Sentikortasunaren analisia. Ariketak

1. Izan bitez honako eredu lineala eta dagokion taula optimoa:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 10 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &\le 16 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	2	0	2	1	0	18
$\mathbf{a}_1$	1	2	0	3	−1	0	2
$\mathbf{a}_3$	0	−1	1	−2	1	0	2
$\mathbf{a}_6$	0	−1	0	−1	−1	1	2

1.1 Ondoko aldaketa diskretuek taula optimoan sortzen duten eragina azter ezazu. Aldaketa bakoitzerako kalkula ezazu eredu berriaren soluzio optimoa.

1.1.1 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$

1.1.2 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$

1.1.3 $\mathbf{c}^T = (4\ \ 1\ \ 5) \rightarrow \hat{\mathbf{c}}^T = (3\ \ 3\ \ 5)$

1.1.4 $\mathbf{c}^T = (4\ \ 1\ \ 5) \rightarrow \hat{\mathbf{c}}^T = (5\ \ 1\ \ 7)$

1.1.5 $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.1.6 $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.1.7 Aldagai berria: x_4 $\quad c_4 = 6 \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

1.1.8 Aldagai berria: x_4 $\quad c_4 = 3 \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.1.9 Murrizketa berria: $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 8$

1.1.10 Murrizketa berria: $4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$

1.2 Kalkula itzazu itzal-prezioak.

1.3 Esan **c** eta **b** bektoreetako osagai bakoitza zein balio tartetan mugi daitekeen, beti ere emandako taula optimoko oinarriak optimo izaten jarraituko duelarik.

2. Izan bitez honako eredu lineala eta dagokion taula optimoa:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 14 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	0	1	0	1	2	26
$\mathbf{a}_4$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	5
$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-1	1
$\mathbf{a}_1$	1	0	3	0	$-\frac{1}{2}$	2	5

2.1 Ondoko aldaketa diskretuek taula optimoan sortzen duten eragina azter ezazu. Aldaketa bakoitzerako kalkula ezazu eredu berriaren soluzio optimoa.

2.1.1 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

2.1.2 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overset{\wedge}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$

2.1.3 $\mathbf{c}^T = (4 \;\; 6 \;\; 5) \quad \rightarrow \quad \overset{\wedge}{\mathbf{c}}^T = (6 \;\; 8 \;\; 2)$

2.1.4 $\mathbf{c}^T = (4 \;\; 6 \;\; 5) \quad \rightarrow \quad \overset{\wedge}{\mathbf{c}}^T = (4 \;\; 6 \;\; 9)$

2.1.5 $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overset{\wedge}{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.1.6 $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \overset{\wedge}{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.1.7 Aldagai berria: x_4 $\qquad c_4 = 2 \qquad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.1.8 Aldagai berria: x_4 $\qquad c_4 = 5 \qquad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.1.9 Murrizketa berria: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

2.1.10 Murrizketa berria: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$

2.2 Kalkula itzazu itzal-prezioak.

2.3 Esan **c** eta **b** bektoreetako osagai bakoitza zein balio tartetan mugi daitekeen, beti ere emandako taula optimoko oinarriak optimo izaten jarraituko duelarik.

3. Sukaldaritzako hiru liburu moten diseinuak egin nahi ditu argitaletxe batek: L_1, L_2 eta L_3. Horretarako sukaldaritzako hiru alorretan adituak diren sukaldariak kontratatu ditu: eguneko menuan adituak 40, postre berezietan adituak 20 eta pintxoetan adituak 10. L_1 motako liburuen diseinuetan denetariko errezetak agertuko dira. L_2 motako liburuetan, aldiz, ez da pintxoen errezetarik agertuko, eta L_3 motakoetan ez da postrerik egongo. Mota bakoitzeko liburuen diseinuak egiteko bost sukaldariz osatutako lan-taldeak behar dira, sukaldari-adituen boskoteak taulan adierazten den moduan multzokatuko direlarik.

	Sukaldari-adituak		
Liburu mota	Eguneko menuan	Postreetan	Pintxoetan
L_1	2	2	1
L_2	4	1	0
L_3	4	0	1
Adituak guztira	40	20	10

Boskote bakoitzak L_i motako liburu baten diseinua egingo du. Guztira dagoen sukaldari-aditu kopurua kontuan hartuz erabaki beharko da zenbat boskote osa daitezkeen, eta ondorioz, L_i motako zenbat liburu diseinatuko diren.

Honako erabaki aldagaiak definitu dira:

$$x_i : \text{diseinatuko den } L_i \text{ motako liburu kopurua}, (i = 1, 2, 3).$$

Merkatuan hiru liburu motek irabazi berbera sortzen dute. Argitaletxearen helburua diseinatutako liburuek sortutako irabazia maximizatzea da. Ondoko eredu lineala idatzi da problema adierazteko, eta murrizketa bakoitzean nasaitze-aldagai bat gehituz eta eredua ebatziz taula optimoa lortu da:

$$\begin{array}{ll}
\max & z = x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{hauen mende} & \\
& 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 40 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
& x_1 + x_3 \leq 10 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	14
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	4
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	2

3.1 Eredu lineala eta dagokion taula optimoa aztertuz esan L_i motako liburuen diseinuak egiteko zenbat boskote osa daitezkeen, eta ondorioz, zenbat libururen diseinua egingo den. Zein izango da lortuko den z irabazia?

3.2 Sukaldariren bat gelditu al da inongo boskotetan parte hartu gabe?

3.3 L_1 motako liburuek merkatuan sortutako irabazia L_2 edo L_3 motakoek sortutakoaren bikoitza bada, $c_1 = 2$, aldatuko al da diseinatuko den L_i motako liburu kopurua? Eta, hirukoitza bada, $c_1 = 3$? Zenbaterainoko handia izan daiteke c_1, diseinatuko den L_i motako liburu kopurua ez aldatzeko?

3.4 Postreetan adituak 20 izan beharrean 30 badira, liburu mota bakoitzaren diseinuak egiteko osatuko diren boskote kopuruak aldatu egingo dira. L_i motako zenbat liburu diseinatuko da kasu horretan? Zein izango da lortuko den z irabazia?

4. Enpresa batean oinarrizko hiru pintura-kolore erabiliz (gorria, urdina eta horia) azken urteotan modan jarri diren beste lau kolore sortzen dira: K_1, K_2, K_3 eta K_4. Enpresan 26 kg pintura gorri, 14 kg urdin eta 32 kg hori dago erabilgarri. Nahasketak honela egiten dira:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Kilo bat } K_1 \text{ sortzeko} & \rightarrow & \frac{1}{2} \text{ kg gorri} + \frac{1}{4} \text{ kg urdin} + \frac{1}{4} \text{ kg hori} \\
\text{Kilo bat } K_2 \text{ sortzeko} & \rightarrow & \frac{3}{8} \text{ kg gorri} + \frac{1}{4} \text{ kg urdin} + \frac{3}{8} \text{ kg hori} \\
\text{Kilo bat } K_3 \text{ sortzeko} & \rightarrow & \frac{1}{3} \text{ kg gorri} + \frac{1}{3} \text{ kg urdin} + \frac{1}{3} \text{ kg hori} \\
\text{Kilo bat } K_4 \text{ sortzeko} & \rightarrow & \frac{3}{10} \text{ kg gorri} + \frac{2}{5} \text{ kg urdin} + \frac{3}{10} \text{ kg hori}
\end{array}$$

Enpresako arduradunak badaki K_1, K_2, K_3 eta K_4 pintura kilo bakoitzak 3, 4, 1 eta 6 monetar unitateko irabazia emango diola, hurrenez hurren. Ez dakiena hau da: K_1, K_2, K_3 eta K_4 koloreak zein kantitatetan sortzea komeni zaion irabazia maximoa izan dadin. Horretarako problema eredu lineal baten bidez adierazi eta ebatzi du. Hona hemen eredua eta dagokion taula optimoa:

$$\begin{aligned} \max\ z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 & \\ \text{hauen mende} & \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{3}{10}x_4 &\leq 26 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{2}{5}x_4 &\leq 14 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{3}{10}x_4 &\leq 32 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	1	0	$\frac{13}{3}$	$\frac{2}{5}$	0	16	0	224
$\mathbf{a}_5$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	5
$\mathbf{a}_2$	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	0	4	0	56
$\mathbf{a}_7$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	11

4.1 Taula optimoa aztertuz, esan al daiteke oinarrizko koloreak (gorria, urdina, horia) kantitate egokian erosten dituela? Nola alda daitezke kantitate horiek irabazia handitzeko? Itzal-prezioak kalkula itzazu eta arrazona ezazu zure erantzuna.

4.2 Pintura urdin gutxi erosten duela susmatzen du arduradunak. Gehienez zenbat eros dezake taula osoa birkalkulatzeko beharrik izan gabe?

4.3 Demagun pintura urdin gehiago eta pintura gorri eta hori gutxiago erostea erabaki duela. Honela aldatu nahi ditu erositako pintura kilo kantitateak.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 26 \\ 14 \\ 32 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko pinturak kantitate horietan izanik, K_1, K_2, K_3 eta K_4 koloreak zein kantitatetan ekoiztea komeni zaio irabazia maximizatzeko?