Problemas guiados

Leire Legarreta, Luis Martínez
Curso "Elementos básicos de la teoría de grafos"

1. Probar que, si $\mathcal{G}$ es un grafo de orden $n > 1$, entonces tiene por lo menos dos vértices del mismo grado.

   Ayuda: Probarlo por inducción sobre n. Suponiendo que no es cierto para n, probar que tiene un vértice aislado y aplicar la hipótesis de inducción para obtener una contradicción.

2. Probar que un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de orden impar.

   Ayuda: Basta probarlo para grafos conexos. Si es bipartito, obviamente no tiene ciclos de orden impar. Para probar el recíproco, si definimos la distancia entre dos vértices de un grafo conexo como la menor de las longitudes de los caminos que los unen, probar que si un grafo conexo no tiene ciclos de orden impar y fijamos un vértice cualquiera u, el grafo es bipartito con partes A y B donde A está formado por los vértices que están a una distancia par de u y B por los vértices que están a una distancia impar de u.

3. Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos grafos eulerianos conexos sin vértices comunes. Sean u_1 un vértice de $\mathcal{G}_1$ y u_2 un vértice de $\mathcal{G}_2$. Sea $\mathcal{G}$ el grafo consistente en la unión de los vértices y aristas de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ y la arista u_1u_2. ¿Qué se puede decir sobre $\mathcal{G}$?

   Ayuda: Tener en cuenta la paridad de los grados de los vértices del nuevo grafo.

4. Se define el grafo de líneas de un grafo $\mathcal{G} = (V, A)$ como el grafo $L(\mathcal{G})$ que tiene como conjunto de vértices el conjunto A de aristas de $\mathcal{G}$, y donde dos vértices de $L(G)$ son adyacentes cuando, considerados como aristas de $\mathcal{G}$, tienen un extremo en común. Probar que, si $\mathcal{G}$ es un grafo euleriano, entonces $L(\mathcal{G})$ es hamiltoniano.

   Ayuda: Probar que un circuito euleriano de $\mathcal{G}$ es un ciclo hamiltoniano de $L(\mathcal{G})$.

5. Probar que todo árbol de orden mayor que uno es bipartito.

   Ayuda: Utilizar lo probado en el problema 2.

6. Si dos grafos planares tienen el mismo número de vértices, aristas y caras, ¿tienen que ser ambos grafos isomorfos?

   Ayuda: Considerar dos árboles del mismo orden.

7. Probar que, si $\mathcal{G}$ es un grafo de orden n, entonces $\chi(\mathcal{G}) = 1$ si y sólo si $\mathcal{G}$ es isomorfo a E_n, y $\chi(\mathcal{G}) = n$ si y sólo si $\mathcal{G}$ es isomorfo a K_n.

8. Si A es un conjunto y $S_1, ..., S_n$ son subconjuntos de A, un sistema de representantes distintos de $S_1, ..., S_n$ es un subconjunto B de A que cumple que cada S_i tiene exactamente un elemento en común con B. Probar que, dados $S_1, ..., S_n$, existe un sistema de representantes distintos para dichos subconjuntos si y sólo si, para cada i de $\{1, ..., n\}$, la unión de cualesquiera i conjuntos seleccionados de entre los $S_1, ..., S_n$ tiene cardinal mayor o igual que i.

Ayuda: Aplicar el teorema de Hall a un grafo bipartito apropiado en que las dos partes sean $S_1, ..., S_n$ y A, respectivamente.