6. PROGRAMAZIO OSOA

1. Programazio osoaren aplikazio batzuk

2. Problema osoen ebazpena

3. Problema osoen ebazpide grafikoa

4. Adarkatze- eta bornatze-metodoa

   4.1 Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa

5. 0-1 programazio osoa

   5.1 0-1 adarkatze- eta bornatze-algoritmoa

Programazio Osoa

Eredu lineal osoaren aldagai batzuk edo guztiek balio osoak hartu behar dituzte.

Murrizketa horrek problemaren soluzio optimoaren kalkulua zaildu egiten du.

Hiru motako eredu lineal osoak:

- Programazio oso mistoan aldagaiak bai oso eta bai erreal izan daitezke.
- Programazio oso hutsean aldagai guztiak osoak dira.
- 0-1 programazio osoko ereduetan aldagai guztiak bitarrak dira.

1. Programazio osoaren aplikazio batzuk

1. Adibidea. Langile beharrak:

Eguna	Langileak
1. Astelehena	15
2. Asteartea	13
3. Asteazkena	15
4. Osteguna	18
5. Ostirala	14
6. Larunbata	16
7. Igandea	10

Langile bakoitzak 5 egunez jarraian lan, 2 egunez atseden.

Langile kopuru minimoa kontratatu. Erabaki-aldagaiak:

x_j : j egunean lanean hasiko diren langileak, $j = 1, \ldots, 7$.

$$
\begin{aligned}
\text{min } z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{hauen mende} & \\
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &\geq 18 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 14 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 16 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0 \text{ eta osoak}
\end{aligned}
$$

2. Adibidea. Motxilaren problema

Gehienez 12 kg eramateko ahalmena duen motxila bat zenbait objektuz bete nahi dugu. Lau objektu ditugu:

	1	2	3	4
Pisua (kg)	3	6	5	5
Balioa (euro)	15	25	12	10

Erabaki behar da zein objektu sartu motxilan bere balio-totala maximizatzeko.

Erabaki-aldagaiak j objektuetarako, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{baldin } j \text{ objektua motxilan sartzen bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

Eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max\ z = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

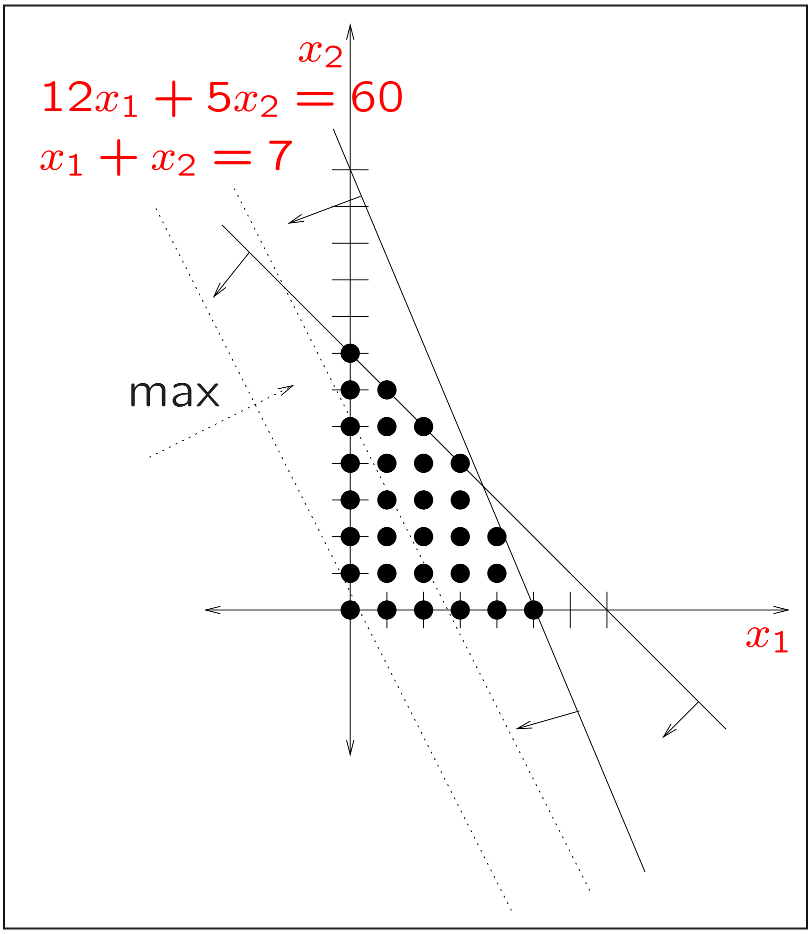
2. Problema osoen ebazpena

Eredu lineal osoak ebaztean zailtasunak sortzen dira.

Adibidea:

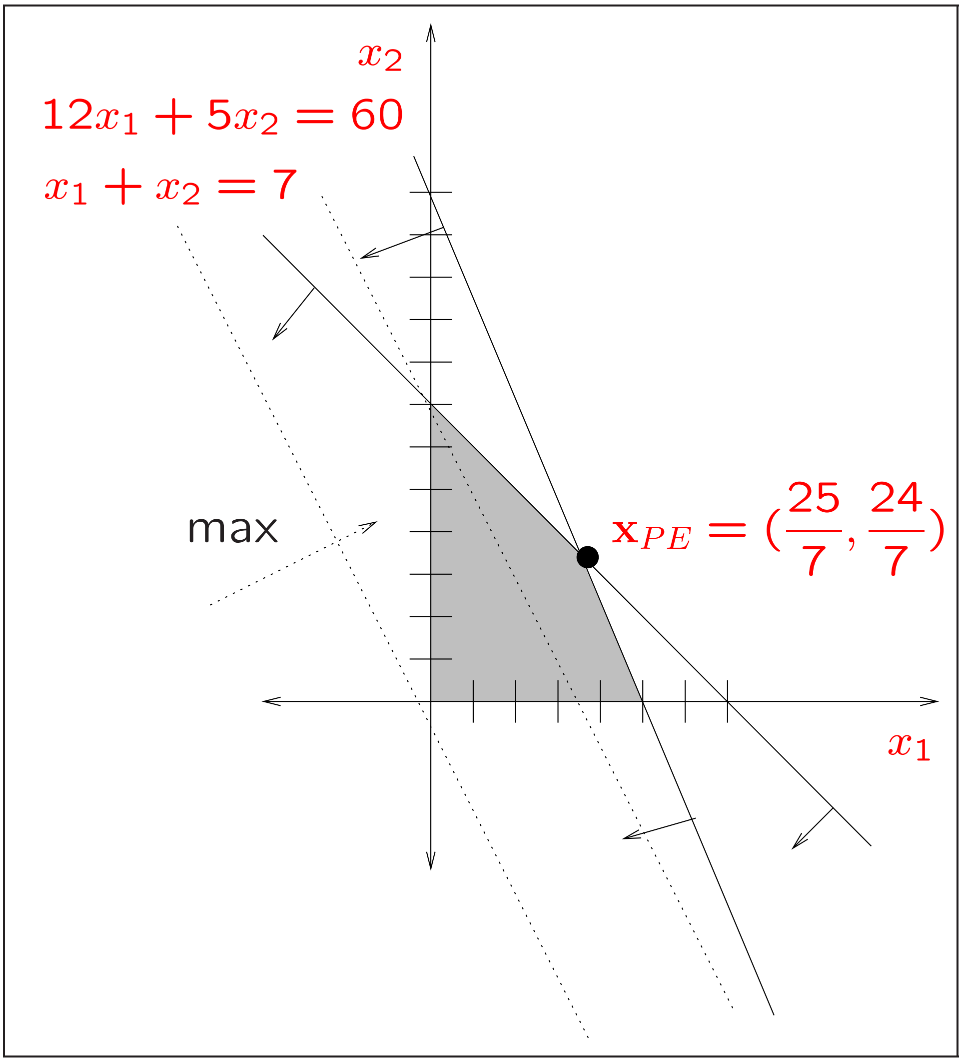
$$\begin{aligned} \text{max}\ \ z = 80x_1 + 45x_2 \\ \text{hauen mende} \qquad \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{aligned}$$

Eredu lineal osoaren soluzioen multzoa:



Aldagaiek oso izateko duten murrizketa kenduta geratzen den problema: problema erlaxatua

Problema osoen ebazpena problema erlaxatuen ebazpenaren bidez egiten da.



3. Problema osoen ebazpide grafikoa

Problema erlaxatuaren(PE) soluzio optimoa:

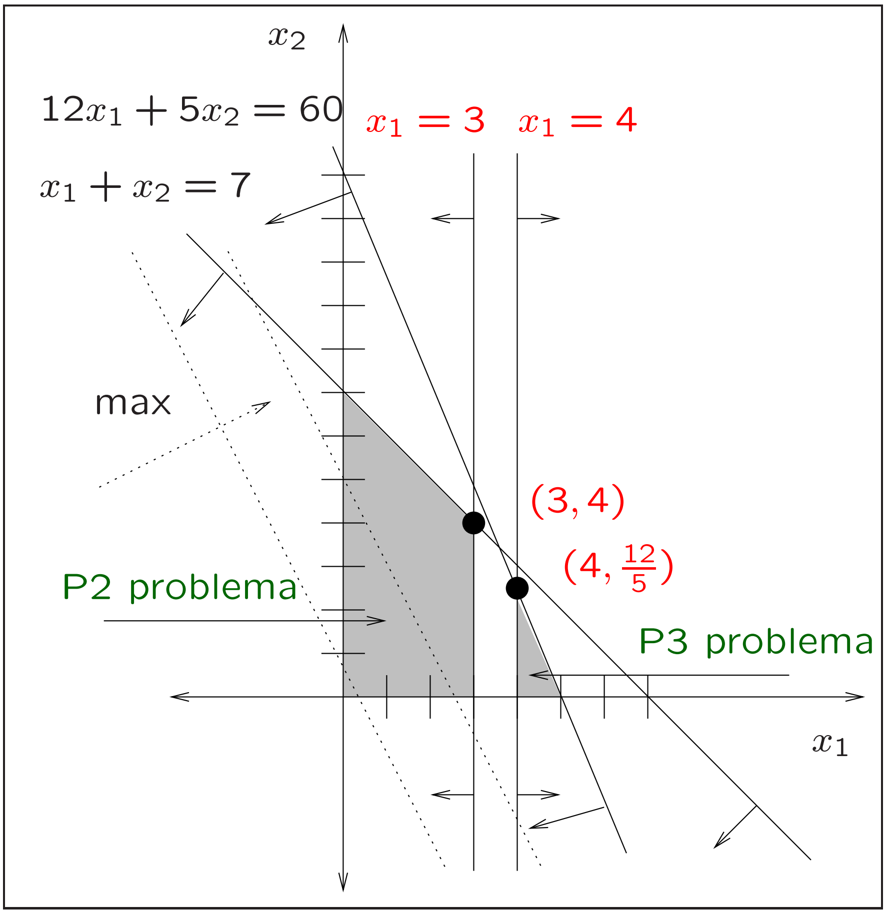
$$\mathbf{x}_{PE} = (3.571, 3.428)$$

<u>P2 problema</u>

$$\begin{aligned} \max\ \ z = 80x_1 + 45x_2 & \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

<u>P3 problema</u>

$$\begin{aligned} \max\ \ z = 80x_1 + 45x_2 & \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



P2 azkenekoa. $\mathbf{x}_{P2}$ soluziogaia $\rightarrow z_b = 420$.

P3 problema ez da azkenekoa: $z_{P3} = 428$.

P4 problema

max $z = 80x_1 + 45x_2$

hauen mende

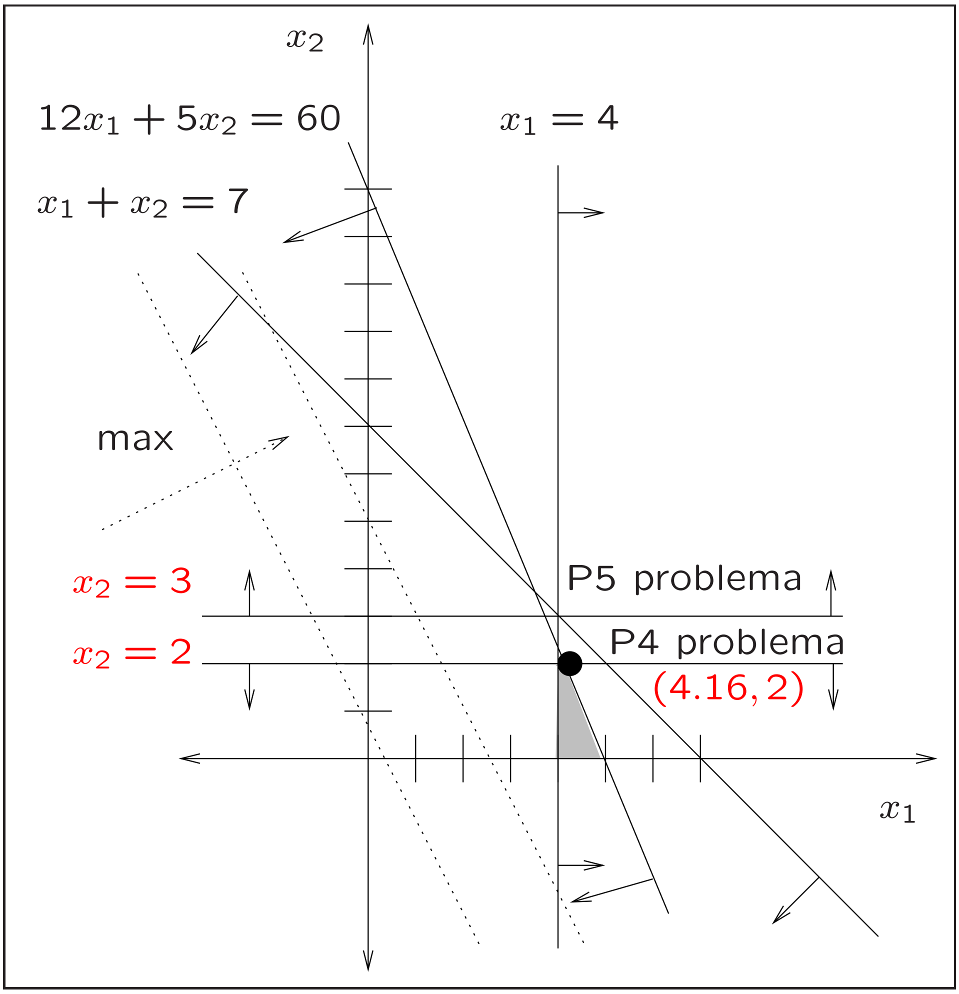
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1 \geq 4,\ \ x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

P5 problema

max $z = 80x_1 + 45x_2$

hauen mende

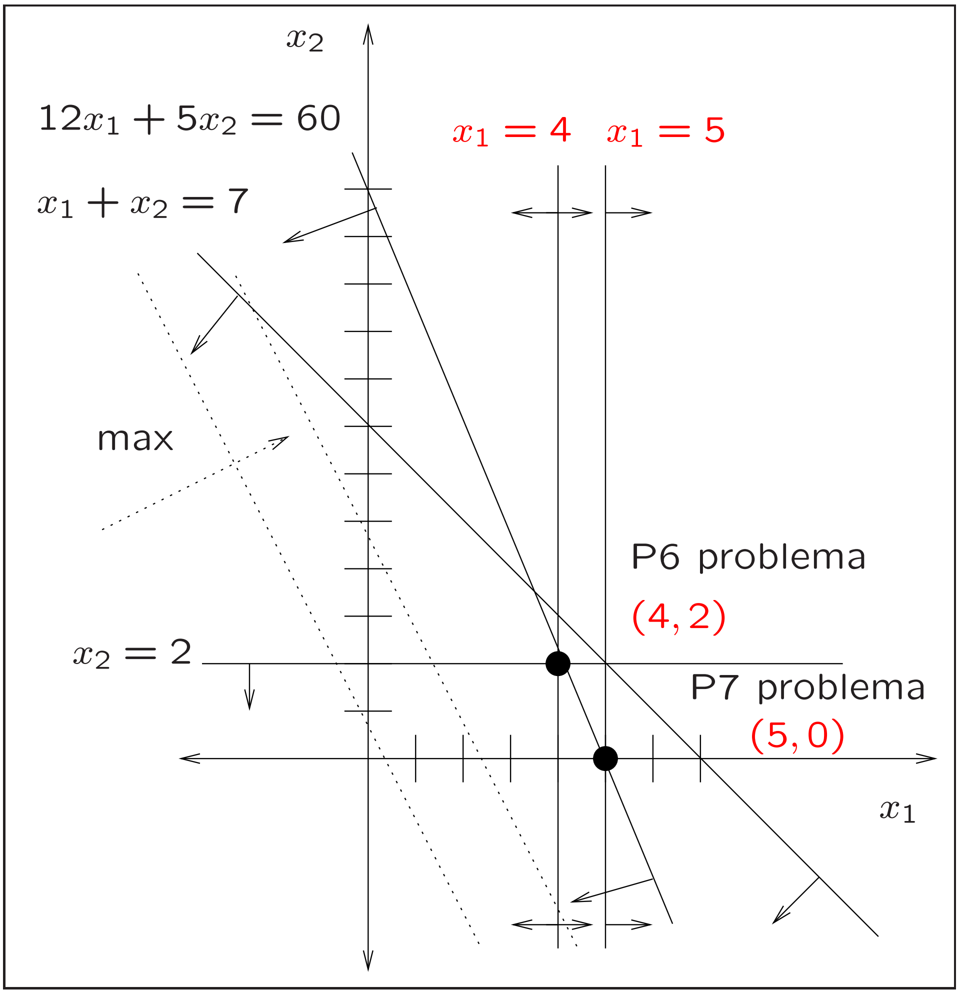
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1 \geq 4,\ \ x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



P5 problema azkenekoa da. Bideraezina.

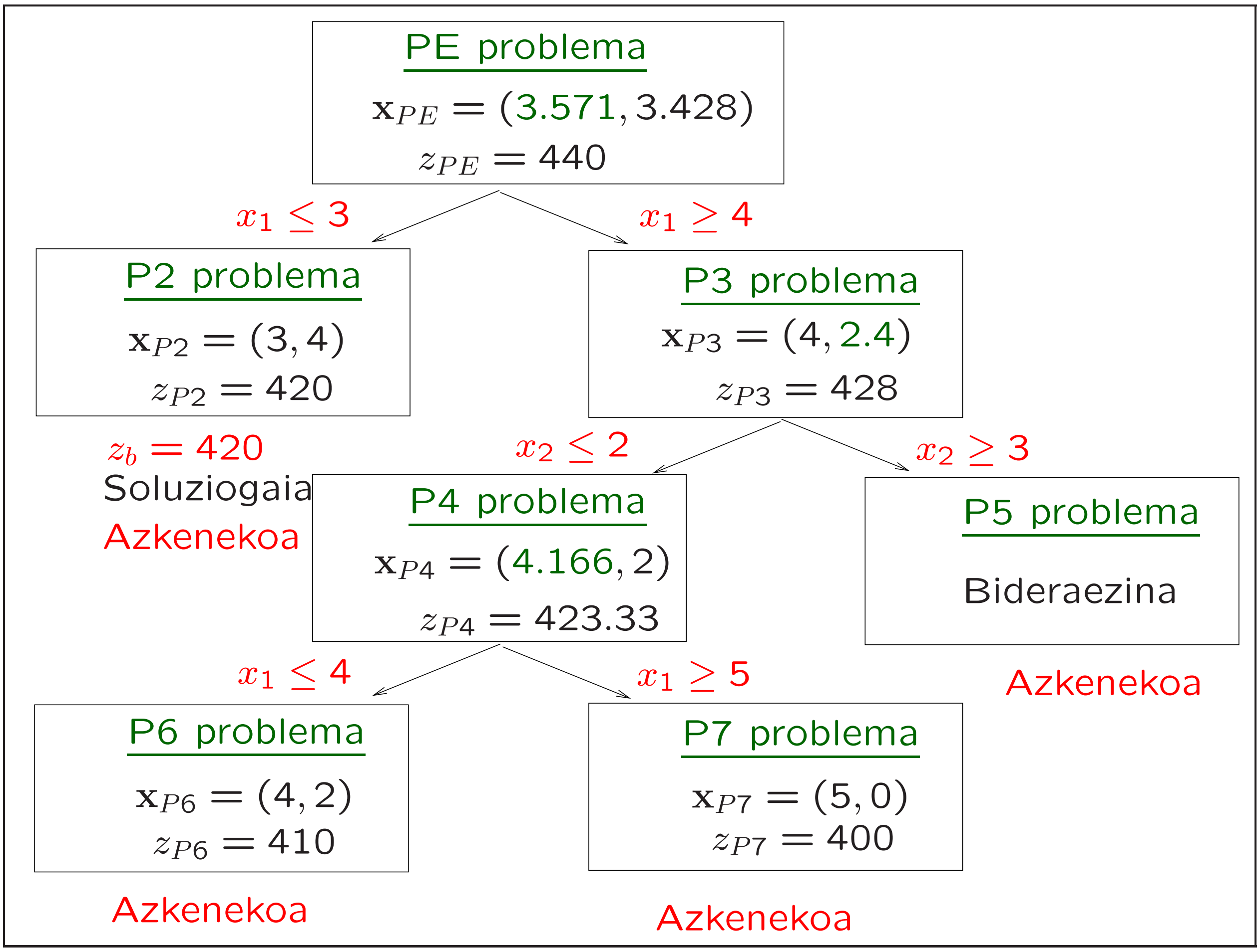
P4: $\mathbf{x}_{P4} = (4.166, 2)$, $z_{P4} = 423.33 > z_b = 420$.

P6 problema	P7 problema
max $z = 80x_1 + 45x_2$	max $z = 80x_1 + 45x_2$
hauen mende	hauen mende
$x_1 + x_2 \leq 7$	$x_1 + x_2 \leq 7$
$12x_1 + 5x_2 \leq 60$	$12x_1 + 5x_2 \leq 60$
$x_1 \geq 4,\ x_2 \leq 2,\ x_1 \leq 4$	$x_1 \geq 4, x_2 \leq 2, x_1 \geq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$



$\mathbf{x}_{P6} = (4, 2), \qquad z_{P6} = 410 < z_b = 420 \rightarrow$ P6 azkeneko

$\mathbf{x}_{P7} = (5, 0), \qquad z_{P7} = 400 < z_b = 420 \rightarrow$ P7 azkeneko



Problema osoaren soluzio optimoa:

$$\mathbf{x}^*_{PO} = \mathbf{x}_{P2} = (x_1^*, x_2^*) = (3, 4)$$

$$z^*_{PO} = z_b = 420$$

4. Adarkatze- eta bornatze-metodoa

1. Definizioa (Problema erlaxatua) *Problema lineal oso bat emanik, aldagaiak osoak izatearen murrizketa kenduta lortzen den ereduari problema erlaxatua esaten zaio.*

Problema Osoa: PO	Problema Erlaxatua: PE
max $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	max $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$
hauen mende	hauen mende
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ eta osoa	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

2. Definizioa (Soluziogaia) *Problema oso bat izanik, problemaren ebazpenaren iterazio bakoitzean ordura arte lortutako soluzio oso onenak soluziogai izena hartzen du.*

3. Definizioa (Azkeneko problema) *Problema oso bat ebazterakoan, ondoko baldintzetako bat betetzen duen problema erlaxatu oro azkeneko problema dela esaten da: (1) bideraezina bada, (2) helburu funtzioaren balio optimoa z_b behe-bornea baino txikiagoa edo berdina bada, (3) soluzioa osoa bada.*

Adarkatze- eta bornatze-algoritmoan, problema erlaxatu bakoitzaren helburu funtzioaren balio optimoa z_g notazioaz adieraziko dugu; problema osoaren balio optimorako goi-borne bat finkatuko du adarrean.

4.1 Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa

Helburua maximizatzea.

1. **urratsa.** **Hasieraketa**. PE ebatzi.

   – PE-ren soluzio optimoa osoa bada, PO-ren soluzio optimoa da. Amaitu.

   – Bestela, $z_b = -\infty$ behe-bornea hasieratu.

2. **urratsa.** **Adarkatzea**

   Azkenekoa ez den problema bat aukeratu. Aukeratutako probleman osoa izan behar duen eta problemaren soluzio optimoan ez den x_j aldagai bat aukeratu. Problema adarkatu, $x_j \leq [x_j]$ eta $x_j \geq [x_j] + 1$ murrizketak erantsiz, bi problema berri sortzeko.

3. **urratsa.** **Bornatzea**

   Aurreko adarkatze-urratsean sortu berri ditugun bi problemak ebatzi eta problema bakoitzerako z_g kalkulatu.

   Problemak ebazteko sentikortasunaren analisia erabiltzen da, eta simplex dual algoritmoa aplikatzen da.

4. urratsa. Azkeneko problemak

Azkeneko ez diren problema guztiak aztertu. Azkeneko dira ondoko baldintzetako bat betetzen dutenak:

(1) Problema bideraezina da.

(2) $z_g \leq z_b$.

(3) Problemaren soluzioa osoa da eta $z_g > z_b$. Behebornea eguneratu $z_b = z_g$ eginez; soluzio oso hori soluziogaia da.

Azkeneko ez den problemarik existitzen bada, algoritmoaren 2. urratsean jarraitu behar da adarkatze berri batekin.

Problema guztiak azkeneko badira, soluziogaia problema osoaren soluzio optimoa da.

Soluziogairik ez badago, problema osoa bideraezina da.

5. 0-1 programazio osoa

0-1 problema linealak aldagai bitarrak besterik ez dituzten problema linealak dira.

4. Definizioa (Problema erlaxatua) *0-1 eredu lineal bat izanik, dagokion problema erlaxatua lortzeko problemari murrizketa guztiak kendu behar zaizkio, aldagaiak bitarrak izatearena izan ezik.*

5. Definizioa (Soluzio partziala) *0-1 eredu lineal bat emanik, aldagairen bat balio finkorik gabe duen soluzioari eredu linealaren soluzio partziala deitzen zaio.*

6. Definizioa (Soluzio partzial baten osaketa) *0-1 eredu lineal oso baten soluzio partzial bat emanik, finkatu gabe dauden aldagaiei balio finkoa ematen zaienean lortzen den soluzioa soluzio partzialaren osaketa dela esaten da.*

0-1 eredu lineal bat ebazteko aztertuko dugun algoritmoa erabiltzeko, helburu funtzioaren koefizienteek ondoko baldintza bete behar dute:

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n.$$

5.1 0-1 adarkatze- eta bornatze-algoritmoa

Helburua maximizatzea. $0 \le c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_n$ bete behar da.

1. **urratsa. Hasieraketa**

   $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)$ soluzioak 0-1 problema osoaren murrizketak betetzen baditu, optimoa da. Amaitu.

   Bestela, $\mathbf{x} = (0, 1, \ldots, 1)$ soluzioak 0-1 problema osoaren murrizketak betetzen baditu, optimoa da. Amaitu.

   Bestela, $z_b = z(\mathbf{x})$ hasieratu, $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0)$.

   $z_g = z(\mathbf{x}_g)$ da, non $\mathbf{x}_g = (0, 1, \ldots, 1)$ den.

   Problemari $k = 1$ indizea esleitu.

2. **urratsa. Adarkatzea**

   Azkenekoa ez den problema bat aukeratu. Aukeratutako problema adarkatu, $x_k = 0$ eta $x_k = 1$ murrizketak erantsiz, bi problema berri sortzeko.

3. **urratsa. Bornatzea**

   Bi problema berri horietarako $k + 1$ osagaia 0 duten eta hurrengoak 1 dituzten $\mathbf{x}_g$ osaketak egin. Bi problemek osaketa horietan hartzen dituzten z_g balioak kalkulatu. Problema berri horiei $k = k + 1$ indizea esleitu.

4. urratsa. Azkeneko problemak

Azkeneko ez diren problema guztiak aztertu. Azkeneko dira ondoko baldintzetako bat betetzen dutenak:

(1) $z_g \leq z_b$.

(2) $z_g > z_b$ bada eta $\mathbf{x}_g$ soluzioak problema osoaren murrizketak betetzen baditu, x_g soluziogaia da, eta $z_b = z_g$ eguneratuko da.

(3) Problemaren murrizketa guztiak aldi berean beteko dituen osaketarik ez da existitzen. Problema bideraezina da.

Problema guztiak azkenekoak badira, amaitu.

Problema osoaren soluzio optimoa z_b behe-borneak erakutsitako soluziogaia da.

Bestela, 2. urratsera joan.