
TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 1: *INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU





1. Introducción

Definición de estructura

Para un ingeniero, una estructura es cualquier tipo de construcción formada por uno o varios elementos enlazados entre sí de forma tal que el conjunto sea capaz de soportar la acción de una serie de fuerzas aplicadas sobre ellos.

Generalización

Puede generalizarse la definición anterior diciendo que una estructura es cualquier dominio o extensión de un medio material sólido, que está destinada a soportar alguna acción mecánica aplicada sobre él.



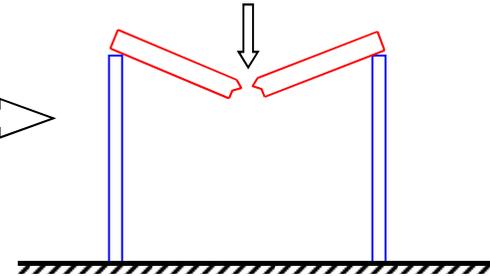
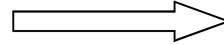
1. Introducción

¿QUÉ CONDICIONES DEBE CUMPLIR UNA ESTRUCTURA?

ASIGNATURA

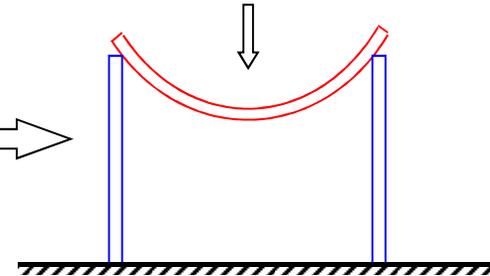
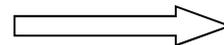
RESISTENCIA
Limitando las tensiones

$$\sigma_{\max}^{\text{estructura}} < \sigma_{\max}^{\text{material}}$$



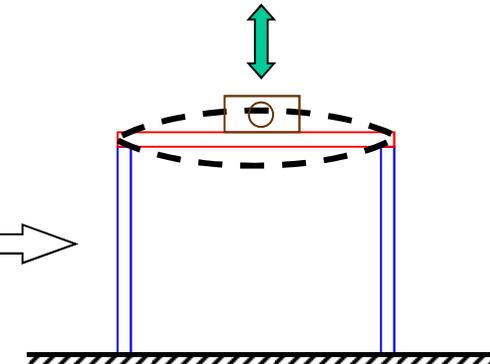
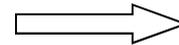
RIGIDEZ
Limitando las deformaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{estructura}} &< \varepsilon_{\max} \\ \delta^{\text{estructura}} &< \delta_{\max} \end{aligned}$$



OTRAS:

- Inestabilidades: pandeo
- Respuesta dinámica: vibraciones
- Grietas: tamaño crítico





2. El proceso de diseño de estructuras

1) Formulación de los requisitos funcionales



Se establecen los factores que van a influir en las características y dimensiones generales de la estructura:

Superficie, número de carriles de circulación, número de plantas ...

Entran en juego los condicionantes estético, económico y legales.

Fase de planteamiento

Diseño preliminar

Estimación de las acciones

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

¿Se satisfacen todos los requisitos?

NO

Modificación del diseño

SI

Fase de construcción

2) Fase de diseño

3) Construcción



Obtener los materiales

Fabricar los elementos en el taller

Transporte a la obra

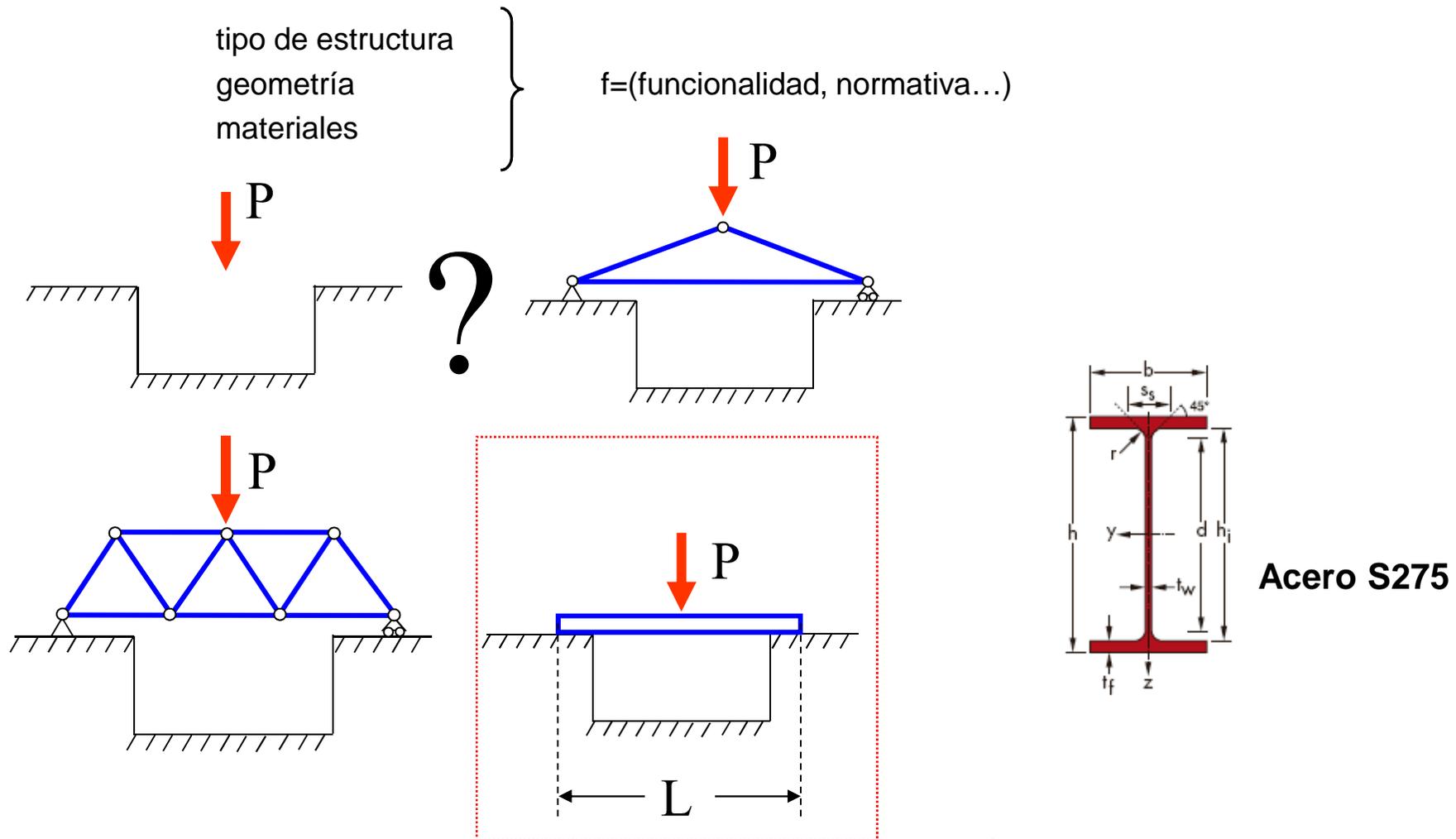
Montaje de la estructura en la obra



2. El proceso de diseño de estructuras

2) Fase de diseño

- Elección de la forma y dimensiones generales





2. El proceso de diseño de estructuras

- **Establecer las diversas cargas que actuarán en la estructura**

Fuerzas externas, errores de forma, movimiento de apoyos...

- **Idealización de la estructura**

1D, 2D, 3D

Carga estática o dinámica

Elementos discretos, continuos o mixtos

Tipos de enlace: articulaciones, rígidas o flexibles

Comportamiento de materiales: elástico o plástico, lineal o no lineal

Deformaciones pequeñas



2. El proceso de diseño de estructuras

- **Análisis**

Obtener el valor de los esfuerzos y deformaciones ($N_x, V_y, V_z, M_z, \dots, \epsilon_x, \dots$)

Se suponen unas dimensiones de la sección transversal y se calculan los esfuerzos y deformaciones. Si cumplen los requisitos finaliza el proceso y si no se ITERA modificando el valor de la sección transversal hasta el cumplimiento de los mismos.

- **Diseño de detalles**

Con los resultados obtenidos se diseña:

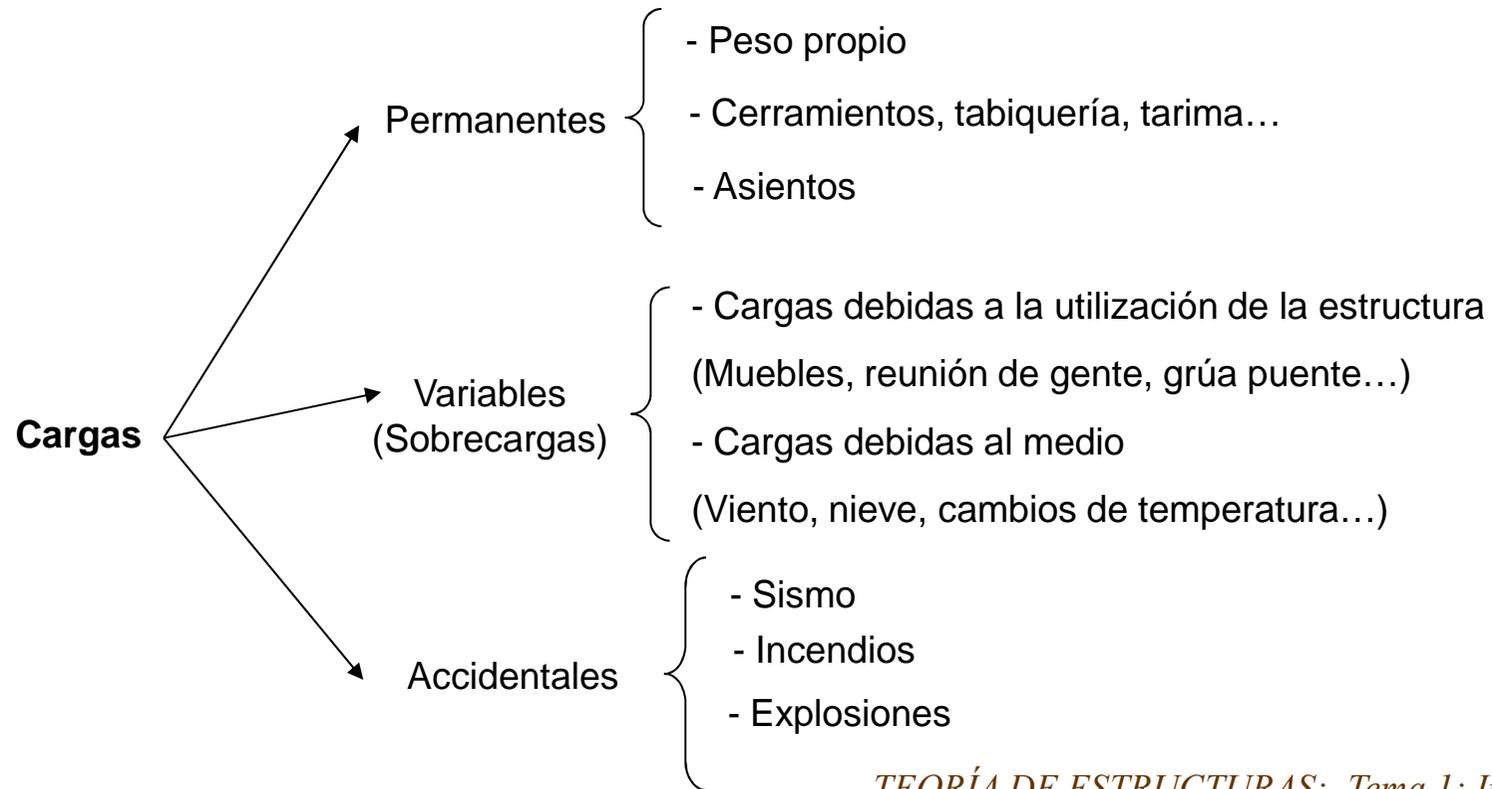
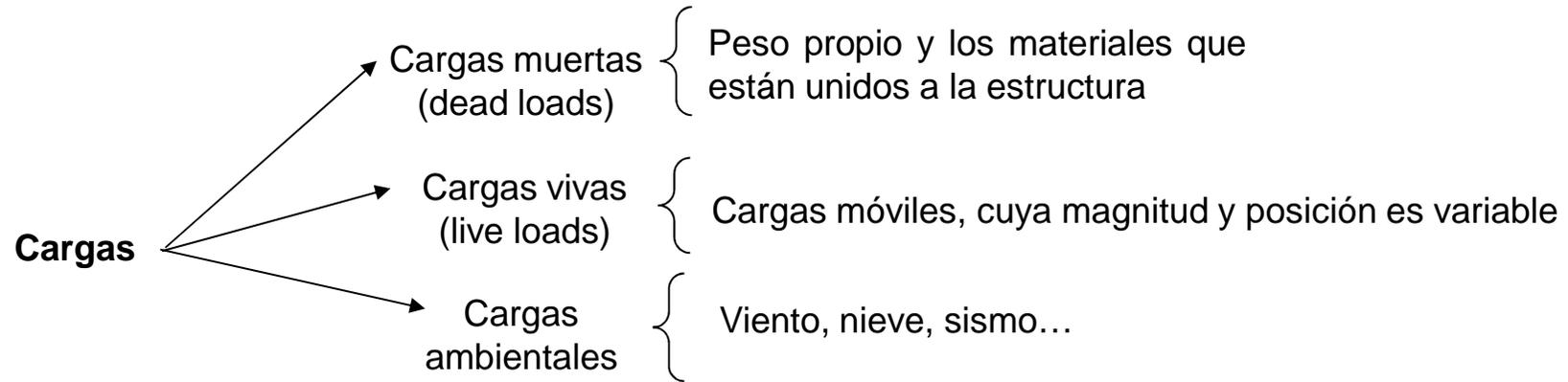
Uniones en los nudos

Aparatos de apoyo: zapatas, encepados...

Armadura del hormigón



3. Acciones sobre las estructuras





3. Acciones sobre las estructuras

- Es importante considerar los diferentes tipos de carga ya que el coeficiente de seguridad es diferente.
- Hay que considerar que cargas pueden actuar simultáneamente en la estructura.
- El diseño final tiene que soportar las combinaciones de carga más desfavorables que se darán a lo largo de la vida de la estructura.
- CARGAS: peso propio, sobrecarga, nieve, viento, sismo...

Hipótesis simples:

C1 x peso propio
C2 x sobrecarga,
C3 x nieve
C4 x viento
C5 x sismo
...

Combinaciones:

C1 x peso propio +C2 x sobrecarga
C1 x peso propio +C2 x sobrecarga + C3 x nieve
C1 x peso propio +C2 x sobrecarga +C3 x nieve +C4 x viento
C1 x peso propio +C4 x viento
...



4. Clasificación de las estructuras

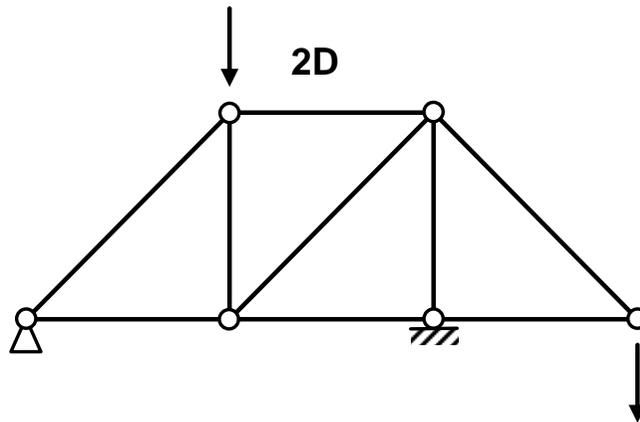
4.1. Estructuras discretas

CELOSÍAS

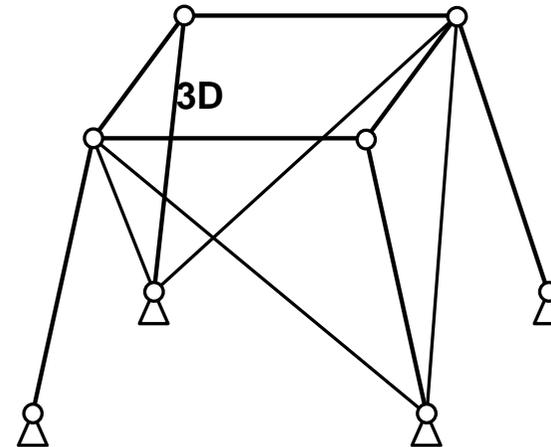
Unión de barras mediante articulaciones

Cargas en los nudos

Pueden ser planas o espaciales :



$V_y = M_z = 0 \Rightarrow$ esfuerzo axial simple



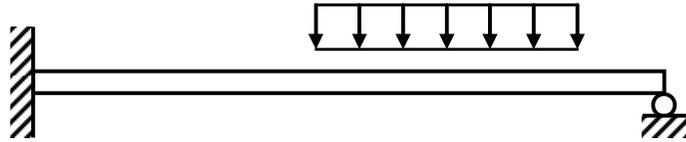
En realidad este comportamiento no es real debido a que :

- Las articulaciones no son perfectas
- El peso propio de la estructura



4. Clasificación de las estructuras

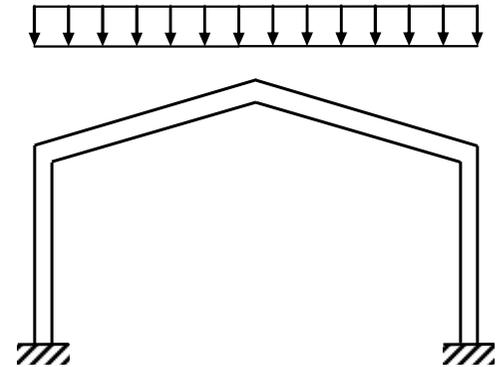
VIGAS



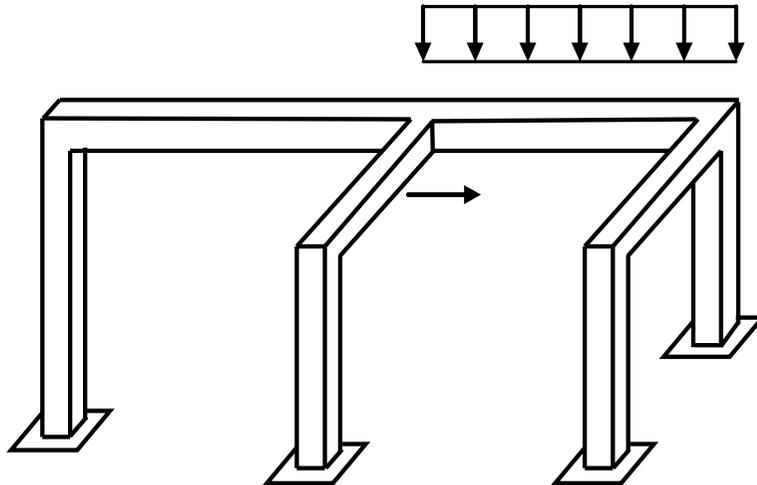
Trabajan bajo el efecto del esfuerzo axial, cortante y flexión.

$$V_y \neq 0 \quad N_x \neq 0 \quad M_z \neq 0$$

PÓRTICO PLANO



PÓRTICO ESPACIAL



$$V_y \neq 0 \quad V_z \neq 0 \quad N_x \neq 0$$
$$M_z \neq 0 \quad M_y \neq 0 \quad M_x \neq 0$$

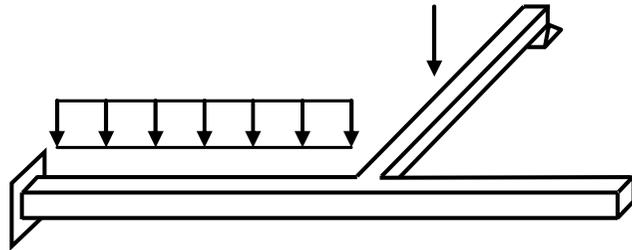


4. Clasificación de las estructuras

EMPARRILLADO PLANO

Se disponen varias vigas en un plano formando una red y las cargas actuantes son perpendiculares a dicho plano.

Las deformaciones son también perpendiculares al plano.



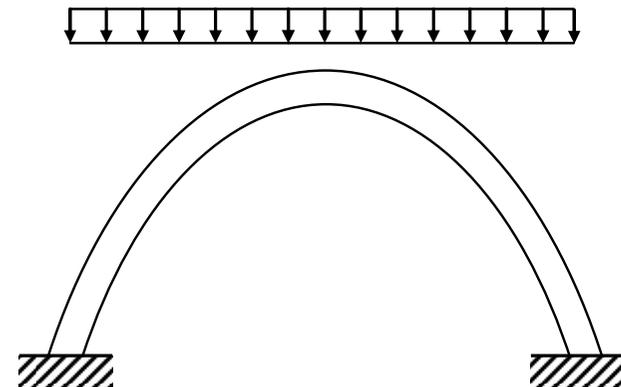
$$\begin{aligned} V_y \neq 0 & \quad V_z \neq 0 & N_x \neq 0 \\ M_z \neq 0 & \quad M_y \neq 0 & M_x \neq 0 \end{aligned}$$

ARCOS

Elemento cuya directriz es curva que trabaja en el plano.

Esta sometido a esfuerzo axial, flector y cortante

$$V_y \neq 0 \quad N_x \neq 0 \quad M_z \neq 0$$

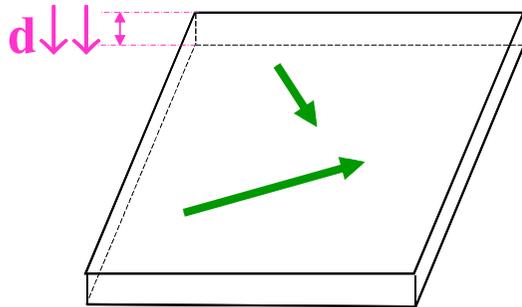




4. Clasificación de las estructuras

4.2. Estructuras continuas

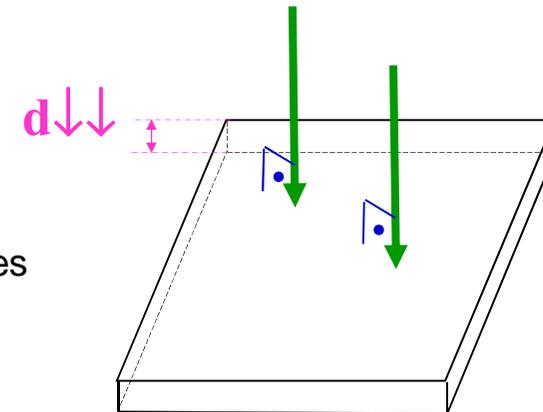
MEMBRANAS PLANAS



material continuo de espesor pequeño frente a sus dimensiones transversales, situado en un plano y con cargas contenidas en él.

PLACA

medio continuo plano de espesor pequeño frente a sus dimensiones transversales, con fuerzas actuantes perpendiculares a su plano.



SÓLIDOS

medios continuos tridimensionales sometidos a un estado general de tensiones y deformaciones.

CÁSCARAS y LÁMINAS

medios continuos curvos, con pequeño espesor cuya superficie directriz es curva.

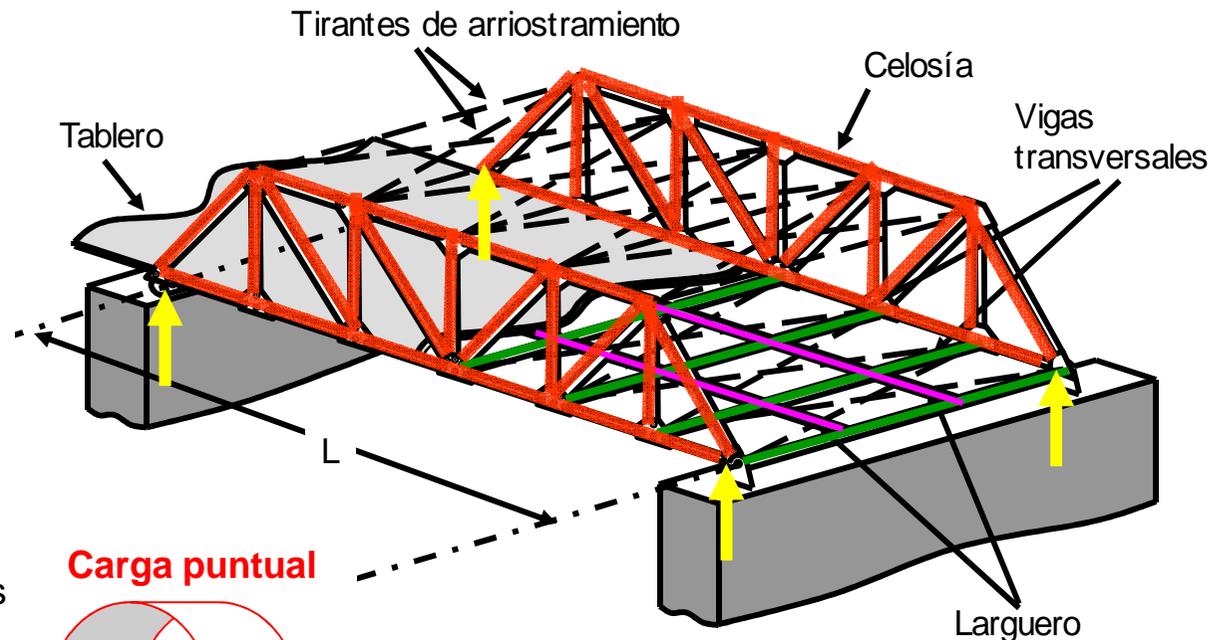


5. Modelos de análisis

Para llevar a cabo el análisis → **modelo matemático simplificado**

En base a la experiencia, comprensión del comportamiento de la estructura y el conocimiento de las prácticas de diseño

a) Estructura plana o espacial



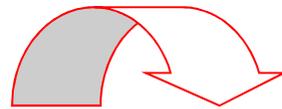
Elementos principales

Para soportar las cargas verticales

CAMINO DE LA CARGA:

Tablero ⇒ Largueros ⇒ vigas transversales ⇒ Celosías ⇒ Apoyos

Carga puntual



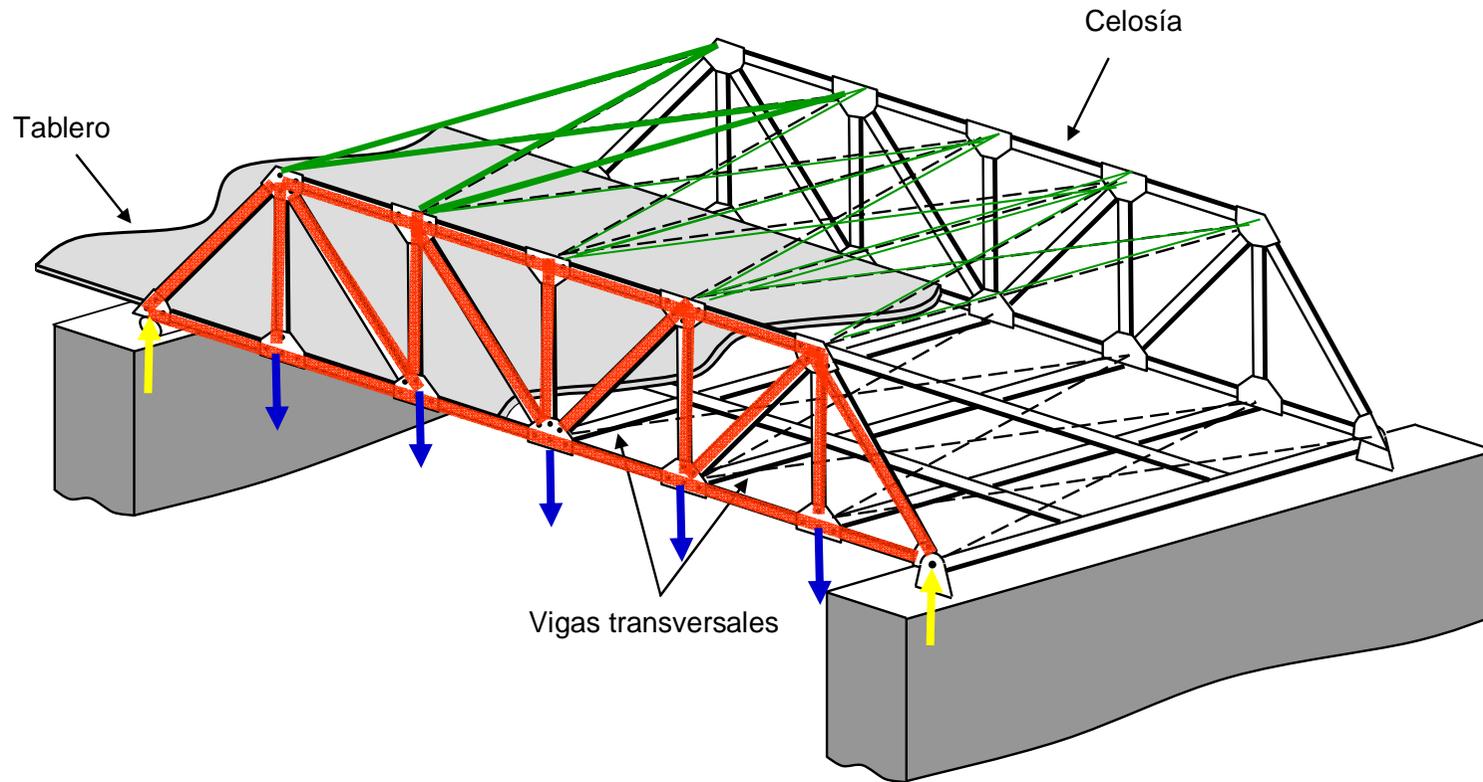
Elementos secundarios

Para soportar las cargas de viento y proporcionar estabilidad

Tirantes de arriostramiento



5. Modelos de análisis

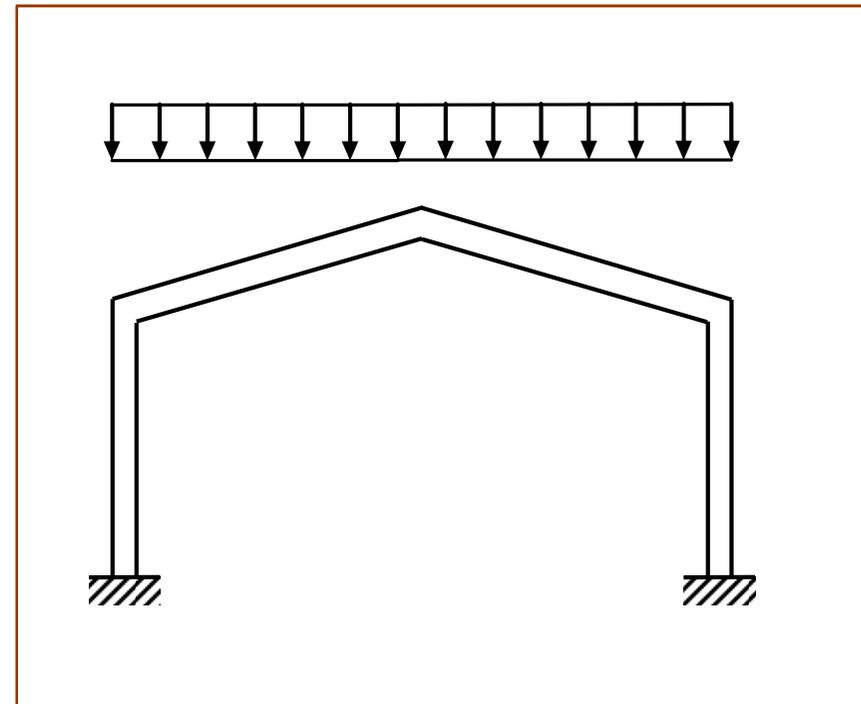
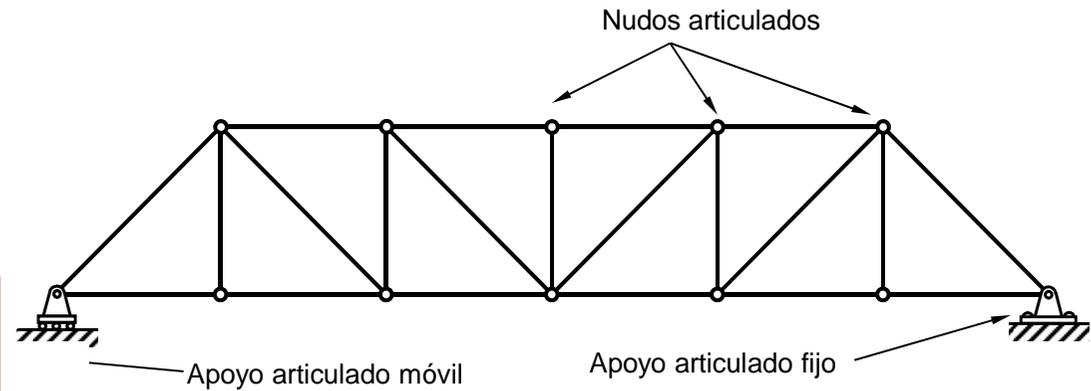
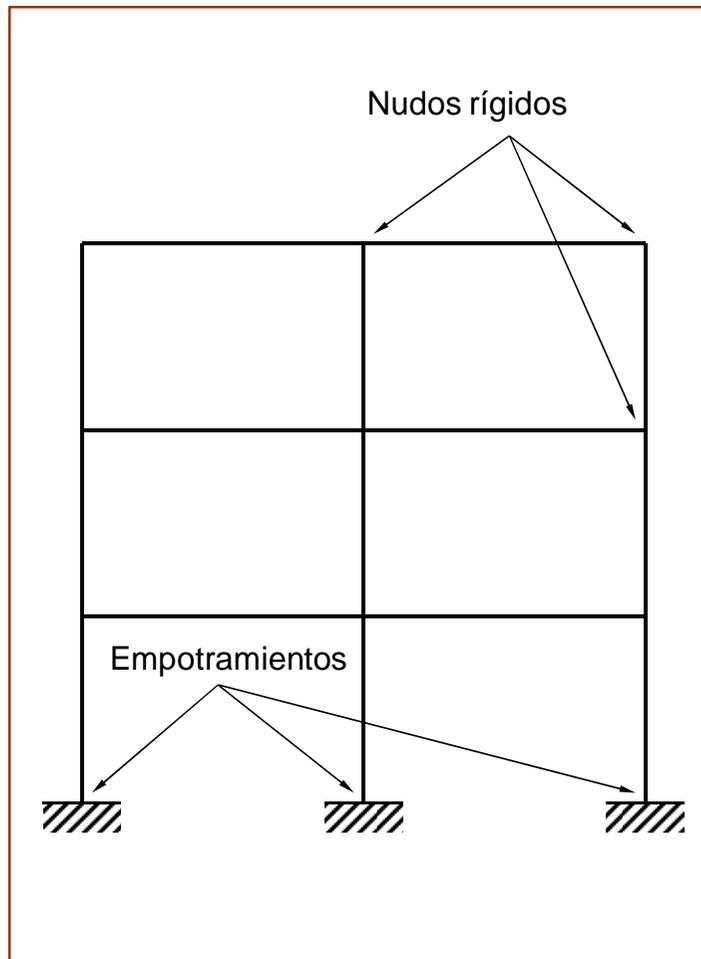




5. Modelos de análisis

b) Diagrama de líneas

Cada elemento se representa mediante una línea, sin indicar su forma y dimensión.

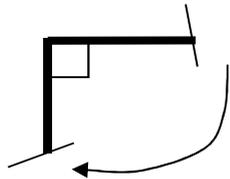




5. Modelos de análisis

c) Uniones y apoyos

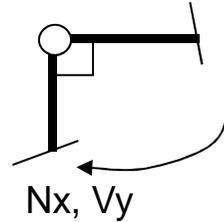
UNIÓN RÍGIDA O EMPOTRAMIENTO



N_x, V_y, M_z

Se transmiten las fuerzas y los momentos
Se mantiene el ángulo

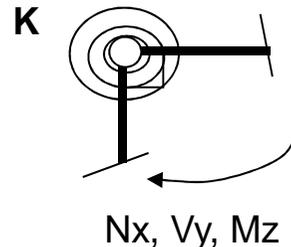
ARTICULACIÓN



Se transmiten las fuerzas, no los momentos

No se mantiene el ángulo

UNIÓN FLEXIBLE



Se transmiten las fuerzas y los momentos en función de una rigidez K

El ángulo no se mantiene y varía en función de K

Las uniones rígidas y articuladas son idealizaciones de las uniones reales.

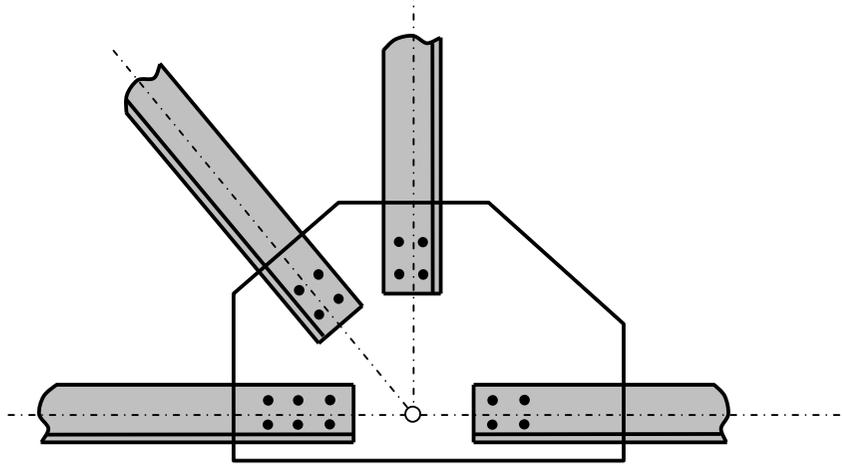
En elementos metálicos las uniones entre elementos son soldadas o atornilladas y es el objetivo del diseñador es conseguir que su comportamiento real sea lo mas próximo a la idealización.

En estructuras de hormigón las uniones se llevan a cabo mediante la prolongación de las barras corrugadas de acero en los nudos y en general se consigue mayor rigidez.

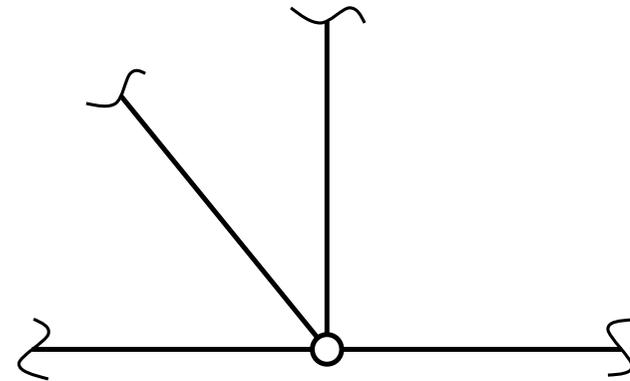


5. Modelos de análisis

EJEMPLO 1



UNIÓN ARTICULADA REAL



UNIÓN ARTICULADA IDEALIZADA

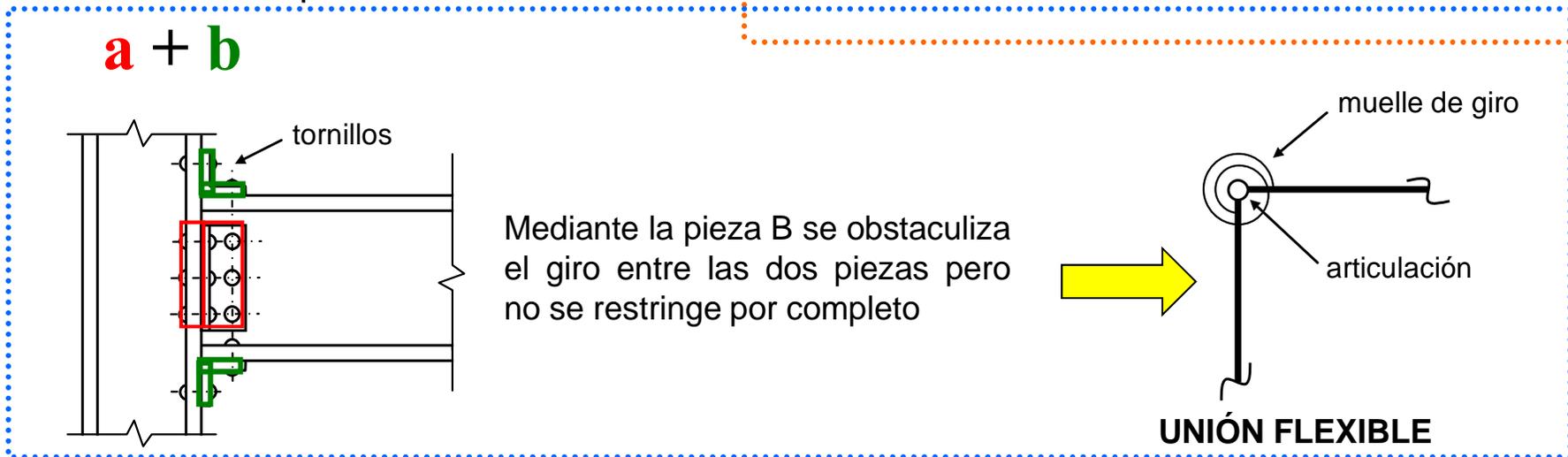
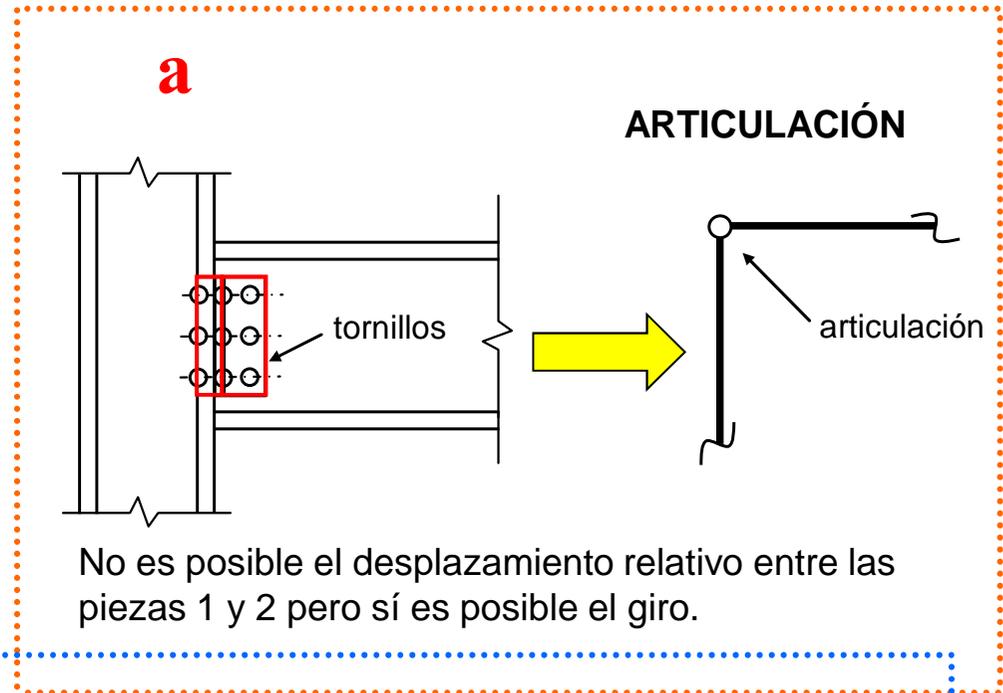
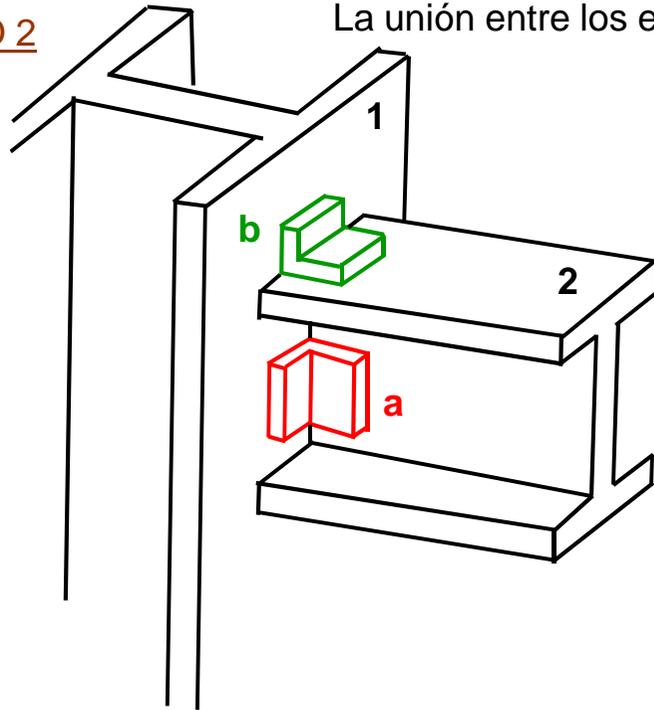
Como los ejes de todas las barras se unen en un único punto no generan momentos en la chapa.



5. Modelos de análisis

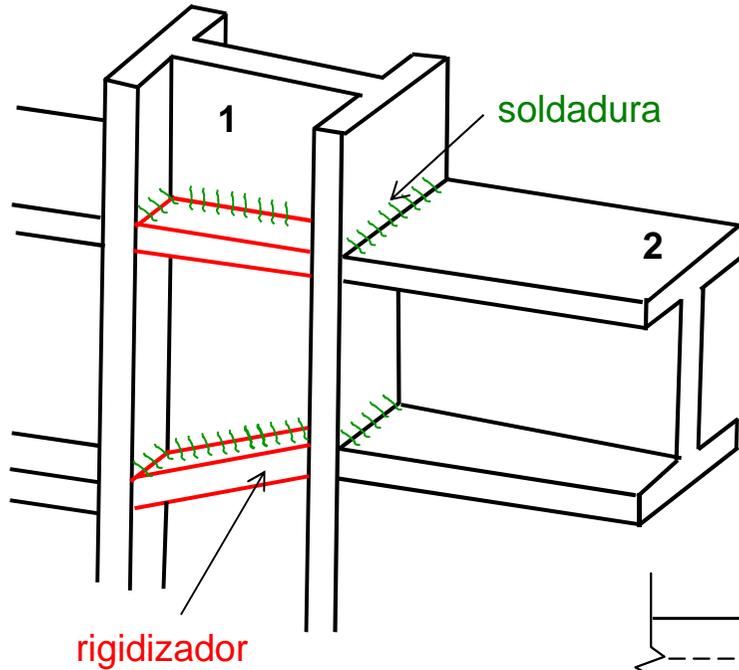
EJEMPLO 2

La unión entre los elementos 1 y 2 puede realizarse de diferentes formas:

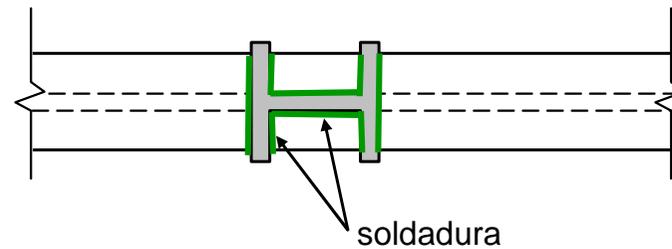




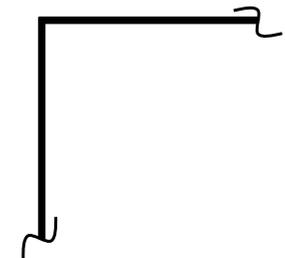
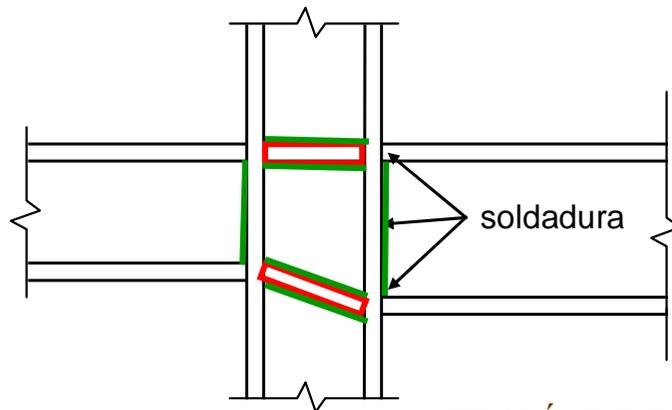
5. Modelos de análisis



Mediante soldadura y rigidizadores la unión es más rígida y se restringe en mayor medida el giro



NUDO RÍGIDO





6. Métodos de análisis

- Analíticos:** se resuelven las ecuaciones del problema directamente → casos sencillos
- Numéricos**
 - Aproximación matemática de la ecuación diferencial
 - Discretización

→ Método de la flexibilidad

(Método de las fuerzas, compatibilidad)

Incógnitas: Fuerzas

$$\{\Delta\} = [D]\{F\}$$

Matriz de flexibilidad

- 1) Equilibrio
- 2) Ley de comportamiento
- 3) Compatibilidad de deformaciones

- [D] depende de las fuerzas
- Hay que escoger las incógnitas hiperestáticas
- Sistema de ecuaciones de dimensiones $h \times h$

→ Método de la rigidez

(Método de los desplazamientos, equilibrio)

Incógnitas: Desplazamientos

$$\{F\} = [K]\{\Delta\}$$

Matriz de rigidez

- 1) Compatibilidad de deformaciones
- 2) Ley de comportamiento
- 3) Equilibrio

- [K] No depende de las fuerzas
- No hay que escoger las incógnitas hiperestáticas
- Dimensión del sistema de ecuaciones grande



7. Condiciones de sustentación

Una estructura, debe estar en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas que actúan sobre ella, entre las que se incluyen tanto las acciones exteriores conocidas, como las reacciones desconocidas en los puntos de sustentación.

En el equilibrio de la estructura juega un papel fundamental la forma en que la estructura se haya unida a la sustentación, que se efectúa habitualmente a través de uno o varios puntos de apoyo, cada uno de los cuales introduce una o varias restricciones al movimiento de la estructura.

Se denomina **condición de ligadura** (o simplemente ligadura, o también condición de apoyo) a una condición que define la deformación en un punto y una dirección dados de la estructura.

Como cada ligadura define la forma en que la estructura puede deformarse en el punto y la dirección donde está aplicada, aparece una fuerza o momento desconocido en la dirección de la ligadura, denomina **fuerza o momento de reacción**. Esta fuerza de reacción es la fuerza que la sustentación debe hacer para que se satisfaga la condición de ligadura.

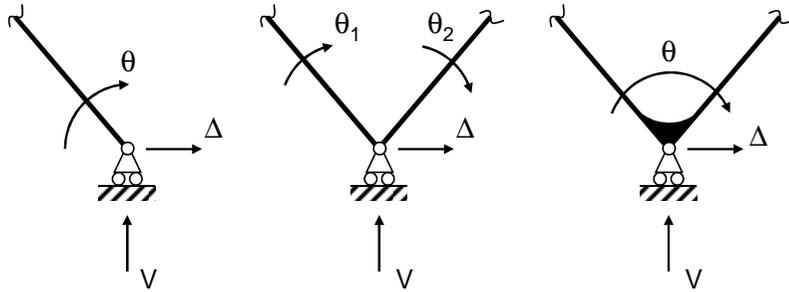
Las ligaduras son direccionales, es decir que cada una de ellas actúa en una sola dirección del espacio. Sin embargo, las condiciones de apoyo habituales de las estructuras hacen que varias ligaduras aparezcan agrupadas, introduciendo simultáneamente varias condiciones de deformación.

Siempre se cumple que en la dirección donde hay una ligadura aplicada se conoce el valor de la deformación (normalmente dicho valor es cero), y se desconoce el valor de la reacción que aparece.

En el caso de desconocerse el valor de la deformación se dice que no hay ninguna ligadura aplicada, y en ese caso se conocerá el valor de la fuerza exterior aplicada en esa dirección, estando la deformación controlada por el comportamiento de la estructura.



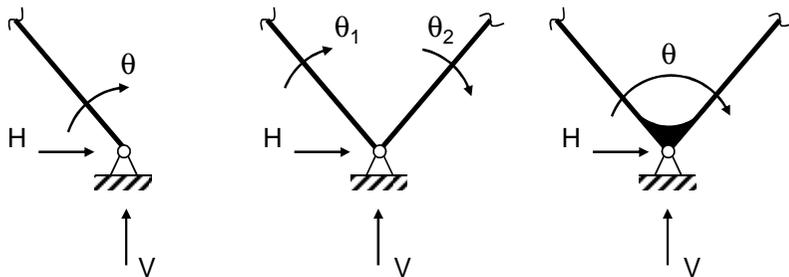
7. Condiciones de sustentación



Apoyo deslizante

Impide el desplazamiento perpendicular a la línea (o plano) de apoyo, y su reacción es una fuerza perpendicular a dicha línea (o plano).

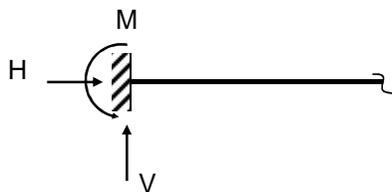
No impide el giro de las barras que se unen al nudo de apoyo.



Apoyo articulado

No permite ningún tipo de desplazamiento y su reacción es una fuerza de dirección arbitraria, que equivale a dos fuerzas según dos ejes ortogonales.

Tampoco impide el giro de las barras que concurren en el nudo de apoyo.

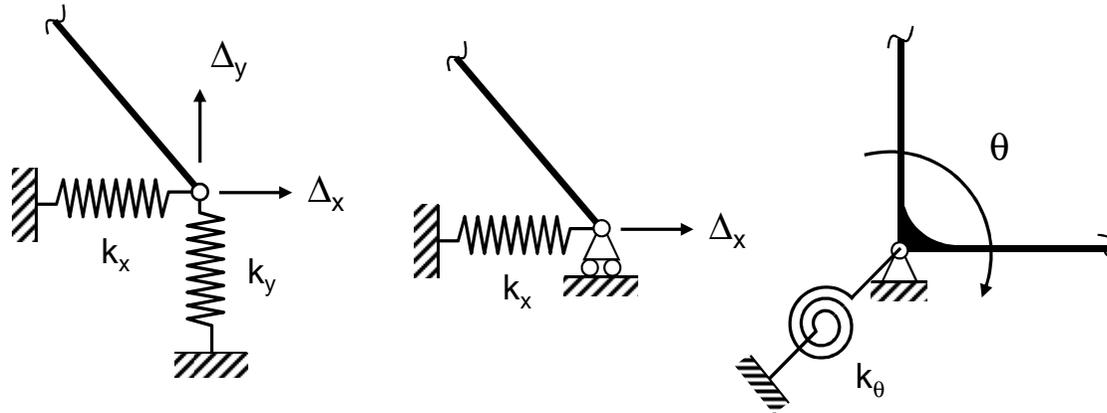


Empotramiento

No permite ningún desplazamiento ni el giro. Su reacción son dos fuerzas (V y H) contenidas en el plano de la estructura, y un momento M perpendicular a él.



7. Condiciones de sustentación



Apoyo flexible

La unión de la estructura a la sustentación se realiza mediante la conexión de esta última a un punto de la estructura mediante uno o varios muelles elástico lineales.

Puede haber constantes de rigidez distintas en cada dirección, pudiendo ser cero en alguna de ellas. Asimismo el apoyo elástico puede coexistir con otras condiciones de ligadura.

No se conocen ni el desplazamiento del nudo ni la fuerza en el muelle, sino únicamente la relación entre ellos, que es la constante de rigidez del muelle: la fuerza en el muelle es proporcional a la deformación del apoyo y la reacción de la sustentación es igual a la fuerza en el muelle.

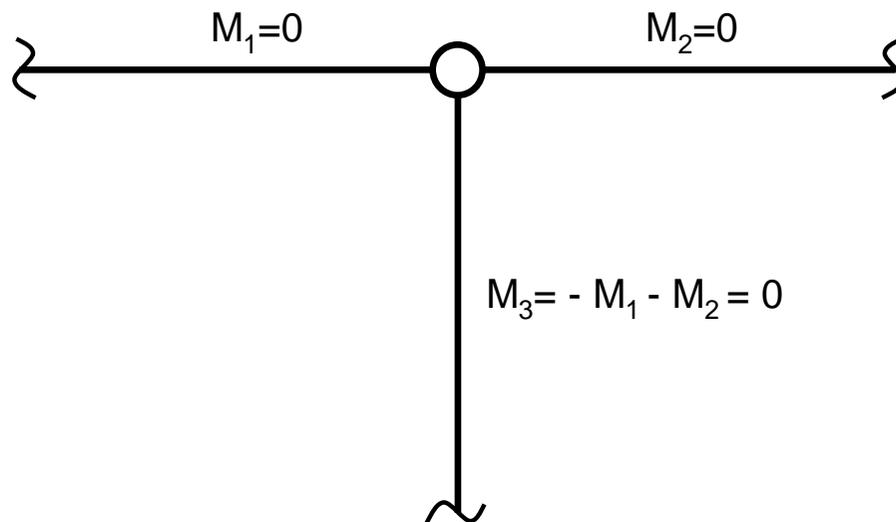


8. Condiciones de construcción

Se denominan **condiciones de construcción (c)**, a las condiciones de esfuerzo nulo impuestas a las uniones entre los elementos de la estructura.

En estructuras planas, la condición de construcción que se presenta más habitualmente es la rótula ($c=1$), que anula el momento flector en las secciones de los elementos que en ella concurren.

En un nudo totalmente articulado de una estructura plana al que llegan n barras, el número de condiciones de construcción es $n-1$. La ecuación n -ésima es la ecuación estática de suma de momentos nulos en el nudo.



$c=2$ (p.e., M_1 y $M_2 = 0$), ya que del equilibrio estático del nudo se deduce que también $M_3 = 0$.



9. Estabilidad y grado de determinación de una estructura

Estructura estáticamente determinada o isostática Cuando todas las fuerzas en una estructura (reacciones y esfuerzos de sección) pueden determinarse empleando única y exclusivamente las ecuaciones de equilibrio.

Estructura estáticamente indeterminada o hiperestática Si el número de fuerzas desconocidas es superior al de ecuaciones de equilibrio. La diferencia entre ambas se le llama grado de hiperestaticidad de la estructura.

Para identificar si una **estructura es isostática o hiperestática externamente** (desde el punto de vista del cálculo de las reacciones en los apoyos), se debe establecer el diagrama de sólido libre de toda ella. En este diagrama se considera a toda la estructura como un sólido rígido, y se sustituyen las ligaduras por sus reacciones correspondientes, con lo que se obtienen tantas incógnitas como reacciones haya, en número r .

Para identificar su **determinación interna** habrá que establecer el diagrama de sólido libre de todos sus elementos o de una parte selectiva de ellos, y comparar el número total de esfuerzos de sección desconocidos con el número de ecuaciones de equilibrio disponibles.

Se considerará únicamente el caso de **inestabilidad estática**, que se presenta cuando la estructura en su conjunto o parte de ella es capaz de experimentar movimientos de sólido rígido bajo las acciones a las que está sometida. Se prescinde de otros tipos de inestabilidades (pandeo, inestabilidad dinámica...).



9. Estabilidad y grado de determinación de una estructura

Se establece el **diagrama de sólido** libre de la estructura.

r número de reacciones en los apoyos

q número de ecuaciones de equilibrio estático (3 en el caso plano y 6 en el espacial)

c número de condiciones de construcción

Según sea la relación entre **r**, **q** y **c** pueden presentarse tres casos diferentes:

1) $r < q + c$

Esta condición es suficiente para expresar que la estructura tiene algún tipo de inestabilidad.



$$r = 2, q = 3, c = 0, (2 < 3 + 0)$$



$$r = 4, q = 3, c = 2, (4 < 3 + 2)$$



$$r = 4, q = 3, c = 2, (4 < 3 + 2)$$



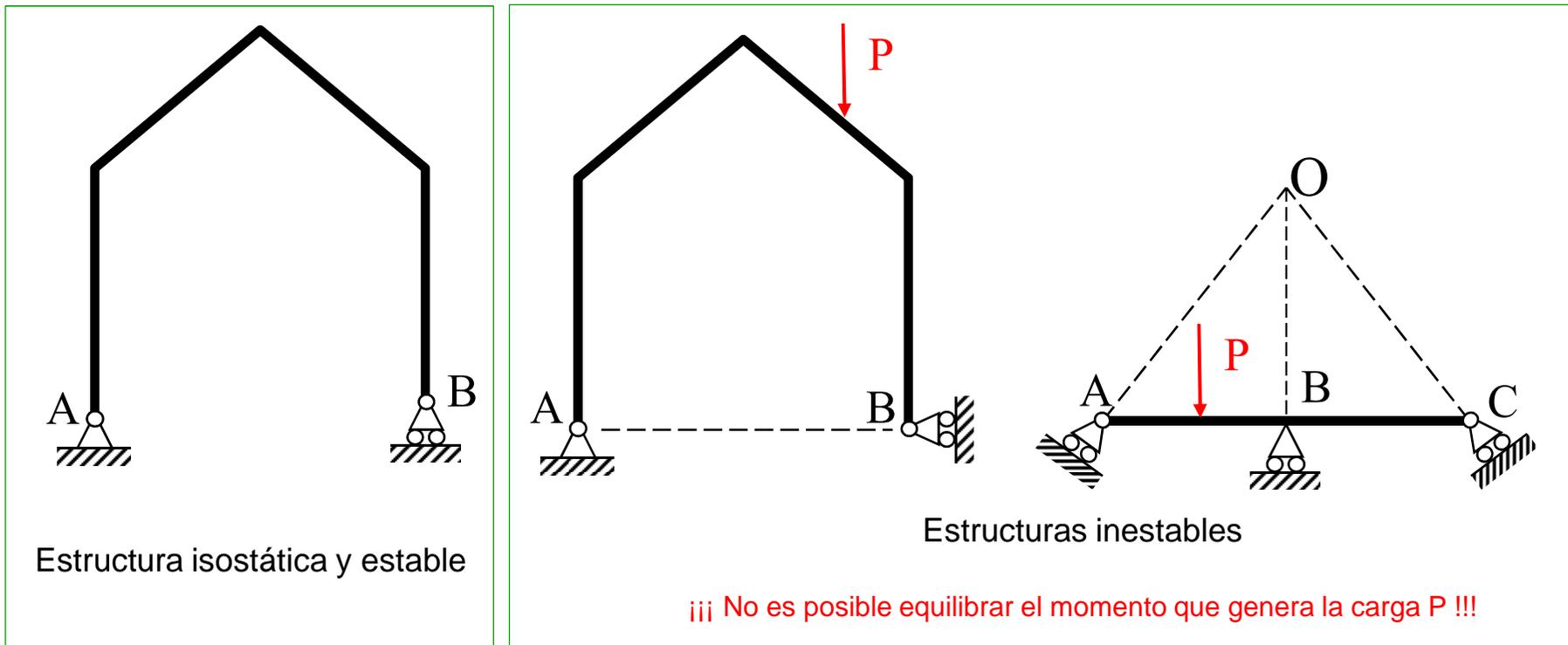
9. Estabilidad y grado de determinación de una estructura

2) $r = q + c$ Estructura isostática.

Condición es necesaria pero no suficiente para garantizar la estabilidad externa de la estructura.

Puede ocurrir que por la disposición geométrica de los apoyos la estructura sea inestable en una determinada dirección (se dice entonces que tiene inestabilidad externa).

Esto ocurre, por ejemplo, en una estructura isostática plana cuando las tres reacciones se cortan en un punto o son paralelas



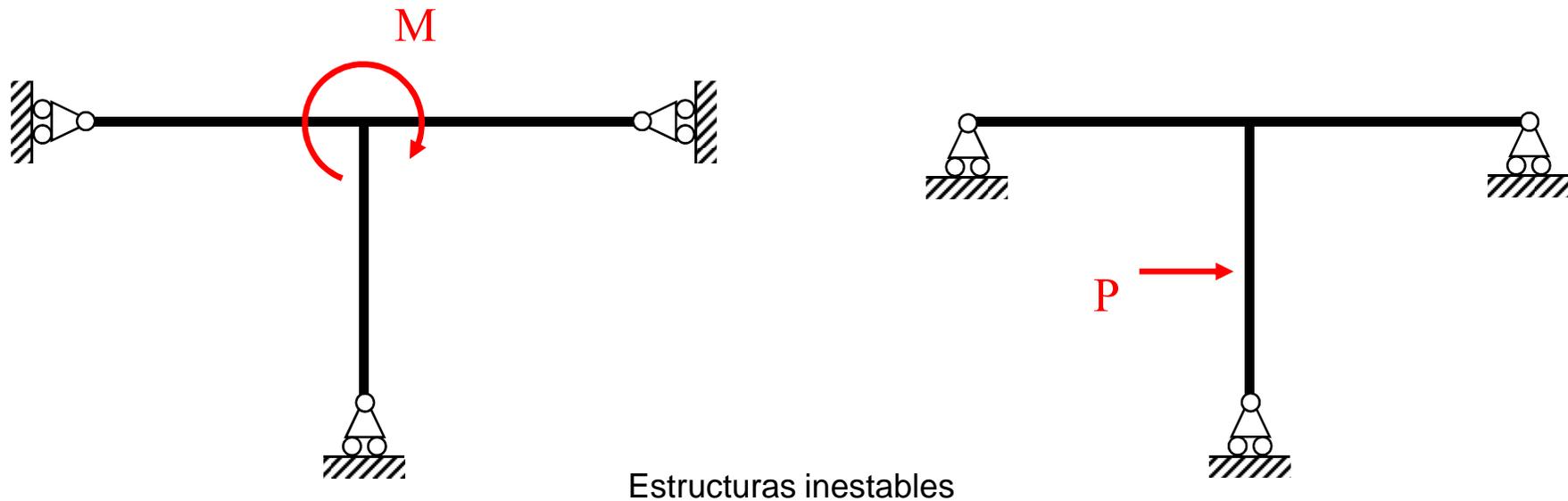


9. Estabilidad y grado de determinación de una estructura

3) $r > q + c$ Estructura hiperestática.

Es necesario añadir condiciones de deformación para calcular las reacciones en los apoyos.

Como en el caso anterior, esta condición es necesaria pero no suficiente: puede ocurrir que aunque haya reacciones en exceso, éstas tengan una disposición espacial tal que no impidan la existencia de algún tipo de inestabilidad en alguna dirección.



!!! No es posible equilibrar el momento M ni la carga P !!!



9. Estabilidad y grado de determinación de una estructura

En los **PÓRTICOS** la mayor parte de las barras están empotradas entre sí, por lo que no suelen presentarse problemas de estabilidad, y el grado de indeterminación estática suele ser muy alto.

b número de barras

n número de nudos

r número de reacciones

c número de condiciones de construcción

número de ecuaciones de la estática

tres ecuaciones de equilibrio por cada nudo

tres ecuaciones de equilibrio por cada barra

c condiciones de construcción

$$3n+3b+c$$

número de fuerzas incógnitas

seis por cada barra (dos fuerzas y un momento en cada extremo)

r reacciones exteriores

$$6b+r$$

Comparando ambas magnitudes, las condiciones de determinación estática y estabilidad del pórtico se resumen en los siguientes casos:

1) **$3b+r < 3n+c$** Pórtico es inestable.

2) **$3b+r = 3n+c$** Pórtico isostático.

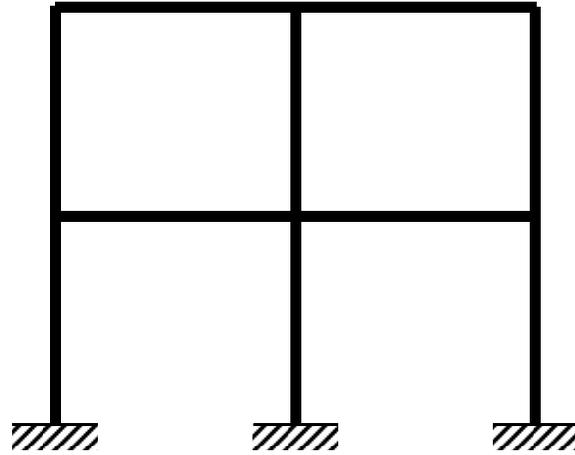
3) **$3b+r > 3n+c$** Pórtico hiperestático (grado de hiperestaticidad es $h=(3b+r)-(3n+c)$)

De estas dos últimas condiciones puede decirse lo mismo que en el caso de vigas. Ambas son necesarias pero no suficientes para garantizar la estabilidad exterior del pórtico en su globalidad, ni la interior en todos los posibles subconjuntos del mismo. Se precisa además que la disposición de las barras y las reacciones sea la adecuada.

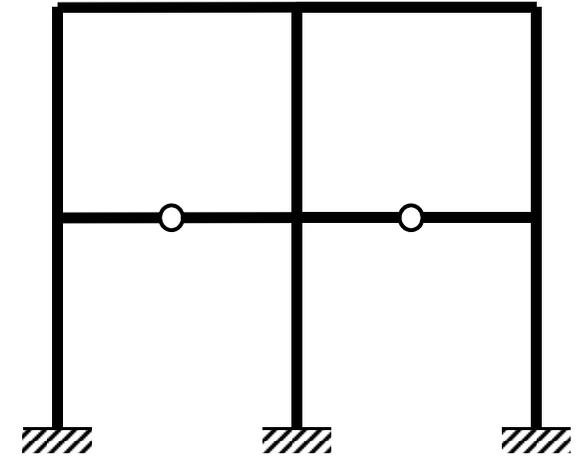


9. Estabilidad y grado de determinación de una estructura

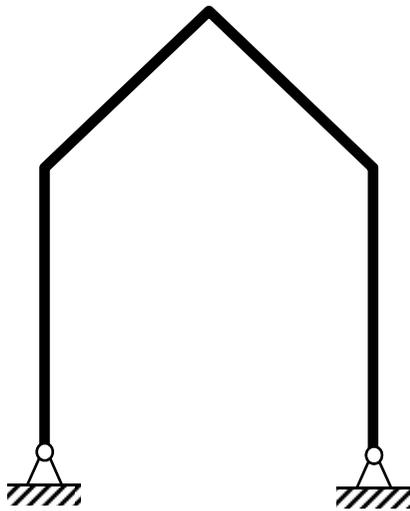
Pórticos hiperestáticos



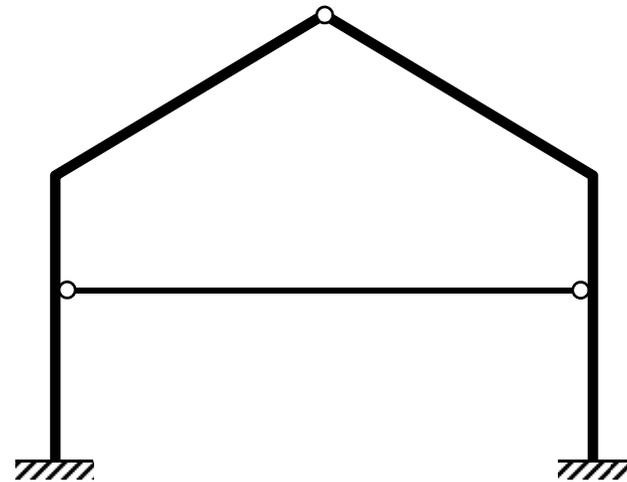
$$b = 10, r = 9, n = 9, c = 0, h = 12$$



$$b = 12, r = 9, n = 11, c = 2, h = 10$$



$$b = 4, r = 4, n = 5, c = 0, h = 1$$



$$b = 7, r = 6, n = 7, c = 3, h = 3$$

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TEMA 1: *INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS*

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA - MEKANIKA INGENIERITZA SAILA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO – EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA UPV/EHU

