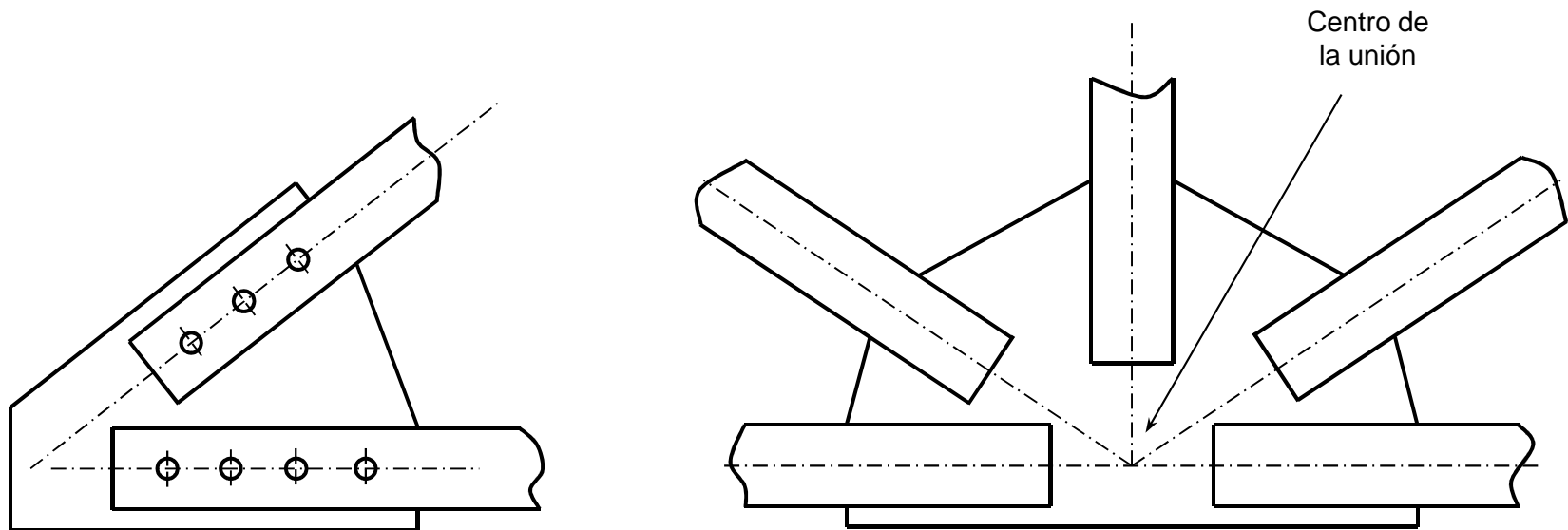
1. Introducción

En las figuras se muestra la forma en que se materializan en la práctica las **uniones** entre las barras.

No se trata de articulaciones perfectas.

En la mayoría de los casos estas uniones se forman uniendo mediante tornillos o soldadura los extremos de las barras a una placa común.

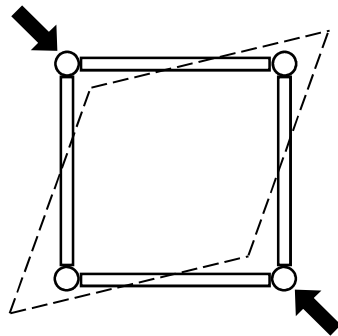
Los cálculos basados en las hipótesis anteriormente enumeradas, dan lugar a resultados que pueden considerarse suficientemente fiables para el diseño.





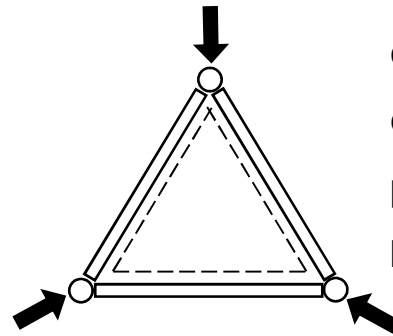
1. Introducción

El principio que subyace en la utilización de las celosías como estructuras capaces de soportar carga, es el hecho de que la **configuración de barras rectas articuladas en los extremos en una forma triangular, es una configuración estable.**



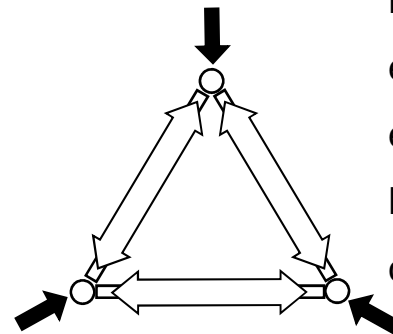
Configuración inestable

Mecanismo que experimenta movimientos de sólido rígido



Configuración estable

Cualquier cambio de forma que experimente como consecuencia de la aplicación de las cargas exteriores, está directamente asociada con las pequeñas deformaciones longitudinales de las barras que la componen.



Fuerzas en los miembros

Las fuerzas exteriores dan lugar exclusivamente a esfuerzos axiales (de tracción o compresión) en los elementos de esa estructura triangulada estable. Nunca trabajarán a flexión en tanto en cuanto las cargas exteriores estén aplicadas en los nudos.

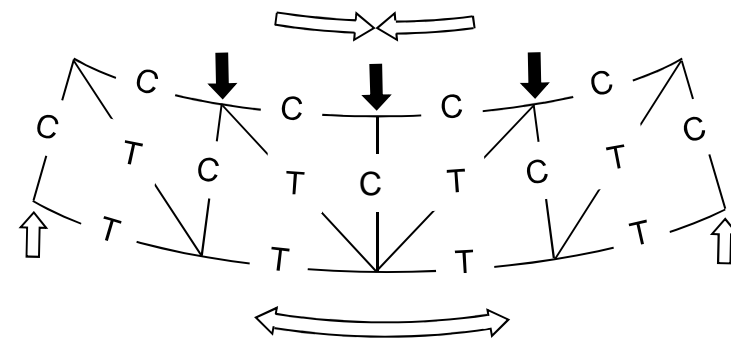
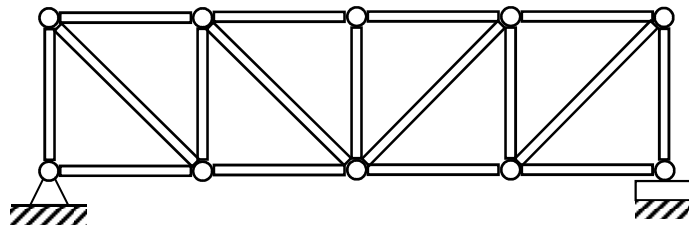


1. Introducción

Puesto que esta configuración básica triangular es estable, cualquier estructura resultante del ensamblaje de **configuraciones triangulares** será también una estructura estable, suficientemente rígida para soportar cargas.

En esta idea se apoya la viabilidad y utilidad de las celosías en gran número de estructuras (edificios de diverso tipo, puentes, etc.), ya que es posible obtener estructuras rígidas de dimensiones relativamente grandes de prácticamente cualquier geometría sin más que agregar pequeñas unidades triangulares.

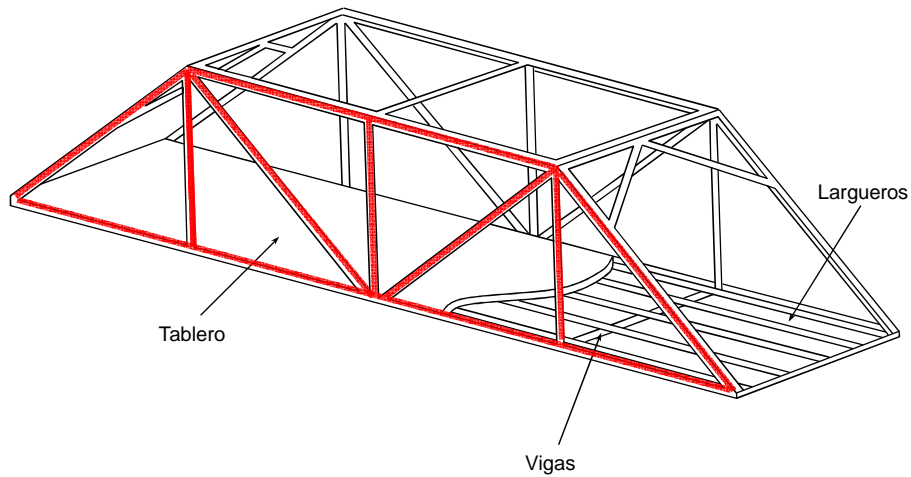
De nuevo, el efecto de las cargas exteriores es producir un estado de **tracción o compresión** pura en cada uno de los elementos del ensamblaje.



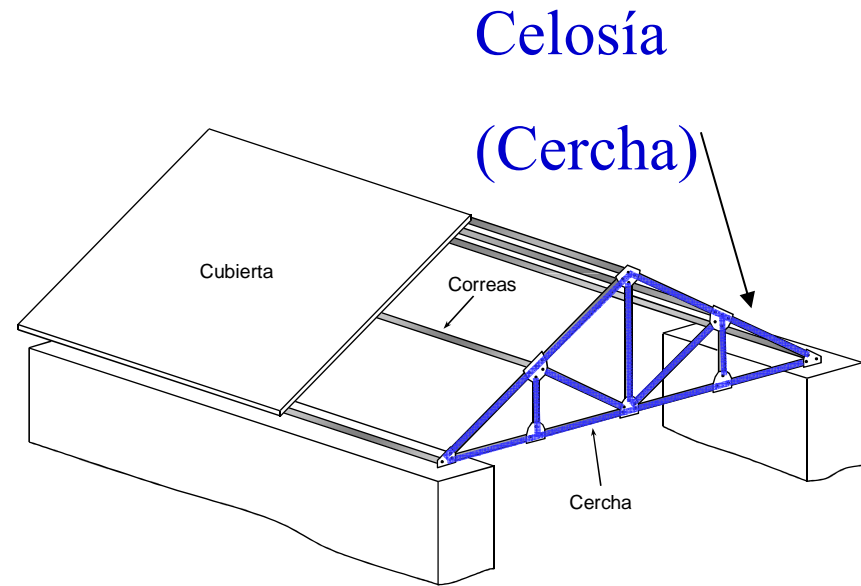


1. Introducción

Muchas de las celosías 3D pueden estudiarse en 2D



Estructura típica de puente en celosía

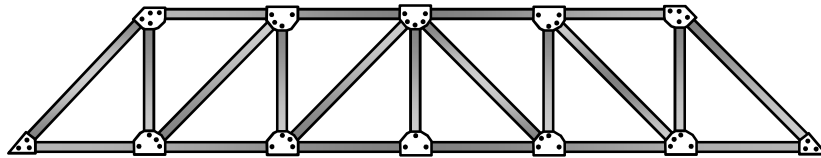


Celosía para la sustentación de cubiertas



1. Introducción

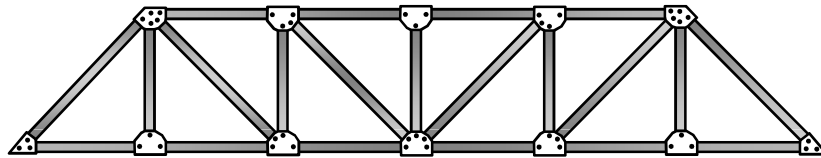
Celosías comunes para puentes



Celosía Howe



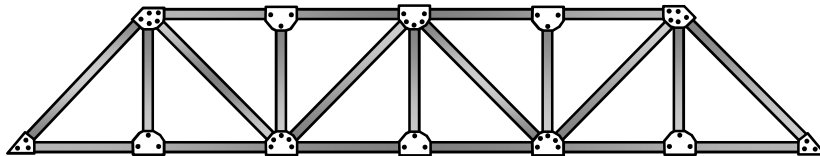
Diagonales en compresión



Celosía Pratt



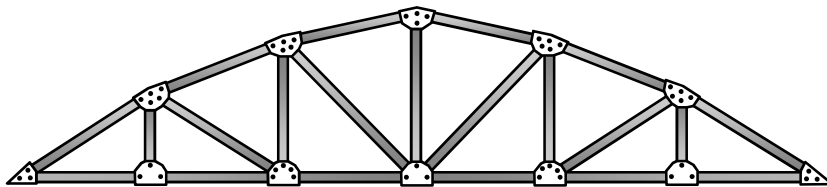
Diagonales en tracción



Celosía Warren



Triangulada



Celosía Parker

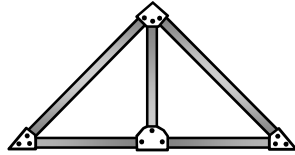


Sección transversal variable

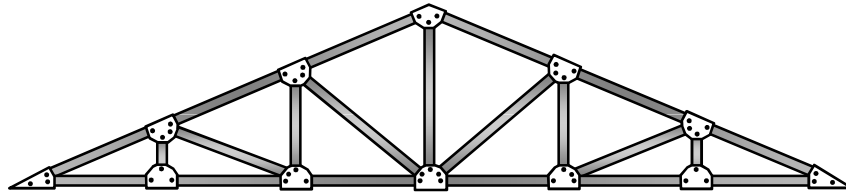


1. Introducción

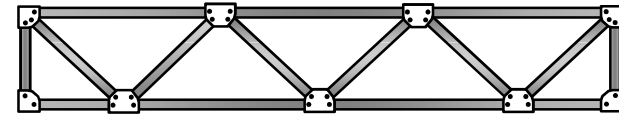
Celosías comunes para cubiertas



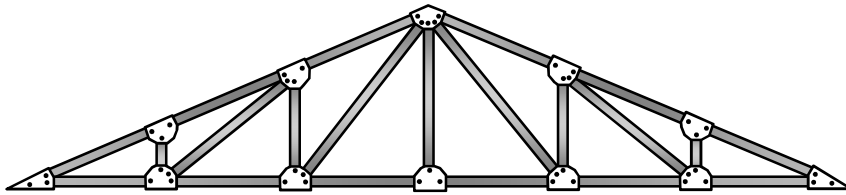
Celosía King Post



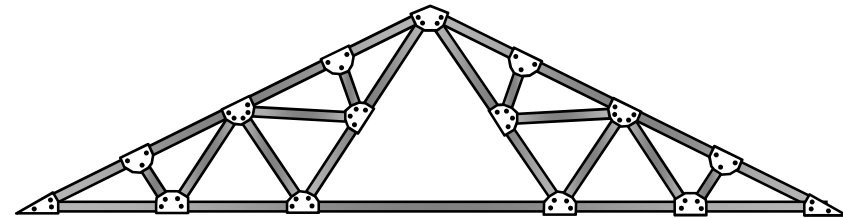
Celosía Pratt



Celosía Warren



Celosía Howe



Celosía Fink



2. Determinación estática y estabilidad

2.1. Celosías planas

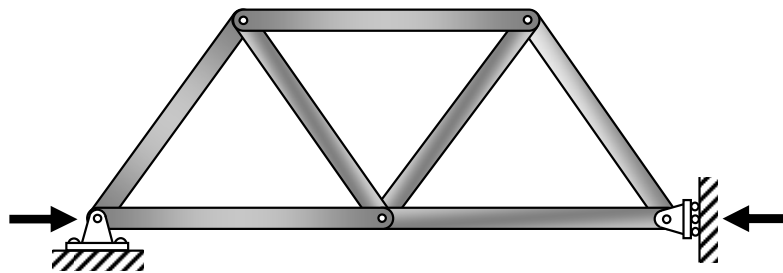
b (número de barras), r (número de reacciones), n (número de nudos)

$b+r < 2n \rightarrow$ no estable

$b+r = 2n \rightarrow$ isostático (estáticamente determinada)

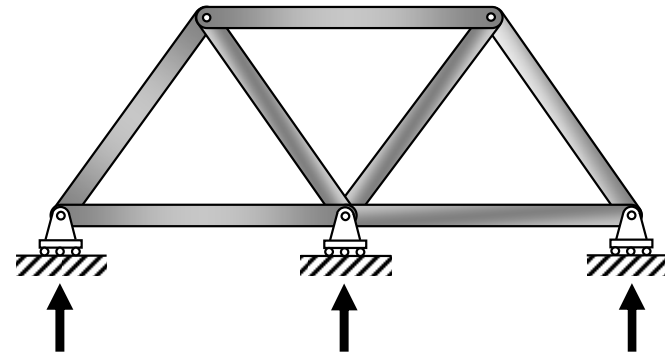
$b+r > 2n \rightarrow$ hiperestático (estáticamente indeterminada)

En los dos últimos casos , además es necesaria una configuración adecuada de barras y reacciones:



NO ESTABLE

Reacciones que se cortan en un punto

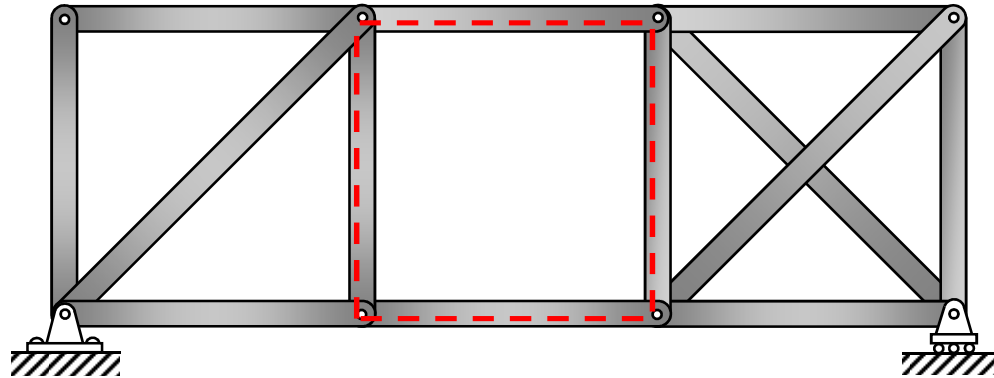


NO ESTABLE

Reacciones paralelas



2. Determinación estática y estabilidad



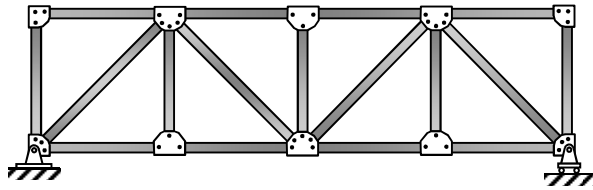
$$b=13, r=3, n=8$$

$$13+3=2*8 \rightarrow \text{PARECE ISOSTÁTICO}$$

PERO es una celosía no estable internamente

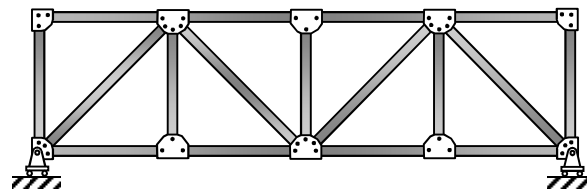


2. Determinación estática y estabilidad



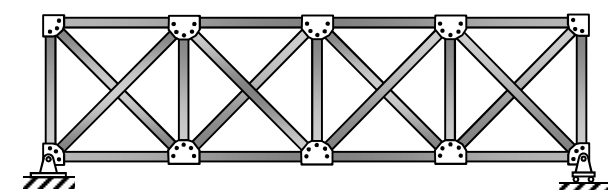
Estáticamente determinada

$$17+3=2*10$$



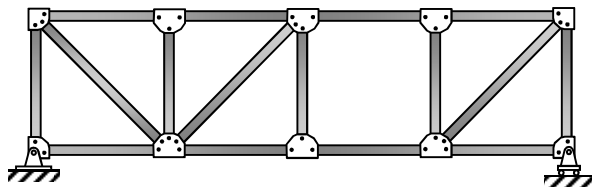
Inestable

$$17+2 < 2*10$$



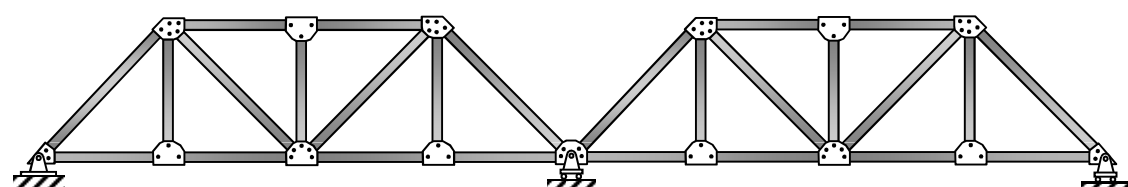
Estáticamente indeterminada

$$21+3 > 2*10$$



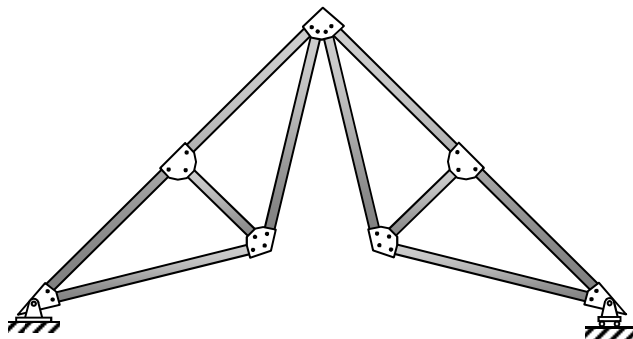
Inestable

$$16+3 < 2*10$$



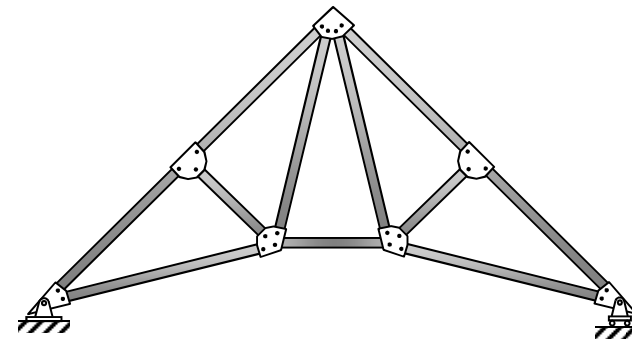
Estáticamente determinada

$$26+4=2*15$$



Inestable

$$10+3 < 2*7$$

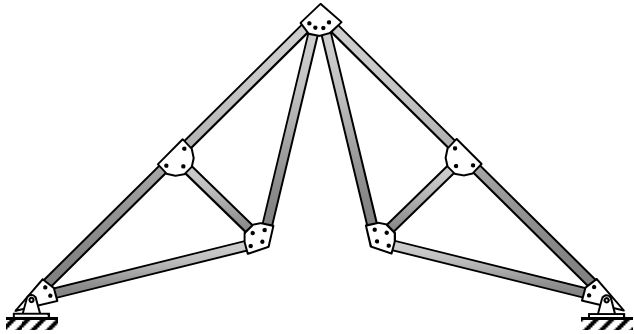


Estáticamente determinada

$$11+3=2*7$$

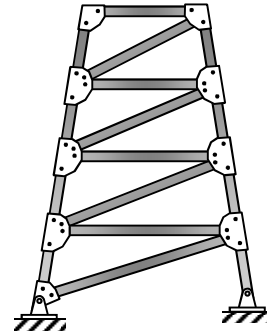


2. Determinación estática y estabilidad



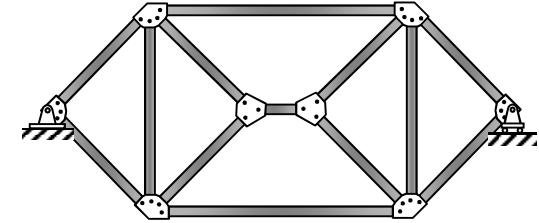
Estáticamente determinada

$$10+4=2*7$$



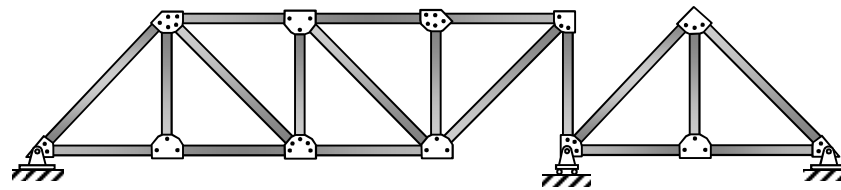
Estáticamente determinada

$$16+4=2*10$$



Inestable

$$13+3=2*8$$



Estáticamente determinada

$$19+5=2*12$$



2.1. Celosías espaciales

b (número de barras), r (número de reacciones), n (número de nudos)

$b+r < 3n$ → no estable

$b+r = 3n$ → isostático (estáticamente determinada)

$b+r > 3n$ → hiperestático (estáticamente indeterminada)

En los dos últimos casos , además es necesaria una configuración adecuada de barras y reacciones.

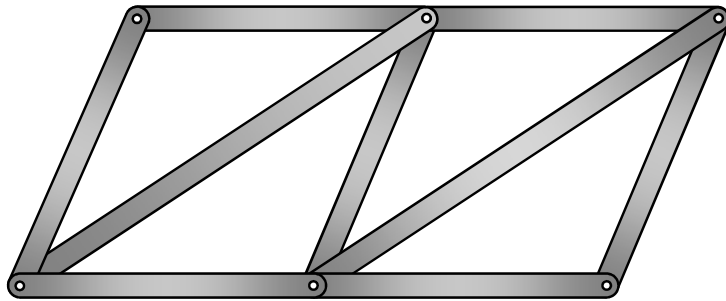
El estudio de la estructura es mucho mas complicado.



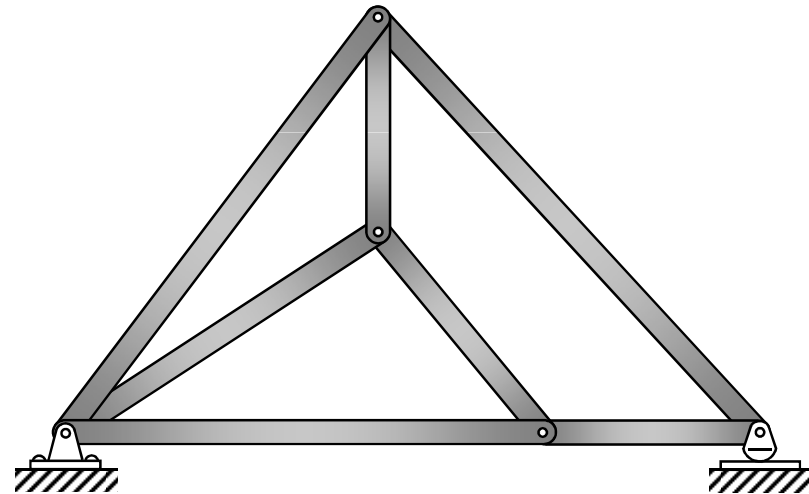
3. Clasificación de celosías

3.1. Celosías simples

A partir de un triángulo básico se van añadiendo nudos.
Los nudos no tienen por qué ser contiguos.



Celosía simple



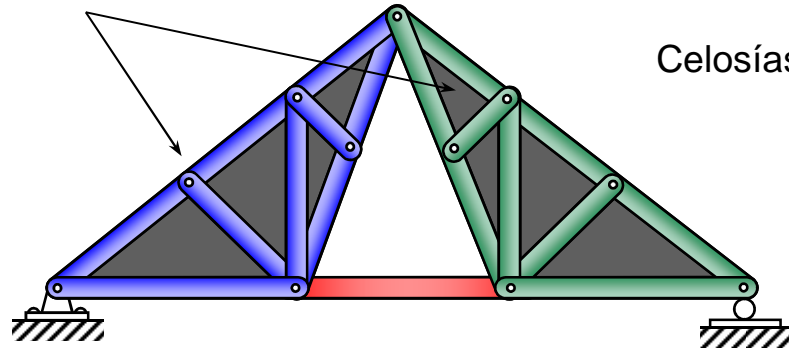
Celosía simple



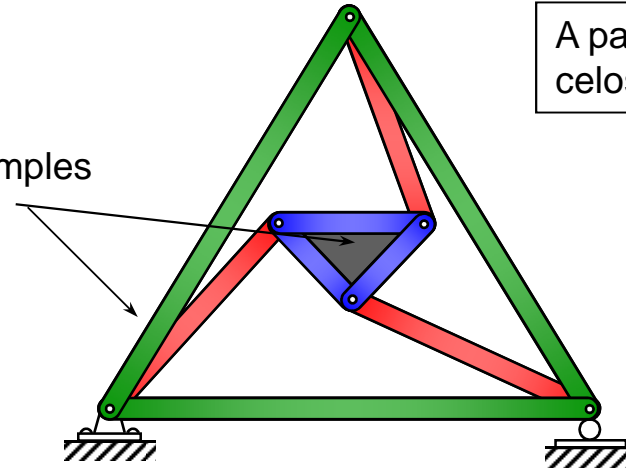
3. Clasificación de celosías

3.2. Celosías compuestas

Celosías simples

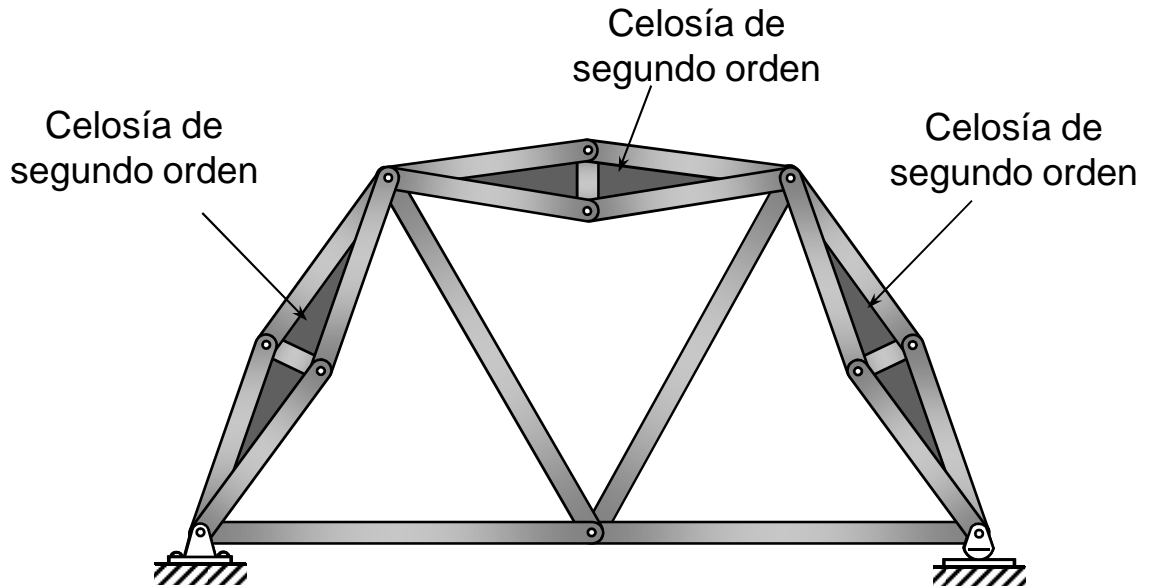


Celosías simples



A partir de la unión de celosías simples

Se sustituye una barra por una celosía simple

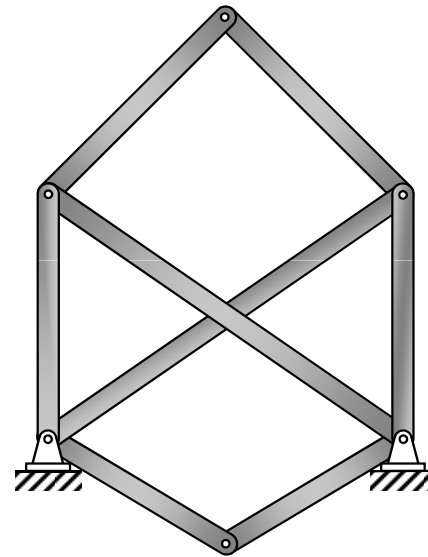




3. Clasificación de celosías

3.3. Celosías complejas

Las celosías que no son simples ni compuestas.





4. Métodos de análisis para celosías isostáticas

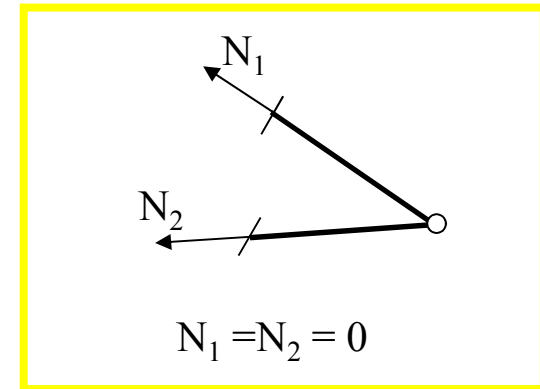
4.1. Método de los nudos

Se aplican las ecuaciones de equilibrio :

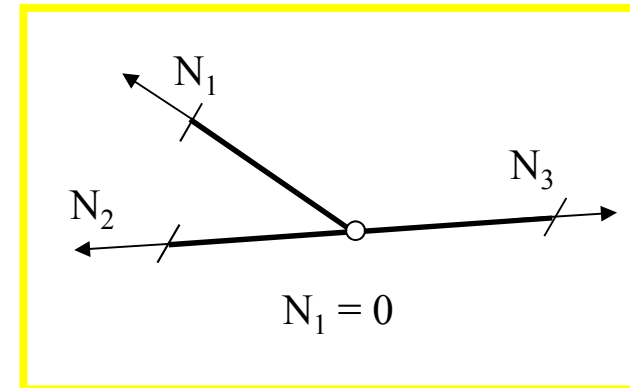
- En toda la estructura
- Nudo a nudo

SIMPLIFICACIONES: (CELOSÍAS 2D)

- Si se unen en un nudo sin carga exterior dos barras no colineales el esfuerzo axial en dichas barras es nulo.



- Si se unen en un nudo sin carga exterior tres barras siendo dos de ellas colineales, el esfuerzo axial de la tercera es nulo.





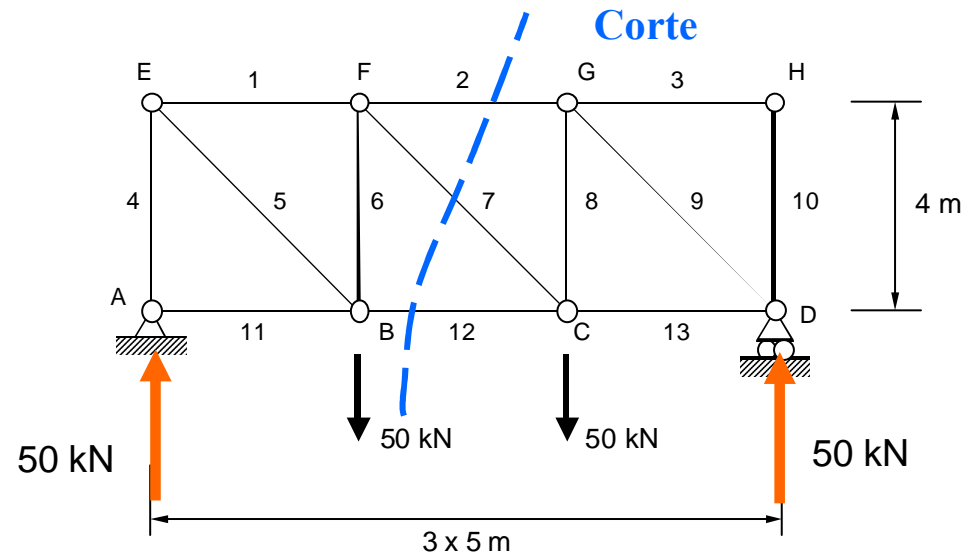
4.2. Método de las secciones

- Es una aplicación del principio del corte.
- Se aísla una parte de la celosía cortando varias barras.
- A continuación se aplican las ecuaciones de equilibrio para obtener los esfuerzos de las barras cortadas.
- Por lo tanto, el corte se realizará de manera que sólo aparezcan tres esfuerzos desconocidos.
- En ciertos casos, debido a la disposición geométrica de las barras, es posible cortar más de tres barras y obtener algún esfuerzo.



4. Métodos de análisis para celosías isostáticas

Ejemplo. Calcular los esfuerzos en las barras del panel central FGCB de la celosía de la figura.



El equilibrio del conjunto permite obtener las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

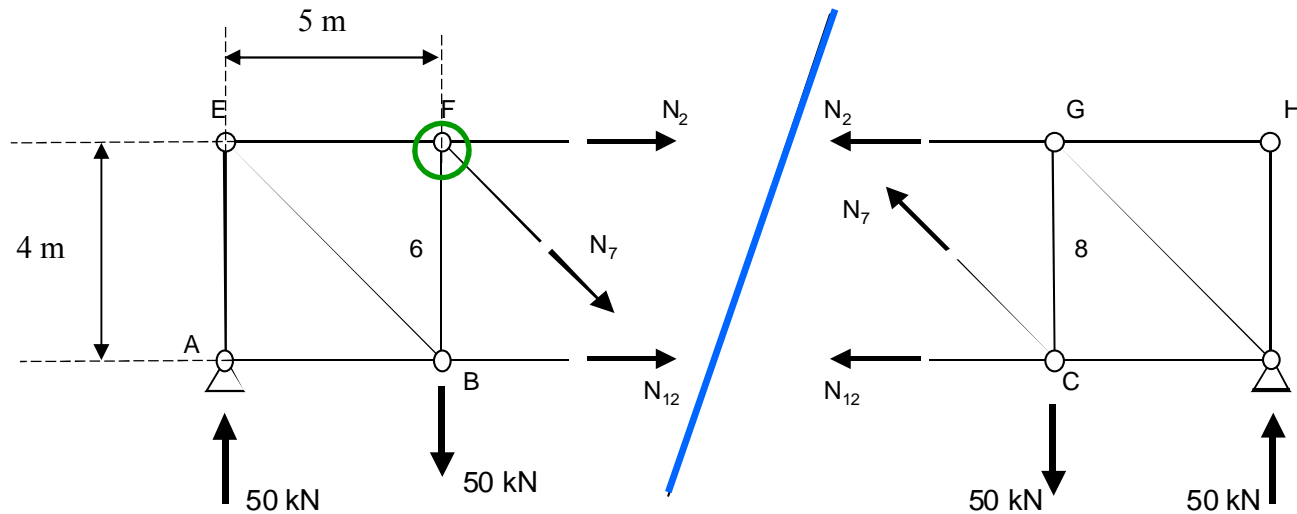
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_D = 50 + 50$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 50 \times 5 + 50 \times 10 = V_D \times 15$$

$$V_A = V_D = 50 \text{ kN}$$



4. Métodos de análisis para celosías isostáticas



Efectuando un corte como el indicado, que afecta a las barras 2, 7 y 12, y aplicando las ecuaciones de equilibrio a la parte izquierda (o derecha) de la celosía, se calculan los esfuerzos en esas tres barras.

Considerando la parte izquierda:

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 50 \times 5 - N_{12} \times 4 = 0 \Rightarrow N_{12} = 62,5 \text{ kN (+)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow N_7 \times 0,625 = 0 \Rightarrow N_7 = 0$$

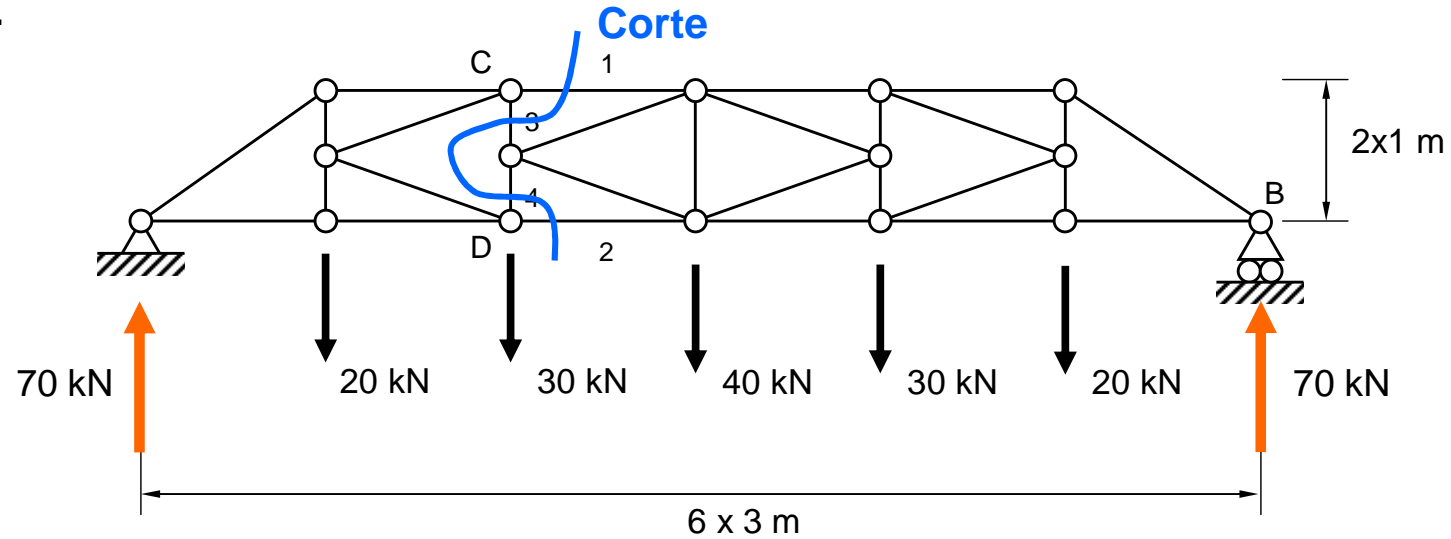
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_2 + 62,5 = 0 \Rightarrow N_2 = 62,5 \text{ kN (-)}$$

A continuación se aplicará el equilibrio nudo a nudo, para calcular los demás esfuerzos: F,C,G,H...



4. Métodos de análisis para celosías isostáticas

Ejemplo.



El equilibrio del conjunto permite obtener las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

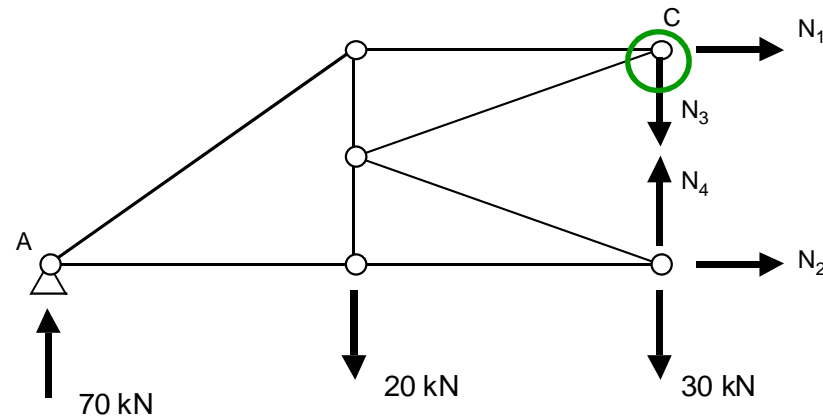
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 140$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 20 \times 3 + 30 \times 6 + 40 \times 9 + 30 \times 12 + 20 \times 15 = V_B \times 18$$

$$V_A = V_B = 70 \text{ kN}$$



4. Métodos de análisis para celosías isostáticas



La sección de corte implica a cuatro esfuerzos.

Aislando la parte izquierda de la cercha y tomando momentos respecto de C:

$$\underline{\sum M_C = 0} \Rightarrow 70 \times 6 - 20 \times 3 - N_2 \times 2 = 0 \Rightarrow N_2 = 180 \text{ kN (+)}$$

Y el equilibrio de fuerzas horizontales proporciona el esfuerzo en la barra 1.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = 180 \text{ kN (-)}$$

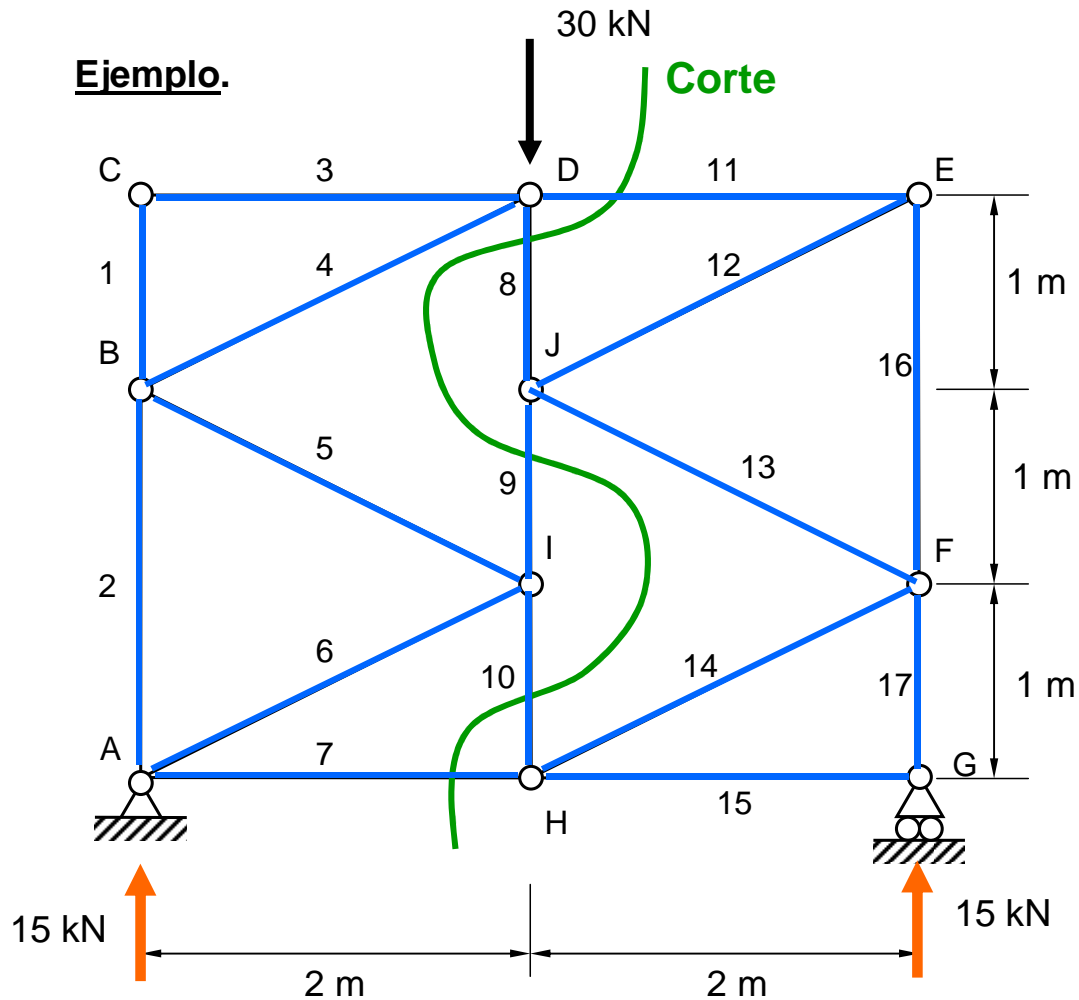
Mediante este corte no se pueden hallar los esfuerzos N_3 y N_4 .



4. Métodos de análisis para celosías isostáticas

4.3. Método mixto

Ejemplo.



Reacciones en los apoyos aplicando el equilibrio global de la estructura.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_G = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_G = 30$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow V_A \times 4 = 30 \times 2$$

$$V_A = V_G = 15 \text{ kN}$$

Esfuerzo de la barra 11 mediante el equilibrio en la parte izquierda del corte

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow N_{11} \times 3 + 15 \times 2 = 0$$

$$N_{11} = -10 \text{ kN}$$

El resto de esfuerzos se puede obtener por equilibrio en los nudos.



5. Energía de deformación en celosías

La ecuación constitutiva para problemas unidimensionales relaciona los valores unitarios de tensiones y deformaciones :

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0)$$

Donde:

E es el módulo de elasticidad del material

ε son las deformaciones unitarias totales existentes

ε_0 son las deformaciones unitarias totales presentes en el material en su estado sin tensión

(aparecen en el sólido cuando éste se halla en el estado de tensión nula o de libre dilatación. Lo habitual es que se produzcan por variaciones en la temperatura, pero pueden originarse por cualquier otro fenómeno, como por ejemplo por errores en la longitud de las barras.)

Suponiendo que la barra está sometida a una variación uniforme de temperatura de valor ΔT , el valor de la correspondiente deformación unitaria viene dado por:

$$\varepsilon_0 = \alpha \cdot \Delta T$$

Donde α es el coeficiente de dilatación lineal del material.

Operando se obtiene que:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta T$$



5. Energía de deformación en celosías

Obtención de U^* , energía de deformación complementaria acumulada en una barra:

Valor de la densidad de energía elástica complementaria acumulada en un punto cualquiera de un elemento de celosía:

$$U_o^* = \int_0^\sigma \varepsilon \cdot d\sigma$$

Teniendo en cuenta la expresión obtenida para las deformaciones unitarias totales e integrando se obtiene:

$$U_o^* = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta T \right) \cdot d\sigma = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \sigma$$

Sustituyendo el valor de la tensión en función del esfuerzo axial, N $U_o^* = \frac{N^2}{2 \cdot A^2 \cdot E} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{N}{A}$

Integrando la densidad de energía complementaria a todo el volumen de la barra i , se obtiene:

$$U_i^* = \int_{V_i} U_o^* \cdot dV = \int_0^L \left(\frac{N^2}{2 \cdot A^2 \cdot E} + \alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{N}{A} \right) \cdot A \cdot dx = \int_0^L \left(\frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot N \right) \cdot dx$$



5. Energía de deformación en celosías

Al no haber fuerzas aplicadas en la barra, cuyas variables designaremos por el subíndice i , el esfuerzo axial N_i es constante en toda ella.

Además, se supone que la barra es de propiedades uniformes en toda su longitud, es decir, que tanto la sección A_i , como sus coeficientes característicos E_i y α_i y la variación de temperatura ΔT_i son asimismo constantes a lo largo de toda su longitud.

Teniendo esto en cuenta, el integrando de la expresión anterior es constante y la energía complementaria, para una barra de propiedades uniformes, resulta ser:

$$U_i^* = \frac{N_i^2 \cdot L_i}{2 \cdot E_i \cdot A_i} + \alpha_i \cdot \Delta T_i \cdot L_i \cdot N_i$$

ρ_i : flexibilidad de la barra

λ_i : alargamiento de la barra debido a la libre dilatación

Entonces:

Y para una celosía de b barras:

$$U_i^* = \frac{N_i^2 \cdot \rho_i}{2} + \lambda_i \cdot N_i$$



$$U^* = \sum_{i=1}^b U_i^* = \sum_{i=1}^b \frac{N_i^2 \cdot \rho_i}{2} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i$$



6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

6.1. Determinación del grado de hiperestaticidad

$$h = b + r - 2n \quad 2D$$

$$h = b + r - 3n \quad 3D$$

6.2. Elección de las incógnitas hiperestáticas

X_j ($j=1,2,3,\dots,h$) serán las incógnitas hiperestáticas

$\left\{ \begin{array}{l} N_x \text{ esfuerzo interno de una barra} \\ R \text{ reacción en un apoyo} \end{array} \right.$



Deben cumplir las siguientes **condiciones**:

- Linealmente independientes
- Al eliminarlas de la estructura debe quedar una estructura isostática y estable.

Puede haber diferentes grupos válidos de incógnitas.

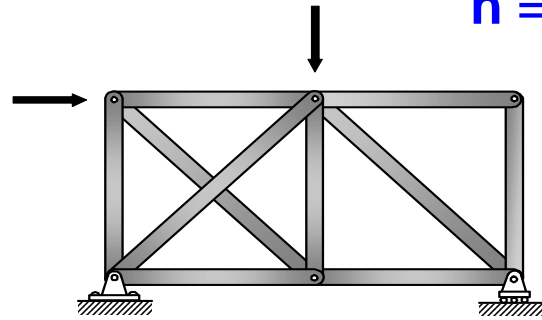
La elección se basa en la experiencia.



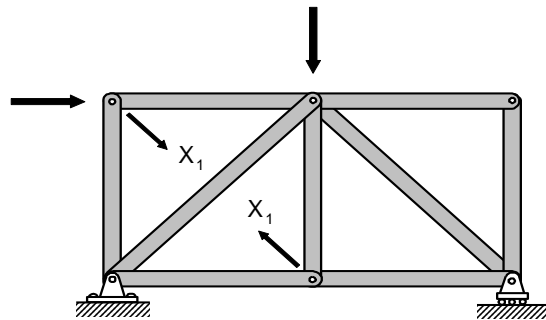
6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

Ejemplo

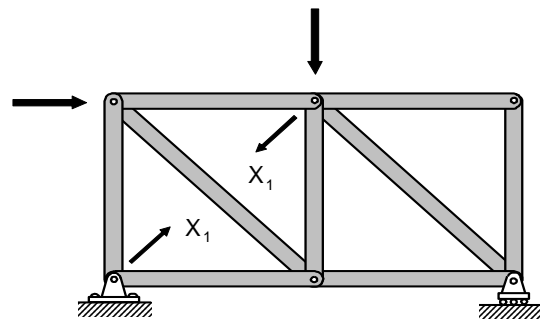
$$h = b+r-2n = 10 + 3 - 2*6 = 1$$



a)

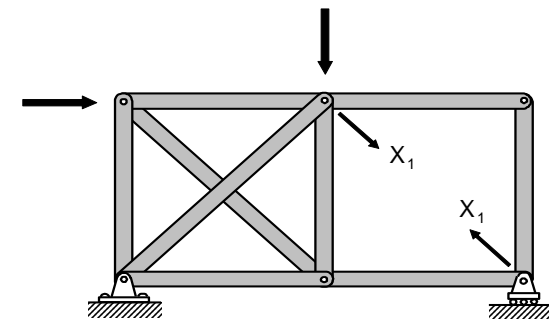


b)



c)

Posibles elecciones de X_1



d)





6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

6.3. Formulación de los esfuerzos de la celosía

En la resolución de una celosía hiperestática se diferencian dos partes

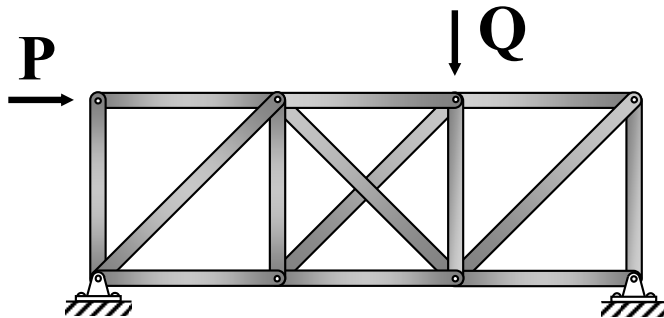
- Principio de superposición y formulación de los esfuerzos
- Condiciones de compatibilidad geométrica (h)



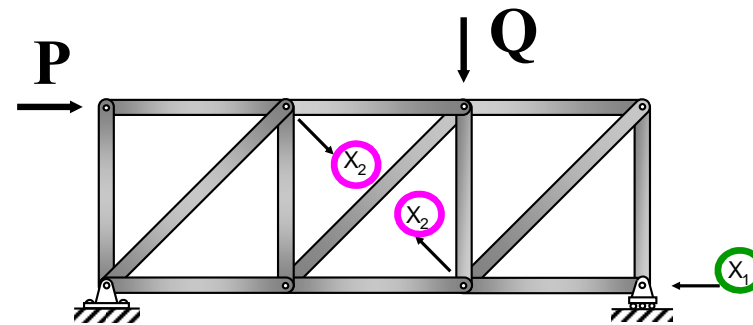
Veamos la formulación de esfuerzos de las barras (a)

- Se eligen las incógnitas X_i y se quitan de la estructura la barra o apoyo correspondiente

La estructura resultante es isostática y está bajo el efecto de las fuerzas externas y de las h incógnitas hiperestáticas (X_i)



Estructura real $h=14+4-(2*8)=2$



Estructura básica



6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

2) Superposición: Descomponer el caso real en 1+h casos isostáticos

Caso 0:

Caso básico

Caso de las fuerzas externas

$N_i^0 \rightarrow$ Esfuerzo de cada barra en este caso

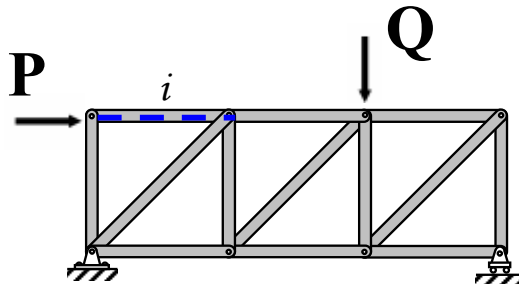
Casos 1→h: Casos hiperestáticos

La correspondiente incógnita hiperestática con valor unitario y las demás nulo

$N_i^j \rightarrow$ Esfuerzo de cada barra en cada caso

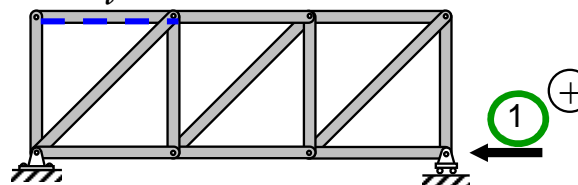
$i \rightarrow$ barra

$j \rightarrow$ caso hiperestático
(1,2,...,h)



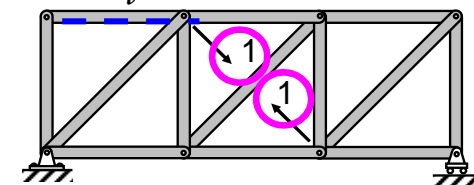
Caso básico, N_i^0

+



Caso hiperestático 1, N_i^1

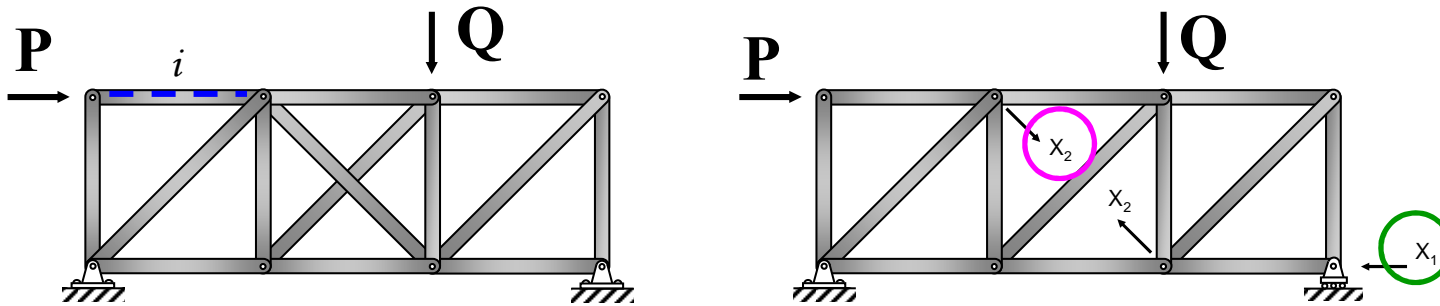
+



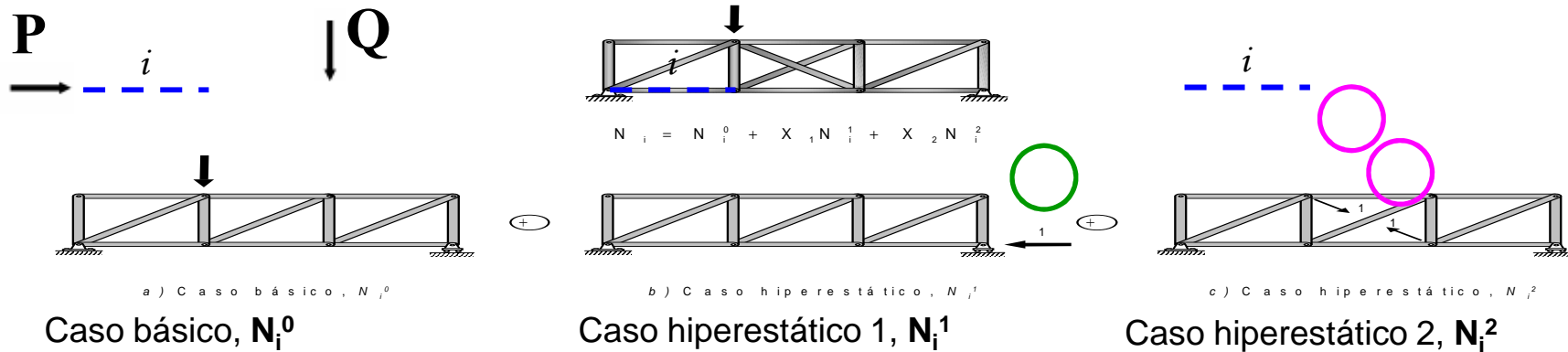
Caso hiperestático 2, N_i^2

6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

Caso real y estructura básica



$$N_i = N_i^0 + X_1 \cdot N_i^1 + X_2 \cdot N_i^2 \Rightarrow \text{esfuerzo del caso real de la barra } i$$



En general :

$$N_i = N_i^0 + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j = N_i^0 + \sum_{k=1}^h X_k \cdot N_i^k$$



6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

6.4. Aplicación de las condiciones de compatibilidad

Recordando la expresión obtenida para la energía de deformación complementaria:

$$U^* = \sum_{i=1}^b U_i^* = \sum_{i=1}^b \frac{N_i^2 \cdot \rho_i}{2} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i$$

Cuántas condiciones de compatibilidad hay que aplicar? **h**

a) Si X_j es una **reacción** de un apoyo

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \Delta_j \quad j = 1, h$$

b) Si X_j es un **esfuerzo interno** de una barra

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$



6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

6.5. Proceso de resolución general

* Suponiendo que X_j es un esfuerzo interno:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$

* Energía de deformación:

$$U^* = \sum_{i=1}^b \frac{N_i^2 \cdot \rho_i}{2} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i$$

* Esfuerzo en una barra:

$$N_i = N_i^0 + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j = N_i^0 + \sum_{k=1}^h X_k \cdot N_i^k$$

Teniendo todo en cuenta:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^b N_i \cdot \rho_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$

Para hallar la derivada de N_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_i = N_i^0 + X_1 \cdot N_i^1 + X_2 \cdot N_i^2 + X_3 \cdot N_i^3 + \dots + X_j \cdot N_i^j + \dots + X_h \cdot N_i^h \\ \frac{\partial N_i}{\partial X_j} = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + N_i^j + \dots + 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial X_j} = N_i^j \quad j = 1, h$$



6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

Sustituyendo la solución anterior en la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^b N_i \cdot \rho_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial X_j} = N_i^j \quad j = 1, h$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^b N_i \cdot \rho_i \cdot N_i^j + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^j = 0 \quad j = 1, h$$

Sustituyendo la expresión de Ni

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^b \left(N_i^0 + \sum_{k=1}^h X_k \cdot N_i^k \right) \cdot \rho_i \cdot N_i^j + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^j = 0 \quad j = 1, h$$

* Sistema de h ecuaciones y **h incógnitas hiperestáticas**

* Resolviendo se obtiene la solución: **$X_1, X_2, X_3, \dots, X_h$**

* Luego el esfuerzo de cada barra mediante:
$$N_i = N_i^0 + \sum_{k=1}^h X_k \cdot N_i^k$$



6. Análisis de celosías hiperestáticas mediante el método de la flexibilidad

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^b \left(N_i^0 + \sum_{k=1}^h X_k \cdot N_i^k \right) \cdot \rho_i \cdot N_i^j + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^j = 0 \quad j = 1, h$$

Realizando operaciones en la ecuación obtenida :

$$\sum_{i=1}^b N_i^0 \cdot \rho_i \cdot N_i^j + \sum_{i=1}^b \left(\sum_{k=1}^h X_k \cdot N_i^k \right) \cdot \rho_i \cdot N_i^j + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^j = 0 \quad j = 1, \dots, h$$

Desarrollando el sumatorio y reordenando:

$$\sum_{i=1}^b \left(\sum_{k=1}^h X_k \cdot N_i^k \right) \cdot \rho_i \cdot N_i^j = - \sum_{i=1}^b N_i^0 \cdot \rho_i \cdot N_i^j - \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^j$$

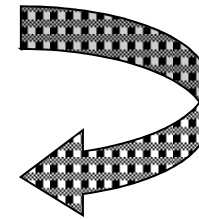
$$\sum_{k=1}^h \left(\sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i^k \cdot N_i^j \right) X_k = - \sum_{i=1}^b N_i^0 \cdot \rho_i \cdot N_i^j - \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^j$$

$$\boxed{} = F_{jk} = F_{kj}$$

Debido a las fuerzas externas

Debido a la variación de temperatura

$$\boxed{} = D_j$$



MATRIZIALKI:

$$\boxed{[F]} \cdot \{X\} = \boxed{[D]}$$

Matriz de flexibilidades (h x h)



7. Cálculo de deformaciones

OBJETIVO: Calcular el desplazamiento de un nudo de la celosía en una determinada dirección

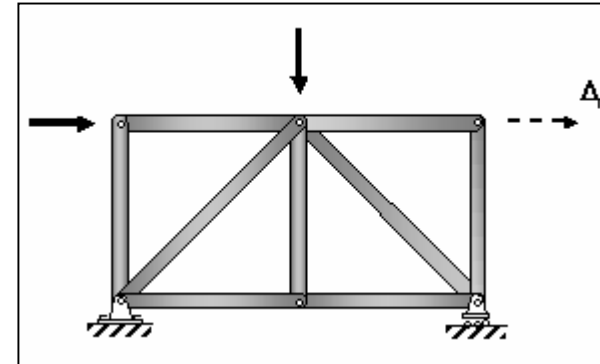
MÉTODO: “ Fuerza virtual unitaria“

7.1. Celosías isostáticas

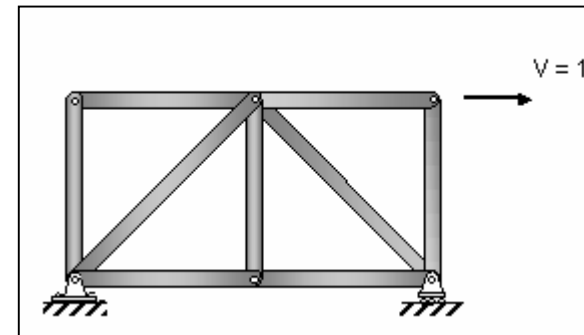
- ♦ Supongamos una celosía isostática en la que se han calculado sus N_i esfuerzos
- ♦ Se quiere calcular el desplazamiento horizontal Δ_r
- ♦ Según indica el método se aplica en la celosía una carga de valor unidad en la dirección del desplazamiento Δ_r

Sumando los dos casos:

$$N_i^{RV} = N_i + V \cdot N_i^V \quad / \quad V \text{ fuerza virtual}$$



Caso real, N_i conocidas



Caso virtual, N_i^V se pueden calcular



7. Cálculo de deformaciones

Energía de deformación complementaria
debido al caso real virtual:

$$U^* = \sum_{i=1}^b U_i^* = \sum_{i=1}^b \frac{N_i^{RV2} \cdot \rho_i}{2} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^{RV}$$

Donde los esfuerzos debidos
al caso real virtual:

$$N_i^{RV} = N_i + V \cdot N_i^v$$

Para calcular el desplazamiento se aplica el teorema de Crotti-Engesser cuando V es nulo.

Es decir:

$$\Delta_r = \left(\frac{\partial U^{*RV}}{\partial V} \right)_{V=0}$$

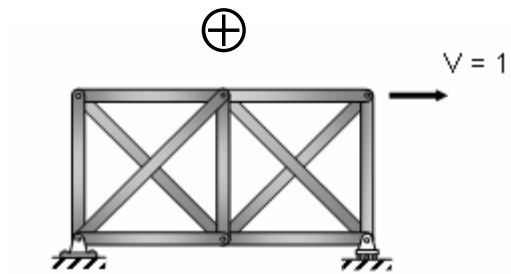
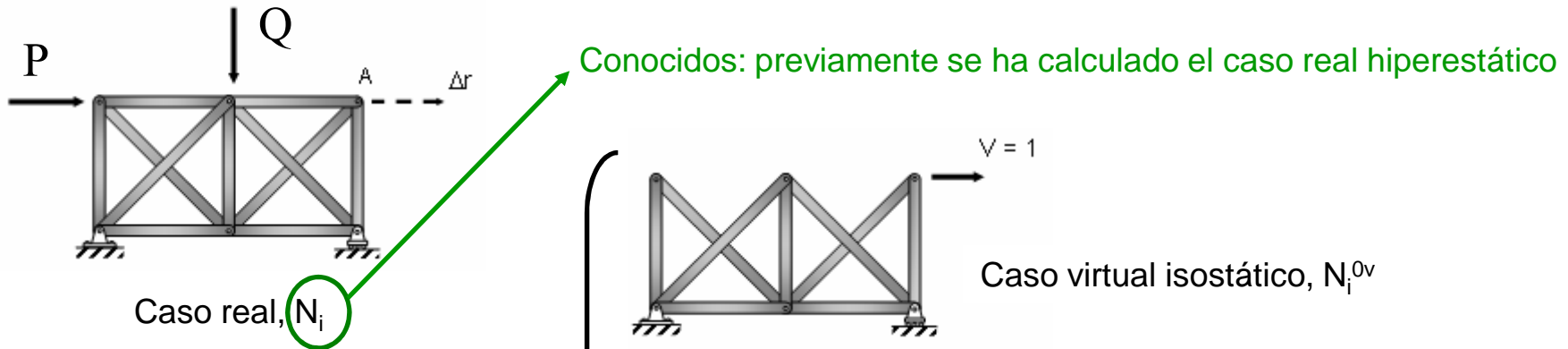
Finalmente:

$$\Delta_r = \left(\sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i^{RV} \cdot \frac{\partial N_i^{RV}}{\partial V} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot \frac{\partial N_i^{RV}}{\partial V} \right)_{V=0}$$

N_i N_i^v N_i^v

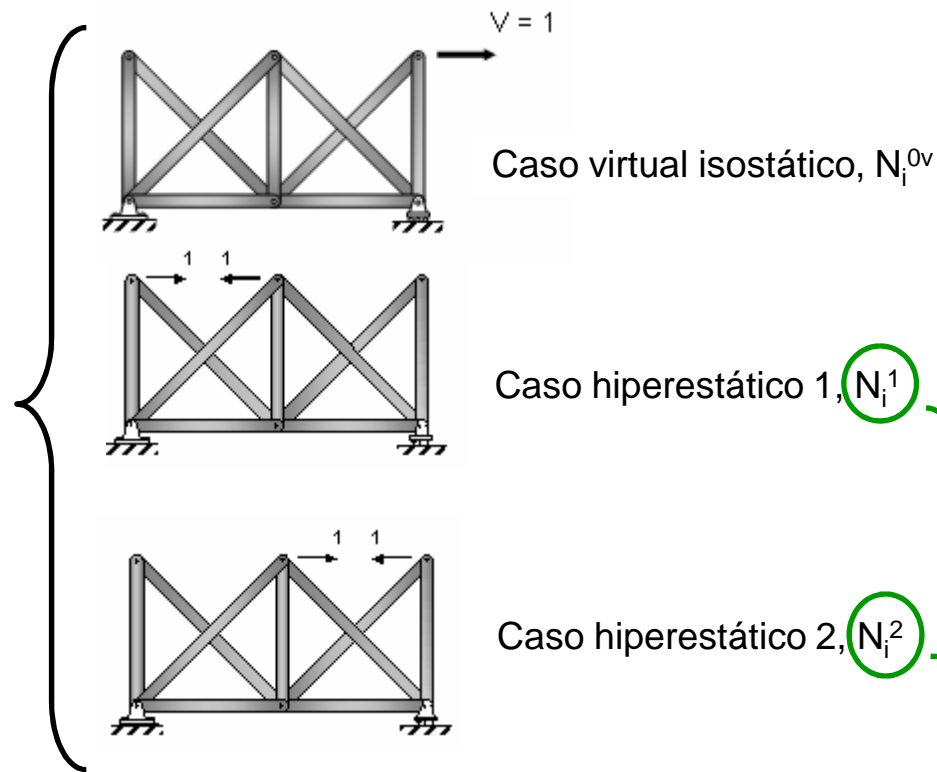
7. Cálculo de deformaciones

7.2. Celosías hiperestáticas



Caso virtual unitario, N_i^V

$$N_i^V = N_i^{0V} + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j$$



Sumando los dos casos:

$$N_i^{RV} = N_i + V \cdot N_i^V \quad / V \text{ fuerza virtual}$$

= estructuras isostáticas

Conocidos, se calcularon al calcular los esfuerzos N_i de la celosía

7. Cálculo de deformaciones

Energía de deformación complementaria debido al caso real virtual:

$$U^* = \sum_{i=1}^b U_i^* = \sum_{i=1}^b \frac{N_i^{RV2}}{2} \cdot \rho_i + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^{RV}$$

= estructuras isostáticas

Aplicando el teorema de Crotti Engesser se logra la misma expresión que para el caso isostático:

$$N_i^V = N_i^{0V} + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j$$

$$\left\{ \Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^V + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^V \right\}$$

Los esfuerzos del caso virtual difieren del caso isostático

$$\Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot \left(N_i^{0V} + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j \right) + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot \left(N_i^{0V} + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j \right)$$



7. Cálculo de deformaciones

$$\Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot \left(N_i^{0V} + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j \right) + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot \left(N_i^{0V} + \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j \right)$$

$$\Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^{0V} + \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^h X_j \cdot N_i^j$$

$$\Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^{0V} + \sum_{j=1}^h X_j \cdot \left(\sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^j + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^j \right)$$

= 0 ver ecuación de compatibilidad

Finalmente:

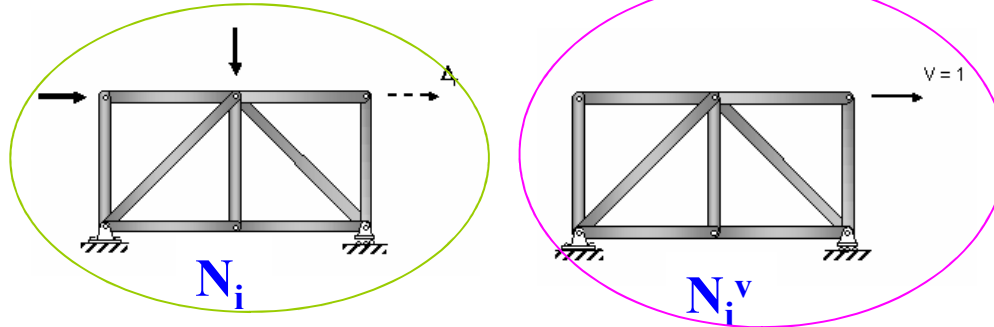
$$\Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^{0V}$$

- No es necesario calcular el caso virtual unitario, \mathbf{N}_i^V , sino el caso isostático virtual, \mathbf{N}_i^{0V}
- Se simplifican los cálculos

7. Cálculo de deformaciones

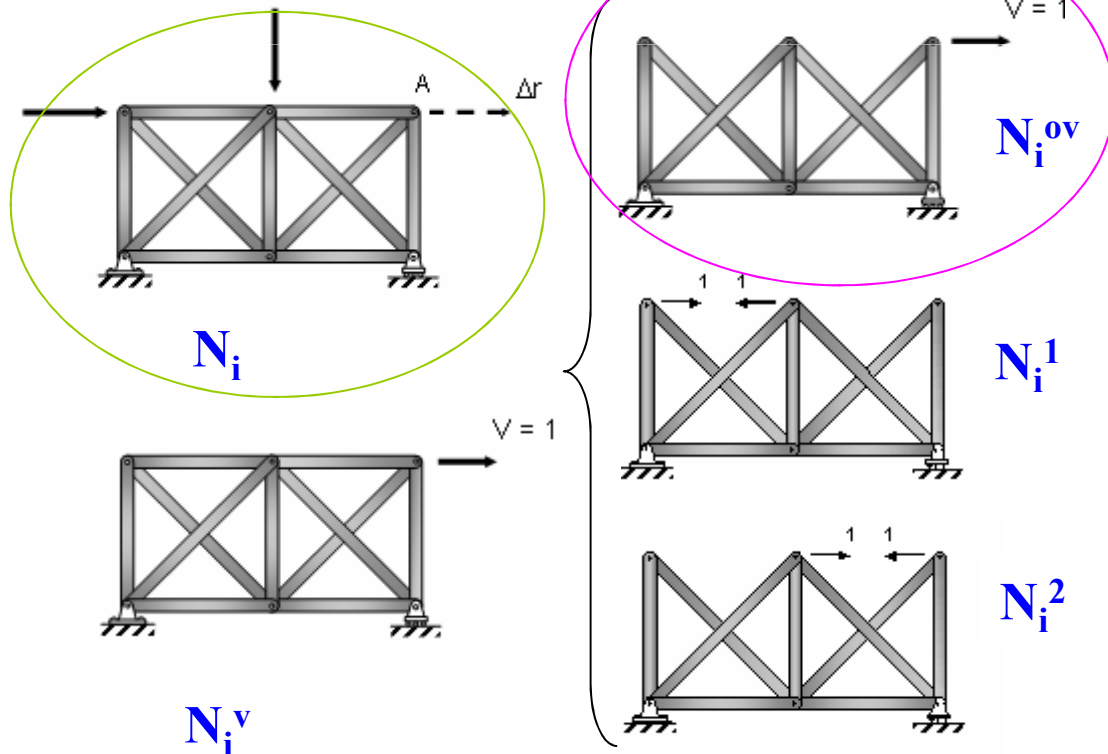
RESUMEN

Isostático



$$\Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^V + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^V$$

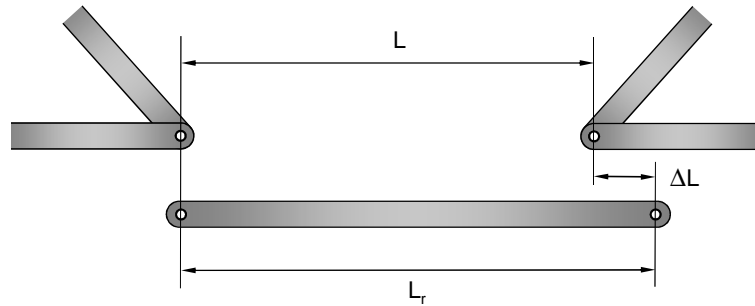
Hiperestático



$$\Delta_r = \sum_{i=1}^b \rho_i \cdot N_i \cdot N_i^{0V} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \cdot N_i^{0V}$$



8. Errores de longitud en barras



L = longitud de montaje.

La barra se debe colocar en esta longitud.

L_r = longitud real de la barra

Si $L \neq L_r$ y se fuerza el montaje, aparecerán esfuerzos en la estructura debido a que la barra tiende a recuperar su longitud inicial.

Para abordar este problema se considera el error como una deformación inicial.

Deformación unitaria correspondiente a ΔL

$$\varepsilon_0 = \frac{L_r - L}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

Introduciendo en la ecuación de comportamiento del material:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) = E\left(\varepsilon - \frac{\Delta L}{L}\right) \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\Delta L}{L}$$

Densidad de energía de deformación:

$$U_0^* = \int_0^\sigma \varepsilon \cdot d\sigma = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \frac{\Delta L}{L}\right) \cdot d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\Delta L}{L} \sigma = \frac{N^2}{2EA^2} + \frac{\Delta L}{L} \frac{N}{A}$$



8. Errores de longitud en barras

Integrando en el volumen de la barra:

$$U_i^* = \int_V U_i^* \cdot dV = \int_0^L \left(\frac{N^2}{2EA^2} + \frac{\Delta L}{L} \frac{N}{A} \right) \cdot A \cdot dx = \int_0^L \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{\Delta L \cdot N}{L} \right) \cdot dx =$$
$$= \frac{N_i^2 \cdot L_i}{2 \cdot E_i \cdot A_i} + \Delta L_i \cdot N_i = \frac{N_i^2 \cdot \rho_i}{2} + \Delta L_i \cdot N_i$$

Error de longitud

Recordando la expresión de la energía de deformación en el caso de incremento de temperatura:

$$U_i^* = \frac{N_i^2 \cdot \rho_i}{2} + \alpha_i \cdot \Delta T_i \cdot L_i \cdot N_i = \frac{N_i^2 \cdot \rho_i}{2} + \lambda_i \cdot N_i$$

Variación de longitud debida a la variación de temperatura

Por lo tanto ambos problemas se pueden resolver de la misma forma.

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 2: *CELOSÍAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU

