A. ALJEBRA LINEALA. MULTZO GANBILAK

1. Matrizeak eta bektoreak
   - 1.1 Matrize-eragiketak
   - 1.2 Matrize baten heina
2. Ekuazio linealen sistemen ebazpena
   - 2.1 Oinarriko soluzioak
3. Bektore-espazioak
   - 3.1 Mendekotasun eta independentzia lineala
   - 3.2 Oinarria eta dimentsioa
4. Multzo ganbilak
5. Mutur-puntuak eta oinarriko soluzio bideragarriak

1. Matrizeak eta bektoreak

$\mathbb{R}$ gorputza izanik, $\mathbb{R}$-ko elementuak eskalarrak dira.

$m \times n$ tamainako edo dimentsioko $\mathbf{A}$ matrizea:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zutabe bakarreko matrizea, $m \times 1$, zutabe-bektoretzat har daiteke.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

1.1 Matrize-eragiketak

Batuketa

$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eta $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizeak izanik, $\mathbf{A}$-ko eta $\mathbf{B}$-ko elementuak elementuz elementu batuz lortzen da $m \times n$ tamainako $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizea:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Batuketaren propietateak

1. Matrizeen arteko batuketa barne-eragiketa da $\mathbb{R}^{m\times n}$ espazioan.

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

2. Matrizeen arteko batuketa trukakorra da.

$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

3. Matrizeen arteko batuketa elkarkorra da.

$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

4. Matrizeen arteko batuketak elementu neutroa dauka, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

5. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrize orok badu $-\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ aurkakoa.

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Matrizeen eta eskalarren arteko biderketa

$\alpha \in \mathbb{R}$ eskalarraren eta $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizearen arteko biderketa $\mathbf{A}$ matrizearen elementu guztiak α eskalarraz biderkatuz kalkulatzen da. Emaitza

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

matrizea da.

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n.$$

Bektoreen biderketa eskalarra

$\mathbf{a}^T$ errenkada-bektorearen eta $\mathbf{b}$ zutabe-bektorearen biderkadura eskalarra $\mathbf{a}^T$ bektoreko elementu bakoitza $\mathbf{b}$ bektorean dagokion elementuarekin biderkatuz eta emaitzak batuz kalkulatzen da. Emaitza eskalar bat da.

$$\mathbf{a}^T = (a_1 \;\; \cdots \;\; a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (a_1 \;\; \cdots \;\; a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i.$$

Matrizeen arteko biderketa

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizearen eta $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ matrizearen arteko biderkadura $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ matrizea da.

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ matrizeko (i, j) elementua $\mathbf{A}$ matrizeko i. errenkadaren eta $\mathbf{B}$ matrizeko j. zutabearen arteko biderkadura da, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$.

Matrizeen arteko biderketaren propietateak

1. Elkarkorra. $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})$ $(\forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p})$ $(\forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times q})$
$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$
2. Banakorra batuketarekiko.
$$(\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}.$$
$$(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})\ (\forall \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}) \quad \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}.$$
3. $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{0}_{n\times p} = \mathbf{0}_{m\times p}, \quad \mathbf{0}_{q\times m} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}_{q\times n}.$
4. $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}) \quad \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A}.$
5. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ $(\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})$ $(\forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p})$,
$$\alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{B}).$$

1.2 Matrize baten heina

Definizioa 1 *Izan bitez* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *matrizea, eta Gaussen ezabapena erabiliz lortutako* $\mathbf{U}$ *matrize mailakatua.* $\mathbf{U}$ *matrizearen pibot kopurua (errenkada ez-nuluen kopurua)* $\mathbf{A}$ *matrizearen heina dela esango dugu, eta rang* $\mathbf{A}$ *notazioaz adieraziko dugu.*

2. Ekuazio linealen sistemen ebazpena

Izan bedi m ekuazio eta n ezezagun dituen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ekuazio-sistema non $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, rang $\mathbf{A} = r$ eta $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}$ baitira. Kasu hauek gerta daitezke:

* rang $\mathbf{A} \neq$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$ bada, sistemak ez du soluziorik; bateraezina da.

* rang $\mathbf{A} =$ rang $(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = r$ bada, sistemak badu soluziorik.

    * $r =$ ezezagun kopurua bada, sistemak soluzio bakarra dauka.

    * $r <$ ezezagun kopurua bada, sistemak infinitu soluzio ditu.

2.1. Oinarriko soluzioak

Izan bedi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ekuazio-sistema, non $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ den, $m < n$ eta rang $\mathbf{A} =$ rang $(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}) = m$ betetzen den.

$\mathbf{A}$ matrizean zutabe guztiak linealki independenteak dituen $m \times m$ tamainako $\mathbf{B}$ azpimatrize bat aukeratuz eta gainerako zutabeek osatzen duten azpimatrizeari $\mathbf{N}$ deituz, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ekuazio-sistema honela idatz daiteke:

$$(\mathbf{B}\ \ \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

edo baita honela ere:

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}.$$

$\mathbf{B}$ matrizeari dagozkion aldagaiak: oinarriko aldagaiak.
$\mathbf{N}$ matrizeari dagozkionak: aldagai askeak.

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} - \mathbf{Nx}_N.$$

Aldagai aske guztiei zero balioa emanez, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ eginez, soluzio bakarra duen sistema hau lortzen da:

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}.$$

Soluzio horri oinarriko soluzio deitzen zaio.

Egon daitekeen oinarri kopuru maximoa hau da:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

3. Bektore-espazioak

Definizioa 2 (Konbinazio lineala) *Izan bitez $\mathbb{R}^m$ bektore-espazioko $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_n$ bektoreak eta $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eskalarrak.*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

moduko adierazpenari bektoreen arteko konbinazio lineala esaten zaio.

3.1 Mendekotasun eta independentzia lineala

Definizioa 3 *$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ bektoreak linealki independenteak dira baldin $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ konbinazio lineala bete dadin, aukera bakarra eskalar guztiak zero izatea bada, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Definizioa 4 *$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ bektoreak linealki mendekoak direla esaten da baldin $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ konbinazio lineala aurkitzea posible bada gutxienez α_i eskalar bat zeroren desberdina izanik.*

3.2 Oinarria eta dimentsioa

Definizioa 5 *$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$ bektore-multzoa $\mathbb{R}^m$ espazioaren multzo sortzailea dela esaten da baldin $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ bektore oro S multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan idatz badaiteke, hau da,*

$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ *eskalarrak non* $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p$.

Definizioa 6 *Izan bedi $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ bektore-multzoa. $\mathbb{R}^m$ bektore-espazioan B oinarria dela esaten da baldin:*

- *B-ko bektoreak linealki independenteak badira eta*
- *B multzoa $\mathbb{R}^m$ espazioaren multzo sortzailea bada.*

Oinarri guztiek bektore kopuru berbera dute. Bektore-espazio baten dimentsioa oinarri batean dagoen bektore kopurua da.

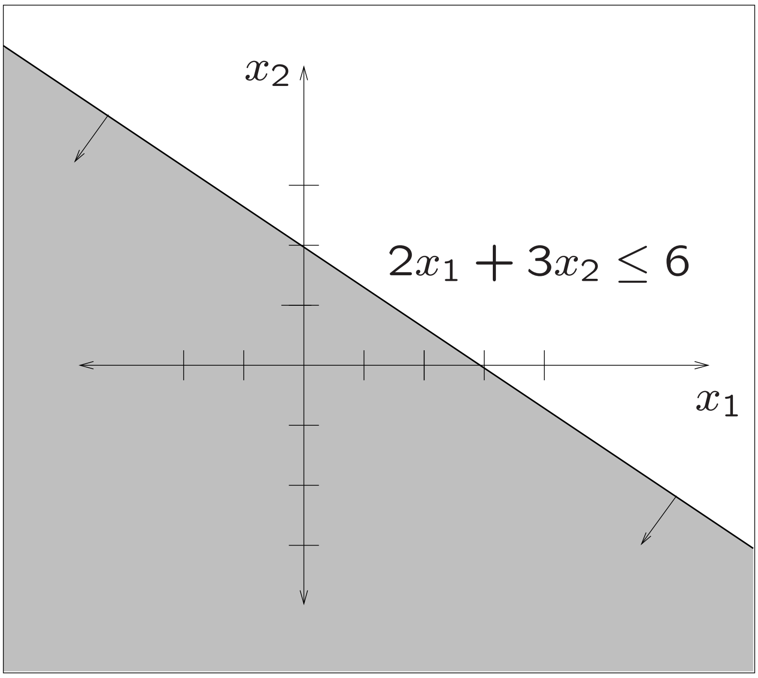
Teorema 1 *Izan bedi $\mathbb{R}^m$ espazioko $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ oinarria. Edozein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ bektore idatz daiteke $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ bektoreen konbinazio lineal moduan, eta konbinazio lineal horren koefizienteak bakarrak dira.*

Teorema 2 *$\mathbb{R}^m$ espazioko B oinarri bat eta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ bektore bat izanik, $\mathbf{v} \notin B$ eta $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, beti da posible beste oinarri bat lortzea B-ko bektoreren bat $\mathbf{v}$ bektoreaz ordezkatuz.*

4. Multzo ganbilak

$a_1x_1 + a_2x_2 = c$ ekuazioa: a_1, a_2 eta c konstanteak izanik, zuzen bat $\mathbb{R}^2$ espazioan.

$a_1x_1 + a_2x_2 \leq c$ inekuazioa: $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ zuzeneko puntuak eta zuzenaren alde batekoak.



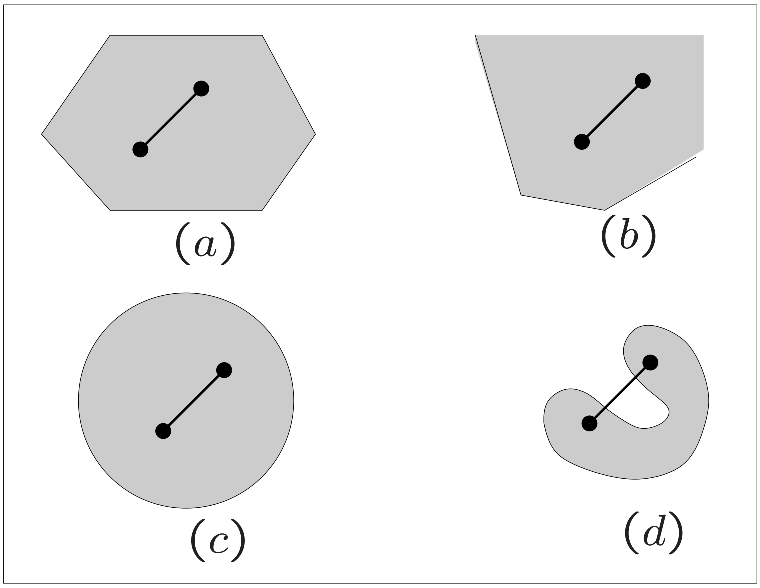
$a_1x_1 + a_2x_2 \leq c$ edo $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$ puntuen multzoak: $\mathbb{R}^2$ espazioko planoerdi itxia.

$\mathbb{R}^n$-n, $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ ekuazioa, $a_1, \ldots, a_n$ eta c konstanteak izanik: hiperplanoa.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq c$ edo $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq c$ puntuen multzoak: espazioerdi itxia $\mathbb{R}^n$-n.

Definizioa 7 *$\mathbb{R}^n$ espazioko C azpimultzoa multzo ganbila da baldin multzo hutsa bada, multzoak puntu bakarra badu edo multzoko edozein bi puntutarako, bi puntuak lotzen dituen segmentua multzoaren barnean badago.*

Irudian, (a), (b) eta (c) multzok ganbilak, (d) ez.



Froga daiteke: (1) Hiperplanoa multzo ganbila da. (2) Espazioerdi itxia multzo ganbila da. (3) Multzo ganbil kopuru finituaren arteko ebakidura multzo ganbila da.

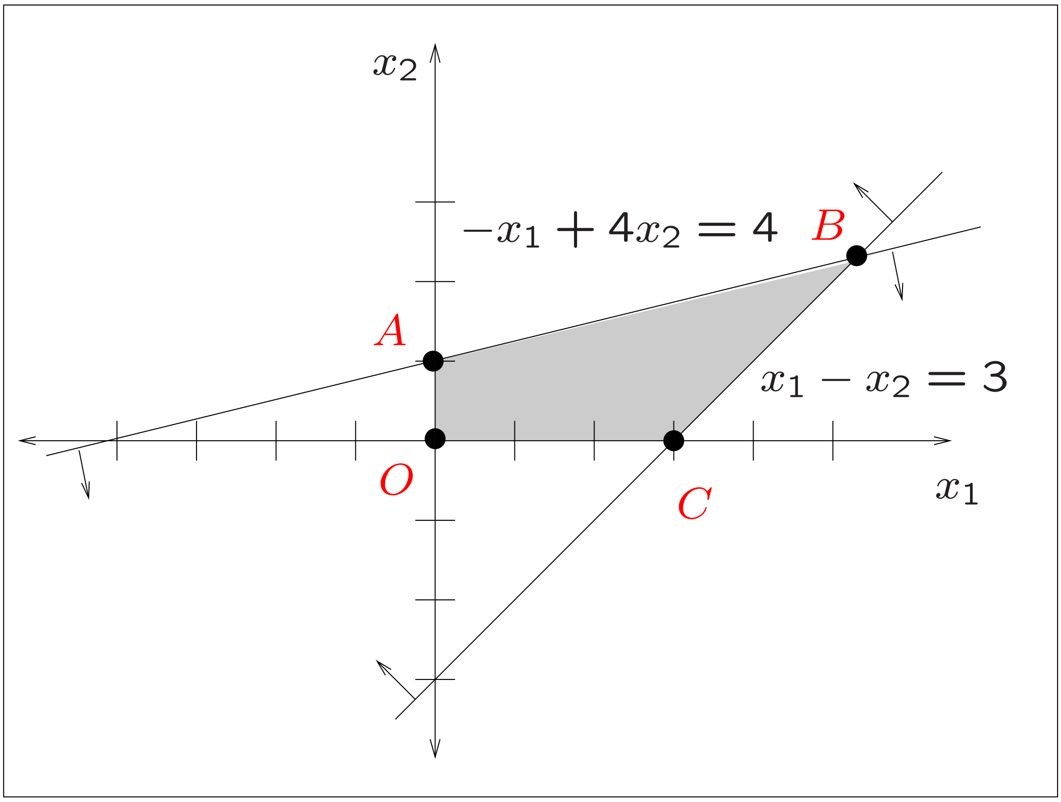
Eredu linealen azterketan agertzen diren soluzioen multzoak hiperplanoak, espazioerdi itxiak eta beraien arteko ebaki-multzoak dira; guztiak multzo ganbilak.

5. Mutur-puntuak, oinarriko soluzio bideragarriak

Inekuazio linealen sistema bat, $x_1 \geq 0$ eta $x_2 \geq 0$ izanik:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

Lau espazioerdi itxi horien ebakidura: multzo ganbil itxia (poligonoa). Erpinak: mutur-puntuak.



$$O = (0, 0), \quad A = (0, 1), \quad B = (\tfrac{16}{3}, \tfrac{7}{3}), \quad C = (3, 0).$$

Bi inekuazioak ekuazio bihurtu x_3 eta x_4 aldagai ez-negatiboak gehituz.

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 4 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Oinarriko soluzioak kalkulatu, eta osagaiak zero baino handiagoak edo berdinak dituztenak aukeratu; horiek dira soluzioen poligonoaren mutur-puntuak.

- $x_3 = x_4 = 0$, $-x_1+4x_2 = 4$ eta $x_1-x_2 = 3$ askatu. $x_1 = \frac{16}{3}$ eta $x_2 = \frac{7}{3}$. Grafikoko B mutur-puntua.

- $x_2 = x_4 = 0$, $-x_1 + x_3 = 4$, $x_1 = 3$ askatu: $x_1 = 3$ eta $x_3 = 7$. Grafikoko C mutur-puntua.

- $x_2 = x_3 = 0$, $-x_1 = 4$, $x_1+x_4 = 3$ askatu: $x_1 = -4$ eta $x_4 = 7$. Ez dagokio soluzioen poligonoaren mutur-puntu bati.

- $x_1 = x_4 = 0$, $4x_2 + x_3 = 4$, $-x_2 = 3$ askatu: $x_2 = -3$ eta $x_3 = 16$. Ez dagokio soluzioen poligonoaren mutur-puntu bati.

- $x_1 = x_3 = 0$, $4x_2 = 4$, $-x_2+x_4 = 3$ askatu. $x_2 = 1$ eta $x_4 = 4$. Grafikoko A mutur-puntua.

- $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$ $x_4 = 3$ askatu. $x_3 = 4$ eta $x_4 = 3$. Grafikoko O mutur-puntua.